Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
9 de Junio de 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Pauta Interrogación 3

P1.- Sea $F(x,y) = (2xy^2 + 1, 2x^2y + 3x)$ campo vectorial. Calcule $\int_C F \cdot dr$, donde C consiste en tres segmentos de recta que van desde $(3,0)$ a $(3,2)$; desde $(3,2)$ a $(1,4)$ y desde $(1,4)$ a $(1,0)$.

Solución: Primero notar que para usar el Teorema de Green es necesario cerrar la curva con un segmento de recta desde $(1,0)$ a $(3,0)$. Denotemos a esta curva como C_1.

Entonces, usando el Teorema de Green tenemos que:

$$\int_C F \cdot dr + \int_{C_1} F \cdot dr = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Luego, calculamos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3$, entonces

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = 3Area(D) = 3 \cdot \frac{4+2}{2} \cdot 2 = 18.$$

Además, C_1 la podemos parametrizar por $r(t) = (t, 0),\ t \in [1,3]$, entonces

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_1^3 (1, 3t) \cdot (1, 0) dt = 2.$$

Por lo tanto,

$$\int_C F \cdot dr = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA - \int_{C_1} F \cdot dr = 16.$$

P2.- Sea $F(x,y,z) = (x,y,z)r^2$ donde $r = ||(x,y,z)||$ y sea g una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Calcule $\text{rot}(\text{div}(F)\nabla g)$ en término de las derivadas parciales de g.

Solución:
Primero notamos que

$$\text{rot}(\text{div}(F)\nabla g) = \text{div}(F)\text{rot}(\nabla g) + \nabla \text{div}(F) \times \nabla g. \tag{1}$$

Como $\text{rot}\,(\nabla g) = 0$ y

$$\begin{aligned} \text{div}(r^2(x,y,z)) &= r^2 \text{div}\,((x,y,z)) + \nabla r^2 \cdot (x,y,z) \\ &= 3r^2 + 2\,(x,y,z) \cdot (x,y,z) \\ &= 5r^2. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\nabla \text{div}(F) = \nabla 5r^2 = 10(x,y,z).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{div}(F)\nabla g) &= 10(x,y,z) \times (g_x, g_y, g_z) \\ &= 10\,(yg_z - zg_y, zg_x - xg_z, xg_y - yg_x)\,. \end{aligned}$$

P3.- Considere la superficie S obtenida al rotar la curva $c(t) = (t^2 + 1, t^3)$, $t \in [0,3]$, en torno al eje vertical (el eje-y).

a) Dé una parametrización de S.

b) Encuentre el/los puntos donde el plano tangente a S es paralelo al plano $3x + 3y + 2\sqrt{2}z = 0$.

Solución: En esta pregunta se consideraran las dos siguientes interpretaciones como correctas.
Interpretación 1: El eje de rotación se denota en $\mathbb{R}^3$ como el eje z.

a) S es una superficie de revolución en torno al eje vertical, con distancia al eje $t^2 + 1$ y altura t^3. Esta tiene parametrización:

$$r(t, \theta) = ((t^2 + 1)\cos\theta, (t^2 + 1)\sin\theta, t^3)$$

con $t \in [0, 3]$ y $\theta \in [0,2\pi)$.

b) Usamos la parametrización para calcular un vector normal, calculando: $r_t(t, \theta) = (2t\cos\theta, 2t\sin\theta, 3t^2)$ y $r_\theta(t, \theta) = (-(t^2 + 1)\sin\theta, (t^2 + 1)\cos\theta, 0)$ luego

$$N = r_t \times r_\theta = (-3t^2(t^2 + 1)\cos\theta, -3t^2(t^2 + 1)\sin\theta, 2t(t^2 + 1)) = -t^2(t^2 + 1)(3\cos\theta, 3\sin\theta, -2/t).$$

Si el plano tangente es paralelo al plano $3x + 3y + 2\sqrt{2}z = 0$, su vector normal tiene que ser paralelo a $(3, 3, 2\sqrt{2})$. Es decir, tiene que existir $\lambda \neq 0$ tal que:

$$\begin{aligned} 3\cos\theta &= 3\lambda \\ 3\sin\theta &= 3\lambda \\ -2/t &= 2\sqrt{2}\lambda. \end{aligned}$$

Los $\theta \in [0, 2\pi), t \in [0, 3]$ donde esta ecuación se satisface determina los puntos buscados (en este caso son $\theta = 5\pi/4$ y $t = 1$).

