PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
11 junio 2019

MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 3
Primer Semestre 2019

1. Considere la superficie S obtenida al girar una vuelta completa en torno al eje OX la curva γ parametrizada en coordenadas polares por : $(\theta, r)\ :\ r = 1+\theta$ con $0 \leq \theta \leq \pi$.

   a) Parametrice la superficie S.
   b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $Q := (0, 0, 1+\pi/2)$.

Solución. a) Las coordenadas cartesianas de γ son

$$x = (1+\theta)\cos\theta\,, \qquad y = (1+\theta)\text{sen}\ \theta$$ Calcula V **1.0 ptos**

Al girar en un ángulo u con respecto al eje OX se obtiene la parametrización de la superficie de revolución S

$$x(\theta,u) = (1+\theta)\cos\theta\,, \qquad y(\theta,u) = (1+\theta)\text{sen}\,\theta\ \cos u, \qquad z(\theta,u) = (1+\theta)\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,u$$

Explicita una parametrización de S **1.5 ptos**

Solución. b)

Llamemos $\varphi(\theta,u) = (x(\theta,u), y(\theta,u), z(\theta,u))$ la parametrización de S.

Entonces $Q = \varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) := \varphi(q)$. Explicita el punto Q en la parametrización **0.5 ptos**

Sabemos que el vector normal a S en Q es $\varphi_\theta(q) \times \varphi_u(q)$, vector normal del plano tangente a S en Q.

Calculando,

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(q) &= (x_\theta(q), y_\theta(q), z_\theta(q)) = (-(1+\tfrac{\pi}{2}), 0, 1) \\ \varphi_u(q) &= (x_u(q), y_u(q), z_u(q)) = (0, -(1+\tfrac{\pi}{2}), 0) \end{aligned}$$

Calcula vectores tangentes l.i. **1.0 ptos**

Como $\varphi_\theta(q)$ y $\varphi_u(q)$ son no nulos y li, la normal del plano tangente es $\varphi_\theta(q) \times \varphi_u(q)$:

$$\varphi_\theta(q) \times \varphi_u(q) = ((1+\tfrac{\pi}{2}), 0, (1+\tfrac{\pi}{2})^2)\,.$$ Calcula normal plano tangente **1.0 ptos**

De esta manera la ecuación del plano tangente a S en $Q = (0, 0, 1+\pi/2)$ es

$$x(1+\tfrac{\pi}{2}) + \big(z - (1+\tfrac{\pi}{2})\big)\,(1+\tfrac{\pi}{2})^2 = 0 \ \Rightarrow\ x + (1+\tfrac{\pi}{2})z = (1+\tfrac{\pi}{2})^2\,.$$ Encuentra ecuación plano tangente **1.0 ptos**

2. Sea S la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=25$ bajo el plano $z=4$ orientada de modo tal que el vector normal en $(5,0,0)$ es $\hat{\imath}$ y se define el campo vectorial $F(x,y,z)=-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}+z\hat{k}$. Utilizando el Teorema de Stokes calcule $\int\int_S \mathrm{rot}F\cdot dS$.

Solución.

Notemos que el borde de S, que denotamos por C, es el círculo $x^2+y^2+4^2=25$ o equivalentemente $x^2+y^2=9$ en el plano $z=4$. Describe la frontera (o borde) **1.0 ptos**

La función $r(t)=(3\cos t,\, 3\,\mathrm{sen}\, t,\, 4)$ parametriza la curva $-C$.

Parametriza borde con orientación correcta **1.0 ptos**

En términos de esta parametrización tenemos que

$$F(r(t))=(-3\,\mathrm{sen}\, t,\, 3\cos t,\, 4)\,.$$ Calcula campo en el borde **1.0 ptos**

Por lo tanto,

$$F\cdot dr=(-3\,\mathrm{sen}\, t,\, 3\cos t,\, 4)\cdot(-3\,\mathrm{sen}\, t,\, 3\cos t,\, 0\,)dt=9\,dt\,.$$ Calcula $F\cdot dr$ **1.0 ptos**

Así se obtiene que

$$\int_{-C} F\cdot dr=\int_0^{2\pi} 9\,dt=18\pi\,.$$ Calcula integral de línea **0.5 ptos**

Aplicando el Teorema de Stokes:

$$\int\int_S \mathrm{rot}F\cdot dS=\int_C F\cdot dr$$ Aplica Stokes **0.5 ptos**

$$\int\int_S \mathrm{rot}F\cdot dS=\int_C F\cdot dr=-\int_{-C} F\cdot dr=-18\pi\,.$$ Explicita solución **1.0 ptos**

3. Se define el campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(4x^3\,,\, \frac{-z}{y^2+z^2}\,,\, \frac{y}{y^2+z^2}\right)$.

   a) Demuestre que $\vec{F}$ es conservativo en la región $\{\,(x,y,z) : z > 0\,\}$.

   b) Sea C la curva que resulta de intersectar las esferas

   $$(x+8)^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25\,.$$

   Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (elija libremente una orientación para C).

   c) ¿Es $\vec{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : y = z = 0\}$?

