Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Pauta del Examen

Importante: Pueden haber formas de resolver los problemas que no estan indicadas en esta pauta, si la respuesta esta resuelta de manera correcta ocupando materia del curso eso también puede obtener máximo puntaje.

P1.- Sea γ el triangulo cuyos lados se forman al intersectar el plano $2x + y + 2z = 2$ con los planos XY, YZ y XZ, en el primer octante. Calcule la integral de linea de

$$F = \left(x + y^2, y + z^2, z + x^2\right)$$

sobre la curva γ orientada en sentido antihorario.

Solución:

Notamos que la superficie S dada por el gráfico de la función $z(x, y) = 1 - x - \frac{y}{2}$ con $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2 - 2x]$ satisface $\partial S = \gamma$.
Aplicamos el teorema de sotke para calcular la integral de línea del campo F sobre γ.

$$\phi(x, y) = \left(x, y, 1 - x - \frac{y}{2}\right) \to \phi_x \times \phi_y = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$
$$\text{Rot}(F) = -2\,(z, x, y) \to \text{Rot}(F) \circ \phi = -2\left(1 - x - \frac{y}{2}, x, y\right)$$
$$\text{Rot}(F) \circ \phi \cdot \phi_x \times \phi_y = x - y - 2.$$
$$\int_\gamma F = \iint_S \text{Rot}(F) \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x - y - 2\, dydx = -\frac{7}{3}.$$

P2.- Calcule el flujo hacia arriba del campo campo $F = \left(-2zx, z, z^2\right)$ a través de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4$ que está encima del plano $z = 2$.

Solución:

Sea D un disco en el espacio contenido en el plano $z = 2$ centrado en $(0, 0, 2)$ y de radio $\sqrt{2}$. Si S denota la porción del paraboloide y U el sólido encerrado por $S \cup D$, tenemos que por el teorema de la divergencia

$$\iint_S F \cdot dS + \iint_D F \cdot dS = \iiint_U \text{div}(F) dV,$$

es decir

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_U \text{div}(F) dV - \iint_D F \cdot dS.$$

Notamos que $\text{div}(F) = 0$ y calculamos con orientación exterior el flujo

$$\iint_D F \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -4r\cos(\theta) \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} r dr d\theta = -8\pi \int_0^{\sqrt{2}} r dr = -8\pi.$$

Por tanto el flujo de F sobre S es 8π.

P3.- Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $\text{div}(\nabla f) = 0$.

a) Muestre que $\int_{C_r} \nabla f \cdot N ds = 0$, donde C_r es el círculo centrado en el origen de radio r y N es su vector normal (apuntando hacia afuera).

b) Muestre que

$$\int_{C_r} \nabla f \cdot N ds = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt.$$

c) Usando lo anterior, demuestre que

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R\cos(t), R\,\text{sen}(t)) dt.$$

Ayuda: Considere $\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt dr$.

Solución:

a) Si D_r es el disco centrado en el origen y de radio r, usando el Teorema de la divergencia en el plano, tenemos que

$$\int_{C_r} \nabla f \cdot N ds = \int\int_{D_r} \text{div}(\nabla f) dA = 0.$$

b) Parametrizando C_r como $\gamma(t) = (r\cos(t), r\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 2\pi]$, es fácil ver $\|\gamma'(t)\| = r$ y que el vector normal apuntando hacia afuera está dado por $N = (\cos(t), \text{sen}(t))$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \nabla f \cdot N ds &= \int_0^{2\pi} \nabla f(r\cos(t), r\,\text{sen}(t)) \cdot (\cos(t), \text{sen}(t)) r dt \\ &= r \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt. \end{aligned}$$

c) Usando lo anterior, tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial r} dr dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(R\cos(t), R\,\text{sen}(t)) - f(0,0) dt \quad \text{(Teorema fundamental del cálculo)} \\ &= \int_0^{2\pi} f(R\cos(t), R\,\text{sen}(t)) dt - 2\pi f(0,0). \end{aligned}$$

P4.- Sea γ el cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcular $\int_\gamma y^2\, dx$, si γ se recorre en sentido positivo.

Solución:

Si R es la región encerrada por el cardioide, usando el Teorema de Green nos da

$$\int_\gamma y^2\, dx = \iint_R -2y\, dA\,.$$

Usando coordenadas polares para la región R y utilizando que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(k\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)d\theta = 0$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma y^2\,dx &= \iint_R -2y\,dA \\
&= -2\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} r\operatorname{sen}\theta\cdot r\,dr d\theta \\
&= -2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1+\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1+\operatorname{sen}\theta)^3\operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}\theta+3\operatorname{sen}^2\theta+3\operatorname{sen}^3\theta+\operatorname{sen}^4\theta)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(3\frac{1-\cos(2\theta)}{2}+3\operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)+\operatorname{sen}^2\theta(1-\cos^2\theta)\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta+\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(2+3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-\left(\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)^2\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(2+3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-\left(\frac{1-\cos(4\theta)}{8}\right)\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{15}{8}+3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\left[\frac{15}{8}\theta-\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= -\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{8}\cdot 2\pi = -\frac{5\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