Interpretación 2: El eje de rotación se denota en $\mathbb{R}^3$ como el eje y.

a) S es una superficie de revolución en torno al eje y, con distancia al eje $t^2 + 1$ y coordenada y igual a t^3. Esta tiene parametrización:

$$r(t, \theta) = ((t^2 + 1)\cos\theta, t^3, (t^2 + 1)\sin\theta)$$

con $t \in [0, 3]$ y $\theta \in [0,2\pi)$.

b) Usamos la parametrización para calcular un vector normal, calculando: $r_t(t, \theta) = (2t\cos\theta, 3t^2, 2t\sin\theta)$ y $r_\theta(t, \theta) = (-(t^2 + 1)\sin\theta, 0, (t^2 + 1)\cos\theta)$ luego

$$N = r_t \times r_\theta = t^2(t^2 + 1)(3\cos\theta, -2/t, 3\sin\theta).$$

Si el plano tangente es paralelo al plano $3x + 3y + 2\sqrt{2}z = 0$, su vector normal tiene que ser paralelo a $(3, 3, 2\sqrt{2})$. Es decir:, tiene que existir $\lambda \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} 3\cos\theta &= 3\lambda \\ -2/t &= 3\lambda \\ 3\sin\theta &= 2\sqrt{2}\lambda. \end{aligned}$$

Los $\theta \in [0, 2\pi), t \in [0, 3]$ donde esta ecuación se satisface determina los puntos buscados (en este caso son $\theta = (\arctan(\sqrt{8}/3) + \pi)$ y $t = 9/(2\sqrt{17})$).

P4.- Calcule $\iint_S (x^2 + y^2)dS$ donde S es la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ entre $z = 0$ y $z = 3$.

Solución La superficie del cono es el gráfico de una función $z = f(x, y) = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, entonces podemos elegir la parametrización $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

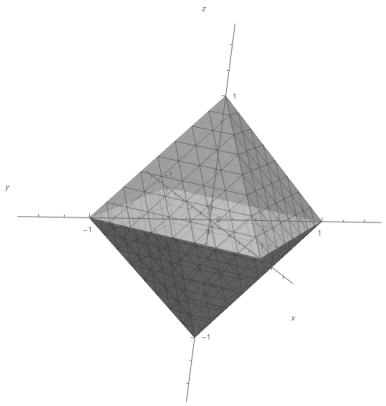
donde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 3\}$ es la proyección del cono sobre el plano XY. Tenemos que

$$\phi_x \times \phi_y = (-f_x, -f_y, 1) = \left(-\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2+y^2)dS &= \iint_S (x^2+y^2)\sqrt{1 + \frac{3x^2}{x^2+y^2} + \frac{3y^2}{x^2+y^2}}dydx \\ &= 2\iint_\Omega (x^2+y^2)dydx \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot r dr d\theta = 9\pi . \end{aligned}$$

P5.- Calcule el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie $|x| + |y| + |z| = 1$.



La superficie P es la figura de 8 caras (denotadas cada una por C_i, con $i = 1, 2..., 8$) mostrada en la siguiente imagen. En principio se deberían hallar 8 integrales de superficie, una por cada cara, pero por simetría el flujo por cada una de ellas es el mismo. Consideremos solo la cara que esta en el primer octante C_1 la cual puede ser parametrizada por

$f(x,y) = (x, y, 1-x-y)$, cuyo dominio es $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$

Como $f_x(x,y) = (1,0,-1)$ y $f_y(x,y) = (0,1,-1)$, entonces

$$f_x(x,y) \times f_y(x,y) = (1,1,1).$$

Finalmente el flujo a través de la cara del primer octante esta dado por

$$\begin{aligned} \iint_{C_1} F \cdot dS &= \iint_S F(f(x,y)) \cdot f_x(x,y) \times f_y(x,y) dA \\ &= \iint_S (x, y, 1-x-y) \cdot (1,1,1) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} dydx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto el flujo total esta dado por

$$\iint_P F \cdot dS = \sum_{i=1}^{8} \iint_{C_i} F \cdot dS = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

P6.- Sea C una curva en $\mathbb{R}^2$ cerrada, simple, orientada en sentido antihorario, parametrizada por $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Se define el número de giros de C con respecto al punto $p = (0, 1)$ (no situado sobre la curva C) como:

$$W(C, p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{xdy - (y-1)dx}{x^2 + (y-1)^2}.$$

a) Demuestre que $W(C, p) = 0$ si p está en la región exterior a C.

b) Demuestre que $W(C, p) = 1$ si p está en la región interior a C.

Solución: Notar que se está analizando el campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{-(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} \right).$$

Así, tenemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

a) Si p está en la región exterior a C, eso quiere decir que F es conservativo en la región que encierra C, por lo que

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \frac{xdy - (y-1)dx}{x^2 + (y-1)^2} = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = 0.$$

Por lo tanto, $W(C, p) = 0$.

b) Si p está en la región interior a C, entonces sea C_ε el círculo centrado en p de radio ε orientada en sentido antihorario. Entonces, usando el teorema de Green, tenemos que:

$$\int_C F \cdot dr - \int_{C_\varepsilon} F \cdot dr = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = 0.$$

Así, parametrizamos C_ε como $r(t) = (\varepsilon \cos(t), \varepsilon \operatorname{sen}(t) + 1), \quad t \in [0, 2\pi]$, y calculamos

$$\begin{aligned} \int_C \frac{xdy - (y-1)dx}{x^2 + (y-1)^2} &= \int_{C_\varepsilon} F \cdot dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \cos^2(t) + \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2(t)}{\varepsilon^2} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $W(C, p) = 1$.