Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
28 de Noviembre del 2017

MAT1630 $\star$ Cálculo III
Examen

1. Determine el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x,y) = x\mathbf{i}+(y+2)\mathbf{j}$ al mover un objeto a lo largo de un arco de la cicloide $r(t) = (t - \text{sen}(t))\mathbf{i} + (1 - \cos(t))\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

   Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= \int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (t - \text{sen}(t), 3 - \cos(t)) \cdot (1 - \cos(t), \text{sen}(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t - t\cos(t) - \text{sen}(t) + \text{sen}(t)\cos(t) + 3\,\text{sen}(t) - \text{sen}(t)\cos(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t - t\cos(t) + 2\,\text{sen}(t))\, dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - (t\,\text{sen}(t) + \cos(t)) - 2\cos(t)\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2\,. \end{aligned}$$

2. La semicircunferencia $(y-3)^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, en el plano YZ gira en torno al eje Z. Parametrice la superficie formada y encuentre la coordenada z de su centroide (observación: centroide significa centro de masa para densidad de masa 1).

   Solución:
   Consideramos los parámetros u y v como en el dibujo.
   Entonces $x(u,v) = (3+cos(u))sen(v)$; $\quad y(u,v) = (3+cos(u))cos(v)$; $\quad z = sen(u)$, $u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi]$
   Si $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, la superficie generada es D y su área es A, entonces

$$A = \iint_D dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ||f_u \times f_v||\, du\, dv$$

   $f_u+f_v = ((3+cos(u))sen(v)cos(u))\widehat{i}+(-(3+cos(u))cos(v)cos(u))\widehat{j}+((3+cos(u))sen(u)sen^2(v)+(3+cos(u))sen(u)cos^2(v))\widehat{k}$
   Por lo tanto

$$||f_u \times f_v|| = \sqrt{(3+cos(u))^2cos^2(u) + (3+cos(u))^2sen^2(u)} = (3+cos(u))$$

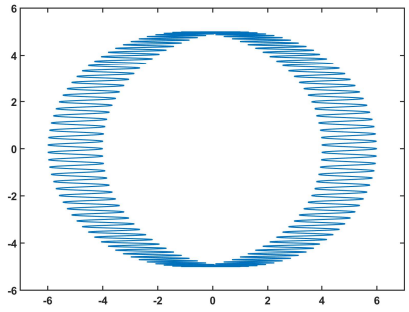
   $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(3+cos(u))du\, dv = 6\pi^2$

$$\overline{z} = \frac{1}{A}\iint_D z dS = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen(u)(3+cos(u))du\, dv = \frac{12\pi}{6\pi^2} = \frac{2}{\pi}$$

3. Considere el campo

$$\vec{F}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{si } (x,y) = 0, \end{cases}$$

y la curva λ parametrizada por $\lambda(t) = (5\cos(t) + \cos(100t), 5\,\text{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$, graficada abajo. Calcule $\int_\lambda \vec{F} \cdot d\vec{\lambda}$.



Solución:
Sea D la región limitada por λ y C la circunferncia con centro en el origen y radio 1. Entonces en D se satisfacen las hipotesis del teorema de Green para $\overrightarrow{F}$
Se tiene entonces que

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dx\, dy = \int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda}$$

Una parametrización positiva de la frontera de D es $\lambda+\mu$ con $\mu(t) = (cos(t), -sen(t))$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dx\, dy = 0 = \int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda} + \int_\mu \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\mu}$$

Por lo tanto

$$\int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda} = \int_{-\mu} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\mu} = \int_0^{2\pi} (-sen(t), cos(t) \cdot (-sen(t), cos(t))\, dt = 2\pi$$

4. Utilice el teorema de Stokes para evaluar

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde $\mathbf{F}(x,y,z) = 2y\cos(z)\mathbf{i} + e^x\,\text{sen}(z)\mathbf{j} + xe^y\mathbf{k}$ y S es la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 9, z \geq 0$ orientada hacia abajo.

Solución La frontera C es la circunferencia con parametrización

$$(3\cos(\theta), -3\,\text{sen}(\theta), 0)$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Utilizando Stokes, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-6\,\text{sen}(\theta)\mathbf{i} + 3\cos(\theta)e^{-3\,\text{sen}(\theta)}\mathbf{k}\right) \cdot (-3\,\text{sen}(\theta)\mathbf{i} - 3\cos(\theta)\mathbf{j})\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 18\,\text{sen}^2(\theta)\, d\theta \\ &= 18\pi. \end{aligned}$$

5. Sea S el elipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. Calcule

$$\iint_S \left(\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+(x,y,z)\right)\cdot \mathbf{N}\,dS$$

siendo $\mathbf{N}$ la normal unitaria a S apuntando hacia afuera.

Solución. Sea S_1 la esfera de radio $\varepsilon>0$ con $\varepsilon<|a|,|b|,|c|$. Luego,

$$\begin{aligned}\iint_S \left(\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+(x,y,z)\right)\cdot \mathbf{N}\,dS &= \iint_S \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{N}\,dS+\iint_S (x,y,z)\cdot \mathbf{N}\,dS\\ &= \iint_{S_1} \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{N}\,dS+3\iiint_V dV\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema de la divergencia, con V el volumen del sólido dado por la inecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.
Haciendo el cambio de variable $x=au$, $y=bv$, $z=cw$ tendremos que

$$\iiint_V dV = abc\iiint_{V_2} dV=\frac{4\pi}{3}abc$$

siendo V_2 la esfera de radio 1. Finalmente,

$$\iint_{S_1} \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{N}\,dS=\iint_{S_1}\frac{1}{\varepsilon^2}\,dS=4\pi$$

Por lo tanto, la integral pedida vale $4\pi(1+abc/3)$.

Tiempo: 120 minutos.