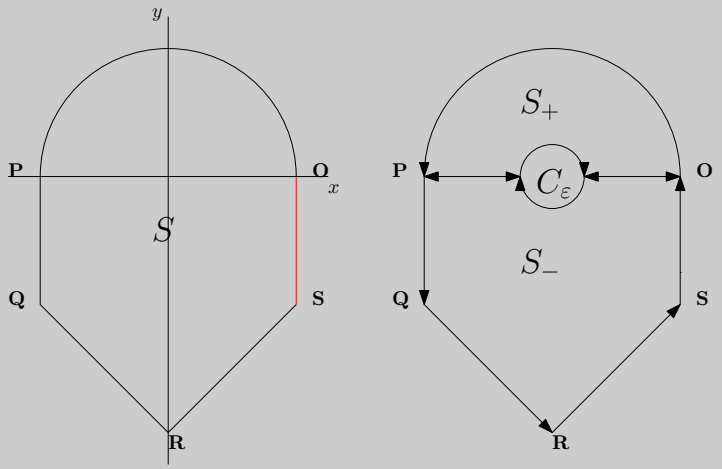
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE MAT1630
FACULTAD DE MATEMATICAS I3-1er. Semestre

Interrogación 3 de Cálculo III

1. Sea γ la curva formada por la unión de la parte superior de semicircunferencia de radio 1, centrada en el origen y con extremos en los puntos $\mathbf{O} = (1, 0)$ y $\mathbf{P} = (-1, 0)$, y los segmentos de recta $\overline{\mathbf{PQ}}$, $\overline{\mathbf{QR}}$ y $\overline{\mathbf{RS}}$ con $\mathbf{Q} = (-1, -1)$, $\mathbf{R} = (0, -2)$ y $\mathbf{S} = (1, -1)$. Sea α una parametrización de γ recorrida positivamente (i.e. en sentido contrario a los punteros del reloj).

   (a) Calcular $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\alpha$, con $\mathbf{F}(x, y) = (2(y^3 - 1) + y^2\,,\, 6xy^2 + 3x^2y^2)$

Solución:



Por la forma de la curva γ, es conveniente (o más bien recomendable) cerrar la curva uniendo esta con el segmento de recta $\overline{\mathbf{SO}}$ de modo tal que la curva cerrada resultante $\partial S^+ := \gamma + \overline{\mathbf{SO}}$ sea el borde de una región compacta S orientada positivamente a través de la parametrización $\mu := \alpha + \alpha_\star$, con $\alpha_\star$ una parametrización de $\overline{\mathbf{SO}}$ que parte en $\mathbf{S}$ (ver figura izquierda). En este modo es posible calcular la integral de $\mathbf{F}$ sobre γ como

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\alpha \;=\; \oint_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mu - \int_{\overline{\mathbf{SO}}} \mathbf{F} \cdot d\alpha_\star \qquad (1)$$

Dado que el campo $\mathbf{F}(x,y) := (M(x,y), N(x,y))$ es $C^1(S)$, podemos utilizar el teorema de Green para calcular la integral sobre ∂S^+ en (1), obteniendo:

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mu = \iint_S \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\, dxdy = 6 \iint_S xy^2\, dxdy - 2 \iint_S y\, dxdy.$$

Observando que la funcion $g_1(x,y) = xy^2$ es impar en la region S, se deduce, por simetría de la región, que $\iint_S xy^2\, dxdy = 0$. Por otro lado, como la función $g_2(x,y) = y$ es par en S, se tiene que $\iint_S y\, dxdy = 2 \iint_{S^+} y\, dxdy$, con $S^+ := \{(x,y) \in S : x \geq 0\} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ -2 + x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. De aquí,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mu &= -4 \iint_{S^+} y\, dxdy \\
&= -4 \int_0^1 \int_{-2+x}^{\sqrt{1-x^2}} y\, dydx \\
&= -2 \int_0^1 1 - x^2 - (-2+x)^2\, dx \\
&= -2 \int_0^1 -2x^2 + 4x - 3\, dx \\
&= \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para calcular la segunda integral al lado derecho de (1), podemos considerar como parametrización $\alpha_\star(t) = \mathbf{O}t + \mathbf{S} = (1,t)$, con $t \in [-1,1]$. Luego

$$\int_{\overline{\mathbf{SO}}} \mathbf{F} \cdot d\alpha_\star = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\alpha_\star(t)) \cdot \alpha_\star'(t) dt = \int_{-1}^{1} 9t^2\, dt = 3.$$

