PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
3 de diciembre de 2012.

MAT–1630 - CALCULO III
Examen

1. Hallar el máximo absoluto de la función xy^2z^3 sobre la región cerrada acotada por los planos coordenados y la porción del plano $x+y+z=18$ en el primer octante

   Respuesta: Primero buscamos puntos críticos en el *interior* de la región $\mathcal{R}$, descrita en el enunciado. Para ello debemos resolver el sistema $f_x = f_y = f_z = 0$:

   $$\begin{array}{rcccl} f_x & = & y^2z^3 & = & 0 \\ f_y & = & 2xyz^3 & = & 0 \\ f_z & = & 3xy^2z^2 & = & 0. \end{array}$$

   cuya única solución es $(0,0,0)$ que no pertenece al interior de la región. Luego, no hay puntos críticos allí.

   Luego el máximo ha de estar en la frontera de $\mathcal{R}$ la que consta de cuatro caras: Tres de ellas corresponden a los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$, respectivamente. En cada una de ellas $f=0$. Luego, buscamos por el punto de máximo en la cuarta cara. Esto es,

   queremos maximizar $f(x,y,z) = x^2yz^3$ con la restricción $g(x,y,z) = x+y+z-3=0$. Por el método de Lagrange, debemos resolver el sistema:

   $$\begin{array}{rcl} y^2z^3 & = & \lambda \\ 2xyz^3 & = & \lambda \\ 3xy^2z^2 & = & \lambda \\ x+y+z & = & 18. \end{array}$$

   Restando las dos primeras se tiene $yz^3(y-2x) = 0$. Si $yz^3 = 0$ estaríamos en alguno de los planos coordenados donde $f=0$ (caso ya considerado). Por tanto,

   $$y = 2x.$$

   Análogamente, restando las dos últimas y descartando casos ya analizados llegamos a que

   $$2z = 3y.$$

   Sustituyendo en la última ecuación se tiene el único punto crítico

   $$x = \frac{1}{2}; \quad y = 1; \quad z = \frac{3}{2} \qquad \text{con} \qquad f(3,\,1,\,2) = \frac{27}{16} \quad \text{(valor máximo)}$$

2. Dada la ecuación $3y - 3xz - z^3 = 0$, determine condiciones para que ella defina una función diferenciable $z = F(x, y)$ y demuestre que

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Respuesta:

Sea $G(x, y, z) = 3y - 3xz - z^3$, si buscamos que exista $F = F(x, y)$ tal que $z = F(x, y)$ se deberán buscar los puntos donde que $G_z(x, y) \neq 0$. En este caso $G_z = x + z^2$ luego el conjunto en los cuales la ecuación $G(x, y, z) = 0$ define a z de manera implicita como función de x, y es el conjunto $\{(x, y, z) : x \neq -z^2\}$.

Por otro lado tenemos que para estos puntos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z + z^2},$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2z}{(x + z^2)^3}$$

De manera análoga, se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-z}{z + z^2},$$

de donde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2zx}{(x + z^2)^3}$$

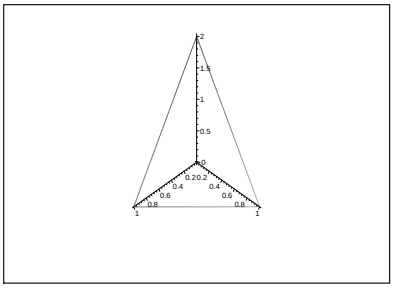
De aquí se obtiene la igualdad pedida.

3. Calcular $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, siendo

$$\vec{F}(x,y,z) \;=\; \Big(\,2y+\operatorname{arc\,sen}(x),\;\; e^{y^2},\;\; y^2+\ln(z^2+4)\,\Big)$$

y C el contorno del triángulo con vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,2)$, recorrido en el orden que se indican los vértices.

Respuesta: El contorno es el que se muestra en la figura (recorrido contra-reloj si se le mira desde arriba)



El cálculo directo de la integral es imposible. Recurrimos al teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \int\!\!\int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\widehat{n}dS\,,$$

donde S es cualquier superficie que tenga a C como borde, orientada hacia arriba. La más simple, es la porción del plano que pasa por los tres vértices, enecerrada dentro de C.

Dicho plano tiene por ecuación, $z=2(1-x-y)$. Por tanto,

$$\widehat{n}dS \;=\; (-z_x,\,-z_y,\,1)\,dxdy \;=\; (2,\,2,\,1)\,dxdy.$$

Por otro lado, $\vec{\nabla}\times\vec{F}(x,y,z) \;=\; (2y,\,0,\,-2)$.

Así tenemos

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \int\!\!\int_D (2y,\,0,\,-2)\cdot(2,\,2,\,1)\,dxdy \;=\; 2\int\!\!\int_D (2y-1)\,dxdy\,,$$

donde D es la proyección de S sobre el plano XY. Esto es,

$$D \;=\; \{\,(x,y)\,|\,0\le x\le 1;\;\; 0\le y\le 1-x\,\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \;&=\; 2\int_0^1\int_0^{1-x}(2y-1)dy\,dx\\
&=\; 2\int_0^1 \left(y^2-y\right)\Big|_0^{1-x} dx\\
&=\; 2\int_0^1 (x^2-x)\,dx\\
&=\; -\frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

4. Sea $\vec{F} = (x^3 + ye^z,\ x^4\sqrt{z^3+1} + 2y^3,\ x + y)$ y $\mathcal{S}$ el manto del parabolide elíptico $z = x^2 + 2y^2;\ 0 \leq z \leq 1$ orientado positivamente mediante la normal hacia afuera. Hallar el flujo de $\vec{F}$ a través de $\mathcal{S}$.

Respuesta: Debemos calcular

$$\int_S D \cdot d\mathbf{S}.$$

Para ello consideremos

$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + 2y^2 = 1.\}$ orientada con las normales hacia .ªrribaz Ω la región en $\mathbb{R}^3$ tal que $\partial\Omega = S \cup T$.

Luego por el Teorema de la divergencia se tiene que (notemos que la orientación es correcta.),

$$\int_\Omega div(F)dV = \int_S F \cdot d\mathbf{S} + \int_T F \cdot d\mathbf{S}.$$

Comenzamos calculando la respectiva integral triple, para ello en prime lugar $div(F) = 3(x^2 + 2y^2)$, de donde

$$\begin{aligned}
\int_\Omega div(F)dV &= 3\int_D \int (x^2 + 2y^2) - (x^2 + 2y^2)^2 dxdy. \\
&\qquad\qquad \text{donde} \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}. \\
&= 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 - r^4)\frac{r}{\sqrt{2}} d\theta dr. \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_T F \cdot d\mathbf{S} &= \int_D \int F \cdot \mathbf{n} dA. \\
&= \int_D \int (x + y + 1) dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\cos(\theta) + \frac{r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\theta) + 1)\frac{r}{\sqrt{2}} dr d\theta. \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Se concluye que el flujo pedido tiene un valor igual a $\frac{-\pi}{2\sqrt{2}}$.