P5.- Sea α una curva arcoparametrizada en $\mathbb{R}^3$. Considere una curva β parametrizada por:

$$\beta(s) = \frac{1}{k_\alpha(s)}T_\alpha(s) - \int_0^s N_\alpha(u)du,$$

donde $k_\alpha(s)$, $T_\alpha(s)$, $N_\alpha(s)$ son la curvatura, vector tangente y vector normal en $\alpha(s)$, respectivamente.

Demuestre que la torsión de α y β satisfacen:

$$\frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} = \left(\frac{1}{k_\alpha}\right)'.$$

Solución: Sabemos que la torsión de β está dada por:

$$\tau_\beta = \frac{(\beta'\times\beta'')\cdot\beta'''}{\|\beta'\times\beta''\|^2}.$$

Así, calculamos

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' T_\alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)} T'_\alpha(s) - N_\alpha(s) \\
&= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' T_\alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)} (k_\alpha(s) N_\alpha(s)) - N_\alpha(s) \\
&= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' T_\alpha(s). \\
\beta''(s) &= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'' T_\alpha(s) + \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' T'_\alpha(s) \\
&= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'' T_\alpha(s) + \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' k_\alpha(s) N_\alpha(s). \\
\beta'(s) \times \beta''(s) &= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'^2 k_\alpha(s) B_\alpha(s).
\end{aligned}$$

Notemos que como queremos calcular $(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''$, sólo necesitamos ver el coeficiente de β''' que acompaña a B_α. Así,

$$\beta'''(s) = A(s) T_\alpha(s) + B(s) N_\alpha(s) + \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' k_\alpha \tau_\alpha B_\alpha(s).$$

Entonces,

$$\tau_\beta = \frac{(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = \frac{\left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'^3 k_\alpha^2 \tau_\alpha}{\left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'^4 k_\alpha^2} = \frac{\tau_\alpha(s)}{\left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'}.$$

Entonces, $\frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} = \left(\frac{1}{k_\alpha}\right)'$.

P6.- *a)* Considere la curva $C = \{(x, 1/x) : x \geq 1\}$. Sea V el sólido obtenido al rotar el área bajo la curva C en torno al eje x. ¿Es el volumen de este sólido finito o infinito?. Sea S la superficie de revolución obtenida al rotar la curva C en torno al eje x. ¿Es el área de esta superficie finita o infinita?. Justifique su respuesta.

b) Sea C la curva en polares parametrizada por $r = e^{-\theta/2\pi}, \theta \geq 0$. Bosqueje la curva. ¿Es el largo de esta curva finito o infinito? Si es infinito demuéstrelo, si es finito calcule el largo de la curva.

Solución:

a) Considerando la curva parametrica dada, con parámetro x, el volumen de el sólido V es:

$$\text{Vol}(V) = \int_C \pi y^2 \, dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{R\to\infty} \pi \int_1^R \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1.$$

Por otro lado, el elemento de arco de la curva C es

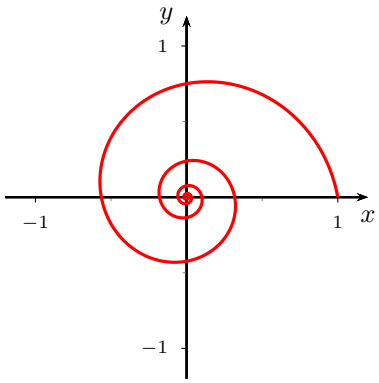
$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Y el area de la superficie de rotación S es:

$$\begin{aligned}
Area(S) &= \int_C 2\pi y \, ds = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx \\
&\geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_1^R \frac{1}{x} \, dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi \ln(R) - 0 = \infty
\end{aligned}$$

Donde la desigualdad se cumple ya que $\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$, en particular en todo el intervalo de integración. Por lo tanto el area de S es infinita.

b) La curva C es un espiral que comienza en $(1,0)$ y al aumentar el ángulo θ el radio disminuye hacia 0.



Para calcular el largo calculamos el elemento de arco que en coordenadas polares es

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \sqrt{e^{-2\theta/2\pi} + \frac{e^{-2\theta/2\pi}}{4\pi^2}}\, d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, e^{-\theta/2\pi}\, d\theta$$

Así el largo de curva es

$$L(C) = \int_C ds = \int_0^\infty \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, e^{-\theta/2\pi}\, d\theta = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, e^{-\theta/2\pi}\, d\theta$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, 2\pi e^{-R/2\pi} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, 2\pi e^0 = 2\pi\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}.$$