De aquí, el valor de la integral pedida es:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\alpha &= \int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mu - \int_{\overline{\mathbf{SO}}} \mathbf{F} \cdot d\alpha_\star \\
&= \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Considere $\gamma_\star$ como curva cerrada que se obtiene de la unión de la curva γ con el segmento de recta **SO** y ρ una parametrización de esta que la recorre positivamente (i.e. en sentido contrario a los punteros del reloj).
Considere $\mathbf{G}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\,\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ y calcule $\displaystyle\oint_{\gamma_\star} \mathbf{G}\cdot d\alpha$.

Solución: Sea S el dominio compacto para el cual $\gamma_\star$ es su frontera. Notar que este campo no es C^1 en S dado que posee una singularidad en $(0,0)$, luego no podemos utilizar diréctamente el teorema de Green. Por otro lado, es fácil ver que este campo es C^1 en la región $S\backslash\{(0,0)\}$ y que además es conservativo, en efecto se tiene (para $(x,y)\neq(0,0)$ y $\mathbf{G}(x,y) = (G_1(x,y)\,,\,G_2(x,y))$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)\\ &= \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Consideremos C_ε como la circunferencia centrada en el origen de radio ε, con ε suficientemente pequenño en modo tal que $C_\varepsilon \subset S$ (basta considerar $\varepsilon < 1$) y consideremos los segmentos de recta que unen a los puntos $(-1,0),(-\varepsilon,0)$ y $(\varepsilon,0),(1,0)$ respectivamente en modo tal de subdividir la región S en tres regiones denotadas por S_+, S_- y C_ϵ (ver figura izquierda). Consideremos como α_+, α_- y α_ε las parametrizaciones que recorren positivamente los bordes de S_+ (denotado por ∂S_+), S_- (denotado por ∂S_-) y C_ϵ (denotado por ∂C_ε) respectivamente. Utilizando las propiedades de las integrales de linea, se tiene

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_\star} \mathbf{G}\cdot d\rho &= \oint_{\partial S_+} \mathbf{G}\cdot d\alpha_+ + \oint_{\partial S_-} \mathbf{G}\cdot d\alpha_- + \oint_{\partial C_\epsilon} \mathbf{G}\cdot d\alpha_\epsilon\\ &= \oint_{\partial C_\epsilon} \mathbf{G}\cdot d\alpha_\epsilon\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se obtiene utilizando el hecho de que $\mathbf{G}$ es conservativo en S_+ y S_-. Finalmente, para calcular la integral de linea sobre ∂C_ε, podemos considerar $\alpha_\varepsilon(t) = (\varepsilon\cos(t), \varepsilon\sin(t))$ con $t\in[0,2\pi]$. Luego, $\alpha'_\varepsilon(t) = (-\varepsilon\sin(t), \varepsilon\cos(t))$

y

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_\star} \mathbf{G}\cdot d\rho &= \oint_{\partial C_\epsilon} \mathbf{G}\cdot d\alpha_\epsilon \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\alpha_\varepsilon)\cdot \alpha_\varepsilon'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-\varepsilon\sin(t))(-\varepsilon\sin(t))}{\varepsilon^2} + \frac{(\varepsilon\cos(t))(\varepsilon\cos(t))}{\varepsilon^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.\end{aligned}$$

2. Sea C cualquier curva que une el punto $(0,0,0)$ con $(1,1,1)$.Calcular

$$\int_C y^2z^2dx + 2xyz^2dy + 2xy^2zdz.$$

Solución: El campo $F(x,y,z) = (y^2z^2, 2xyz^2, 2xy^2z)$ está bien definido y es de clase C^1 sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Las componentes de su rotor **rot** F son

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^2z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(2xyz^2\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2z^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^2z\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(2xyz^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2z^2\right) &= 0.\end{aligned}$$