Solución. a) La primera componente del rotacional (rotor) $\nabla \times F$ es

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{y^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-z}{y^2+z^2}\right) &= \frac{1\cdot(y^2+z^2) - y\cdot 2y + 1\cdot(y^2+z^2) - z\cdot 2z}{(y^2+z^2)^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Primera componente rotor **0.5 ptos**

La segunda componente es

$$\frac{\partial}{\partial z}(4x^3) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{y^2+z^2}\right) = 0.$$

Segunda componente rotor **0.5 ptos**

La tercera es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-z}{y^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(4x^3) = 0.$$

Tercera componente rotor **0.5 ptos**

Al ser su rotacional siempre cero, y al tratarse de un dominio en donde

- $\vec{F}$ no tiene singularidades — Explicita F no singular en dominio **0.5 ptos**
- la curva cerrada es la frontera de una superficie orientable contenida en el dominio,

  Superficie en el dominio **0.5 ptos**

Se concluye que $\vec{F}$ es conservativo en $\{(x,y,z) : z > 0\}$. — Concluye **0.5 ptos**

Solución. b) Las esferas se intersecan en la circunferencia de radio 3 centrada en el punto de coordenadas $(-4,0,0)$, la cual puede parametrizarse como — Reconoce intersección **0.5 ptos**

$\vec{r}(t) = (-4, 3\cos t, 3\mathrm{sen}\, t), \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$ — Exhibe parametrización intersección **0.5 ptos**

La integral de línea es

$$\int_0^{2\pi} (4^4, \frac{-3\,\mathrm{sen}\, t}{9}, \frac{3\cos t}{9})\cdot(0, -3\,\mathrm{sen}\, t, 3\,\cos t)\, dt = 2\pi\,.$$

Calcula integral de línea **1.0 ptos**

La integral puede ser -2π si elige la otra orientación en la parametrización de C.

Solución. c) Si $\vec{F}$ fuera conservativo entonces la última integral debiera haber sido cero pues la curva es cerrada.

Se concluye entonces que el campo $\vec{F}$ no es conservativo. — Argumento no conservativo **1.0 ptos**

4. Sea $\vec{F}$ un campo diferenciable en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (no necesariamente definido en 0). Considere

$$S^+ := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, y \geq 0\}, \quad S^- := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, y \leq 0\}$$

y $\vec{n}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$.

a) Demuestre que $\iint_{S^+} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S^-} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde ambas integrales están orientadas de acuerdo a la dirección paralela a $\vec{n}$.

b) Sea $\vec{G}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$. Demuestre que no existe un campo $\vec{F}$ tal que $\vec{G} = \nabla \times \vec{F}$.

Solución. a) Sea C la curva parametrizada dada por

$$\vec{r}(t) := (\cos t, 0, \text{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si recorremos la curva C (en la dirección indicada por esa parametrización) con nuestra cabeza apuntando en la dirección del normal $\vec{n}$ que define la orientación que le hemos dado a las superficies S^+ y S^-, vemos que S^- queda a nuestra izquierda y S^+ queda a nuestra derecha. Si, en cambio, recorremos C en el sentido contrario, la que queda a nuestra izquierda es ahora S^+.

Explicita las direcciones de las fronteras **1.0 ptos**

El teorema de Stokes aplicado a S^+ afirma entonces que

$$\iint_{S^+} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

Aplica Stokes a S^+ **1.0 ptos**

donde C^- representa a C recorrida en el sentido contrario,
Por otro lado, aplicando Stokes a S^- se tiene que

$$\iint_{S^-} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Aplica Stokes a S^- **1.0 ptos**

Como $\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, se cumple la igualdad pedida. Propiedad de integral de línea **1.0 ptos**

Solución. b) Si $\vec{G}$ fuera el rotacional de un campo $\vec{F}$ se tendría, por la parte a), que

$$\iint_{S^+} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S^-} \vec{G} \cdot d\vec{S}.$$

Sin embargo, es posible ver que esto no se cumple.

Se calcula que $\vec{G} \cdot \vec{n} = 1$ Calcula $\vec{G} \cdot \vec{n}$ **1.0 ptos** en todo punto sobre las superficies.

Por lo tanto, en los dos casos el valor de la integral sería el área de la superficie, puesto que por definición

$$\iint_{S^+} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_{S^+} \vec{G} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S^+} 1 dS = \text{Area}(S^+) \ ,$$

Calcula integral de superficie **0.5 ptos**

Similarmente, $\iint_{S^-} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \text{Area}(S^-)$, siendo imposible que las integrales tengan signos contrarios. Concluye **0.5 ptos**