PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAT-1630 * CÁLCULO III. TAV-2014

INTERROGACIÓN N° 1 V.10.01.14

Solución

1. (i)[**3 puntos**] Sea $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{8x^3-y}$ excepto en los puntos de la parábola de ecuación $y = 8x^3$ donde se define $f(x,y) = 1$. Establecer que $f(x,y)$ no es continua en $P_0\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

(ii)[**3 puntos**] Estudiar el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3(1-\cos(2xy^2))}{4(x^2+y^4)^2}$.

Solución.

(i) Si vamos al punto por la recta $y = 1$ con $x \neq \dfrac{1}{2}$ resulta

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \lim_{y\to 1} \frac{2x-y}{8x^3-y} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{8x^3-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+2x+1} = \frac{1}{3}$$

Si vamos al punto por la recta de ecuación $x = \frac{1}{2}$ con $y \neq 1$ resulta

$$\lim_{y\to 1} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x-y}{8x^3-y} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1-y}{1-y} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} 1 = 1$$

Con lo que el límite en cuestión no existe, por lo que no hay continuidad en $P_0\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

(ii)

Sea $f(x,y) = \dfrac{3(1-\cos(2xy^2))}{4(x^2+y^4)^2} = \dfrac{6\text{sen}^2(xy^2)}{4(xy^2)^2} = \dfrac{\text{sen}^2(xy^2)}{(xy^2)^2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{(xy^2)^2}{(x^2+y^4)^2}$

colocando:

$$g(x,y) = \frac{(xy^2)^2}{(x^2+y^4)^2}$$

Tomando $y = mx \Rightarrow g(x,mx) = \dfrac{m^4x^6}{x^4(1+m^4x^2)^2}$, y vemos que tiende a 0 cuando $x \to 0$.

Pero si $x = y^2 \Rightarrow g(y^2, y) = \dfrac{y^8}{4y^8} = \dfrac{1}{4},$ que tiene a $\dfrac{1}{4}$ cuando $y \to 0,$ por tanto, el límite no existe.

2.[**6 puntos**] Considere la función real f definida por

$$f(x,y) = \frac{x\,\text{sen}(y) - y\,\text{sen}(x)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ con } f(0,0) = 0$$

Demuestre que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Demostración.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} \qquad (1)$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{h\,\text{sen}(0) - 0\,\text{sen}(h)}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = \frac{[\text{sen}(y) - y\cos(x)](x^2+y^2) - [x\,\text{sen}(y) - y\,\text{sen}(x)]2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(0,k) = \frac{k^2\,\text{sen}(k)\, - k^3}{k^4} = \frac{\text{sen}(k)\, - k}{k^2}$$

En (1), resulta

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\text{sen}(k)\, - k}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\text{sen}(k)\, - k}{k^3}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\cos(k) - 1}{3\,k^2}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{k\to 0} -\frac{\text{sen}(k)}{6\,k} = -\frac{1}{6}$$

Analogamente

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \quad (2)$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0\,\text{sen}(k) - k\,\text{sen}(0)}{0^2+k^2} - 0}{k} = 0$$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$f_y(x,y) = \frac{[x\cos(y) - \text{sen}(x)](x^2+y^2) - [x\,\text{sen}(y) - y\,\text{sen}(x)]2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(h,0) = \frac{h^3 - h^2\text{sen}(h)}{h^4} = \frac{h - \text{sen}(h)}{h^2}$$

En (2), resulta

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h - \operatorname{sen}(h)}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - \operatorname{sen}(h)}{h^3} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h)}{3\,h^2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{6h} = \frac{1}{6}$$

Por tanto

$$f_{xy}(0,0) = -\frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} = f_{yx}(0,0)$$

3.(i)[**3 puntos**] Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado $n,\ n \in \mathbb{N}$, demuestre que

$$x\,\frac{\partial(f_x, f)}{\partial(x,y)} \;=\; y\,\frac{\partial(f, f_y)}{\partial(x,y)}$$

(ii)[**3 puntos**] Demostrar que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ en el punto $P_0(5,\ -12, 169)$ corta al plano coordenado XOY según la recta de ecuaciones $10x - 24y - 169 = 0,\ z = 0.$

(i) **Demostración.**

$f(x,y)$ una función homogénea de grado $n \;\Rightarrow\; x\,f_x + y\,f_y \;=\; n\,f,$

derivando sucesívamente con respecto a x y a y se tiene:

$$f_x + x\,f_{xx} + y\,f_{yx} \;=\; n\,f_x \qquad (1)$$

$$x\,f_{xy} + f_y + y\,f_{yy} \;=\; nf_y \qquad (2)$$

multiplicando (1) por f_y y (2) por f_x e igualando

$f_x f_y + x\,f_{xx}\,f_y + y\,f_{yx} f_y \;=\; x\,f_{xy}\,f_x + f_y\,f_x + y\,f_{yy}\,f_x$ de donde asociando

$x\,f_{xx}\,f_y \;- x\,f_{xy}\,f_x \;=\; y\,f_{yy}\,f_x - y\,f_{yx}\,f_y$

$x\,(f_{xx}\,f_y \;-\; f_{xy}\,f_x) \;=\; y\,(f_{yy}\,f_x - \;f_{yx}\,f_y) \;\Rightarrow\; x\,\frac{\partial(f_x,f)}{\partial(x,y)} \;=\; y\,\frac{\partial(f,f_y)}{\partial(x,y)}$

(ii)

Sabemos que la ecuación del plano tangente es:

$$z - 169 = z_x(5,\ -12)(x-5) + z_y(5,\ -12)(y+12) \Leftrightarrow$$
$$z - 169 = 10(x-5) - 24(y+12)$$

O sea

$$10x - 24y - z - 169 = 0,$$

Este plano intersecta al plano $z = 0$ según la recta

$$10x - 24y - z - 169 = 0,\ z = 0.$$

4. **[6 puntos]**Si $x = u + v$ e $y = \dfrac{u - v}{a}$ y $g(u, v) = f(x, y)$, donde f posee derivadas parciales de segundo orden continuas, demostrar que

$$a^2 f_{xx} - f_{yy} = a^2 g_{uv}$$

Demostración.

Tenemos:

$$g_u = f_x x_u + f_y y_{u,}$$

de donde resulta:

$$g_{uv} = (f_{xx} x_v + f_{yx} y_v) x_u + f_x x_{vu} + (f_{xy} x_v + f_{yy} y_v) y_u + f_y y_{vu,}$$

aplicando el lema de Schwarz y los valores de x e y se obtiene:

$$g_{uv} = f_{xx} + f_{xy}\left(-\frac{1}{a}\right) + 0 + f_{xy}\frac{1}{a} - f_{yy}\frac{1}{a^2} + 0 \Rightarrow$$

$$a^2 f_{xx} - f_{yy} = a^2 g_{uv}$$