En consecuencia, existe una función f tal que $F = \nabla f$. Para encontrar f, planteamos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2z^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xyz^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xy^2z. \quad (4)$$

De (2) deducimos que f tiene la forma $f(x,y,z) = xy^2z^2 + g(y,z)$. Luego, reemplazando en (3) y (4) se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) + 2xyz^2 = 2xyz^2, \ \frac{\partial g}{\partial z}(y,z) + 2xy^2z = 2xy^2z,$$

de donde se deduce que g es constante y podemos tomarla nula. Por lo tanto, $f(x,y,z) = xy^2z^2$ satisface $F = \nabla f$ y la integral de línea sobre cualquier curva C vale $f(1,1,1) - f(0,0,0) = 1$.

3. Determinar si el campo $F(x,y,z) = (2xyz + \sin x, \ x^2z, \ x^2y)$ es un campo conservativo y en caso que lo sea encontrar su función potencial.

Solución: Para probar que el campo F es conservativo, basta con mostrar que el campo $rot\ F = 0$. También se puede probar que el campo es conservativo, encontrando directamente su función potencial.

Acá nosotros buscaremos su función potencial, es decir, buscaremos una función f tal que

$$F = \nabla f.$$

De esta última igualdad, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz + \sin x$$

Al integrar esta igualdad con respecto a x, tenemos

$$f(x,y,z) = x^2yz - \cos x + \varphi(y,z),$$

donde φ es una función que depende exclusivamente de las variables y y z. Ahora determinaremos la función φ. Para esto, derivamos parcialmente f con respecto a y e igualamos a la segunda componente de F, es decir tenemos asíla siguiente igualdad

$$x^2z + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = x^2z.$$

Por lo tanto $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = 0$, es decir φ no depende de la variable y, es decir

$$f(x,y,z) = x^2yz - \cos x + \psi(z).$$

Para determinar la función ψ, derivamos f parcialmente con respecto a z e igualamos a la tercera componente de F, esto nos da la siguiente igualdad

$$x^2y + \frac{\partial \psi}{\partial z}(z) = x^2y$$

por lo que se tiene que la función ψ no depende de z, por lo que debe ser una constante. Finalmente, tenemos que la función potencial f que buscamos es

$$f(x, y, z) = x^2yz - \cos x + C$$

4. Usar el Teorema de Stokes para calcular la integral de línea de un campo $F(x, y, z) = (x^2y, xy^2, z^3)$, a lo largo de una curva C obtenida como intersección del cilindro $x^2+y^2 = 1$ y el plano $z = x + 1$ en $\mathbb{R}^3$, recorrida en sentido contrario al movimiento de los punteros de un reloj (analógico).

Solución: Para usar el Teorema de Stokes en este cálculo, comenzamos por observar que tanto la curva C como el campo son de clase C^1. Enseguida, el cálculo del rotor de F da como resultado

$$\mathbf{rot}\, F = (0, 0, y^2 - x^2).$$

Sea D_0 el disco unitario centrado en 0, en el plano xy con frontera $\partial D_0 = C_0$. Llamamos $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ $(t \in [0, 2\pi])$, una parametrización de C_0. Y definimos la función $r(x, y) = (x, y, x + 1)$ de clase C^2 que va de $D_0 = \{(\rho, t) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ en el plano xy al dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ del cual C es su frontera. Entonces, $\mathbf{rot}\, F(r(x, y)) = (0, 0, y^2-x^2)$. Por otra parte, la normal a D corresponde al producto vectorial (o "cruz")

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = (-1, 0, 1),\ (x, y) \in D_0$$

Luego, el producto escalar de $\mathbf{rot}\, F(r(x, y))$ con $\dfrac{\partial r}{\partial x}(x, y) \wedge \dfrac{\partial r}{\partial y}(x, y)$ es simplemente $y^2 - x^2$ y la integral sobre la superficie $D = r(D_0)$, es

$$\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)dt = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos(2t)dt = 0.$$

Por el Teorma de Stokes, la integral de superficie anterior es igual a la integral de F a lo largo de la curva C. Luego ésta es también nula.