PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
30 de marzo de 2016.

MAT–1630 - CALCULO III
Interrogación N° 1

1. Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$. El cambio de variables $x = uv,\ \ y = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$ transforma a la función $f(x, y)$ en la función $g(u, v)$.

   a) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en términos de las derivadas parciales de f.

   Solución:
   Por la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} g_u &= f_x\, x_u + f_y\, y_u = f_x\, v + f_y\, u \\ g_v &= f_x\, x_v + f_y\, y_v = f_x\, u - f_y\, v \end{aligned}$$

   b) Si $|f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)| = 2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, determine las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$a\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u} - b\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v} = u^2 + v^2.$$

   Solución:
   Por la parte anterior tenemos que

$$\begin{aligned} g_{uu} &= (f_x)_u\, v + (f_y)_u\, u + f_y \\ &= (f_{xx}x_u + f_{xy}y_u)\, v + (f_{yx}x_u + f_{yy}y_u)\, u + f_y \\ &= f_{xx}\, v^2 + 2f_{xy}\, uv + f_{yy}\, u^2 + f_y \end{aligned}$$

   y análogamente,

$$g_{vv} = f_{xx}\, u^2 - 2f_{xy}\, uv + f_{yy}\, v^2 - f_y,$$

   Luego,

$$a\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u} - b\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v} = v^2\,(af_{xx} - bf_{yy}) + u^2\,(af_{yy} - bf_{xx}) + (a + b)\,(2uvf_{xy} + f_y)$$

   y se cumple la identidad

$$a\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u} - b\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v} = u^2 + v^2.$$

   si

$$af_{xx} - bf_{yy} = 1; \qquad af_{yy} - bf_{xy} = 1 \quad \text{y} \qquad a + b = 0.$$

Entonces, de la igualdad
Sumanod las dos primeras y usando que $f_{xx} + f_{yy} = 2,$ obtenemos $a - b = 1.$ Como la tercera igualdad es $a + b = 0,$ de dicho sistema obtenemos $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}.$

2. La temperatura en el punto $(x,\, y)$ de una lámina metálica viene dada por la función $T(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Hallar la razón de crecimiento máximo de la temperatura en el punto $(3,\, 4)$ y la dirección en que ella ocurre.

Solución:

La dirección de crecimiento máximo es la del gradiente en dicho punto.

Como

$$\nabla f(x,\, y) \;=\; (f_x,\, f_y) \;=\; \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \,,\, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Luego, la dirección de máximo crecimiento es $\nabla f(3, 4) = \left(\dfrac{7}{625} \,,\, \dfrac{-24}{625} \right)$.

(o, simplemente, la del vector $(7,\, -24)$).

La razón de crecimiento máximo es

$$||\nabla f(3, 4)|| \;=\; \frac{1}{625} \sqrt{7^2 \,+\, 24^2} \;=\; \frac{\sqrt{625}}{625} \;=\; \frac{1}{25} \,.$$

3. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2+2y^2+3z^2 = 21$ que sean paralelos al plano $x+4y+6z=0$.

Solución:

El plano $x+4y+6z=0$ tiene vector normal $\vec{n}_1 = (1,\, 4,\, 6)$.

La superficie $x^2+2y^2+3z^2 = 21$ tiene, en un punto $(x,\, y,\, z)$ de ella, vector normal $\nabla f = (2x,\, 4y,\, 6z)$.

Por tanto, los puntos de la superficie en los que el plano tangente tiene dirección paralela al vector $(1, 4, 6)$ son aquellos que satisfacen

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{4} = \frac{6z}{6} \qquad \text{y, además,} \qquad x^2+2y^2+3z^2 = 21.$$

Las dos primeras igualdades nos dicen que $z = y = 2x$. Sutituyendo en la última obtenemos $21x^2 = 21 \Rightarrow x = \pm 1$.

Luego, los puntos de la superficie buscados son $P_1 = (1,\, 2,\, 2)$ y $P_1 = (-1,\, -2,\, -2)$.

Los planos tangentes en tales puntos son, respectivamente,

$$\Pi_1 : x + 4y + 6z = 21 \qquad \& \qquad \Pi_1 : x + 4y + 6z = -21.$$

4. Encuentre y clasifique los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Solución:

Debemos primero resolver el sistema $f_x = f_y = 0$. Esto es,

$$3x^2 + 3y^2 = 15$$

$$6xy = 12$$

Sumando obtenemos

$$3(x+y)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x + y = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - x \quad \text{o} \quad y = -3 - x.$$

Sustituyendo $y = 3 - x$ en la segunda ecuación obtenemos

$$x(3-x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1; \quad x = 2,$$

obteniendo así los primeros dos puntos críticos: $P_1 = (1, 2)$ y $P_2 = (2, 1)$

Sustituyendo $y = -3 - x$ en la segunda ecuación obtenemos

$$x(3+x) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1; \quad x = -2,$$

obteniendo así dos puntos críticos más : $P_3 = (-1, -2)$ y $P_4 = (-2, -1)$

Para establecer su carácter usamos el discriminante (hessiano)

$$\Delta(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Entonces:

$\Delta(P_1) = 36(1^2 - 2^2) < 0 \quad \Rightarrow \quad P_1$ es punto de silla

$\Delta(P_2) = 36(2^2 - 1^2) > 0$ y $f_{xx}(P_2) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad P_2$ es punto de mínimo local

$\Delta(P_3) = 36((-1)^2 - (-2)^2) < 0 \quad \Rightarrow \quad P_3$ es punto de silla

$\Delta(P_4) = 36((-2)^2 - (-1)^2) > 0$ y $f_{xx}(P_4) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad P_4$ es punto de máximo local

5. Hallar los valores extremos de $f(x,y) = x^2+2y^2-2x+3$ en el disco cerrado $x^2+y^2 \leq 10$.

Solución:

Primero estudiamos puntos críticos en el interior de la región buscando, en ella, soluciones del sistema $f_x = f_y = 0$. Esto es,

$$2x = 2; \qquad 4y = 0 \qquad \text{obteniendo el punto} \quad P_1 = (1, 0)$$

que está, efectivamente, dentro del disco.

Analizamos ahora el borde. Se trata de extremar $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$.

Las soluciones son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 2x\lambda \\ 4y &= 2y\lambda \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación, $y = 0$ o $\lambda = 2$.

Del primero de esos casos , y sustituyendo en la restricción obtenemos dos nuevos puntos: $P_2 = (-\sqrt{10}, 0)$ y $P_3 = (\sqrt{10}, 0)$.

Si tomamos ahora $\lambda = 2$ y sustituímos en la primera ecuación resulta $x = -1$ por lo que obtenemos los puntos $P_4 = (-1, -3)$ y $P_5 = (-1, 3)$.

Evaluando f en los tres puntos obtenidos resulta que el valor máximo es $24 = f(P_4) = f(P_5)$ mientras que el mínimo es $2 = f(P_1)$.