MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 2
Primer Semestre 2019

1. Calcule el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F} = (P, Q)$ donde

$$P(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + x^3\,, \qquad Q(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y^4\,,$$

sobre una partícula de masa m que se desplaza en el semiplano superior en la curva que comienza con el segmento rectilíneo desde $(-1,1)$ hasta $(-2,0)$, luego por la curva $y = \sqrt{4-x^2}$ hasta el punto $(2,0)$ y luego por un segmento rectilíneo hasta el punto $(2,2)$.

Solución.

Llamemos Γ al camino descrito que une los puntos $P_1 : (-1,1)$,$P_2 : (-2,0)$, $P_3 : (2,0)$, $P_4 : (2,2)$. El trabajo pedido es la suma de cada trabajo en cada tramo del camino $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3}\right) \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\,.$$

Afirmamos que el campo es conservativo, es decir, $\mathbf{F} = \nabla V := (V_x, V_y)$ con $V(x,y)$ un potencial suave y luego la integral es la evaluación del potencial en los extremos de la curva puesto que

Argumenta **1.0 ptos**

el único punto singular del cammpo es el (0,0) , y la curva no pasa por ese punto. singularidad **1.0 ptos**

Para obtener V se plantea las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$V_x = P(x,y) \Rightarrow V(x,y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{1}{4}x^4 + C(y)$$ Calcula V **1.0 ptos**

Para determinar $C(y)$ derivamos con respecto a y

$$V_y = -\frac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y^4 \Rightarrow C(y) = \frac{1}{5}y^5$$ Calcula $C(y)$ **1.0 ptos**

De esta manera el potencial es

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}y^5\,.$$ Explicita V **0.5 ptos**

Por lo tanto el trabajo entre P_1 y P_2 ; entre P_2 y P_3 , P_3 y P_4 corresponde a

$$\int_{\Gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_2) - V(P_1); \quad \int_{\Gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_3) - V(P_2); \quad \int_{\Gamma_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_4) - V(P_3);\,.$$

(alternativo: Cada integral **0.5 ptos** solo en caso que no plantee la integral de abajo))

Es decir, sumando los trabajos en cada camino se obtiene que el trabajo total es:

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_4) - V(P_1) = 4 + \frac{32}{5} - \frac{9}{20} - \ln 2$$ Resultado **1.5 ptos**

2. Considere el campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde C es

   a) la circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{1}{2}$ con orientación positiva (contra manecillas del reloj).

   b) el hexágono regular centrado en el origen orientado en forma positiva con un vértice en $(1,0)$.

Solución. a) Una parametrización de la curva C: $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$. Parametriza C **1.0 ptos**

Por definición de integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt$. Define integral de línea **0.5 ptos**

Calculando:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (8\cos t\sin t, 4\sin^2 t - 4\cos^2 t)\,, \qquad \mathbf{r}'(t) = (-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t)$$

Por lo tanto $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot r'(t) = -2\cos t$. Calcula $F(r(t))\cdot r'(t)$ **0.5 ptos**

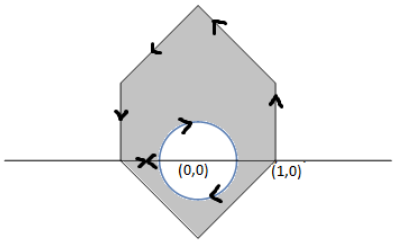
Así que obtiene que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} -2\cos t = 0$. Calcula integral **1.0 ptos**

Solución. b) Si $P(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ y $Q(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ notamos que

$$P_y = \frac{2x^3 - 6xy^2}{x^2+y^2} = Q_x\,.$$ Verifica la propiedad **0.5 ptos**

No podemos usar el teorema de Green en $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ya que $\mathbf{F}$ no tiene derivadas parciales continuas en la región que encierra C ($\mathbf{F}$ no esta definida en $(0,0)$.) Describe la singularidad **0.5 ptos**

Luego aplicamos el teorema de Green en la región D comprendida entre C y C_1, siendo esta última la circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{1}{2}$, ya trabajada en el item anterior. Construye camino adecuado(para usar Green) **0.5 ptos**



Por el teorema de Green aplicado a la región D, con el camino orientado como muestra la figura (la singularidad (0,0) no está en D) se obtiene que

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_D (Q_x - P_y)dA = 0\,.$$ Obtiene igualdad por Green **1.0 ptos**

Se concluye, por parte a) que $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$. Explicita resultado **0.5 ptos**

Solución 2. (Alternativa.) Se puede calcular un potencial $V(x,y)$ tal que $\mathbf{F}(x,y) = \nabla V$,

$$V(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\,. \qquad \boxed{\text{Encuentra } V \textbf{ 2.0 ptos}}$$

Luego como el camino no contiene a la singularidad (0,0) y el campo es C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la integral de línea es $\boxed{\text{Explicita resultado } \textbf{2.0 ptos}}$

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}(\text{Punto final}) - \mathbf{F}(\text{Punto inicial}) \qquad \boxed{\text{Plantea la igualdad (TFC) } \textbf{1.0 ptos}}$$

Como ambas curvas C son cerradas, las integrales son cero. $\boxed{\text{Aplica } \textbf{1.0 ptos}}$

3. Considere C una curva suave parametrizada por longitud de arco $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $x(t), y(t), z(t)$ funciones definidas en $[a, b]$ con dos derivadas continuas, $a < b$. Calcule

$$a) \int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} \qquad\qquad b) \int_C \mathbf{r} \times \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}$$

Solución. a) La curva tiene tangente en todo punto por tener derivada (es suave) Aplicando la definición de integral de línea se obtiene entonces que

$$\int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (x''(t), y''(t), z''(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt$$ Desarrolla integral de línea **0.5 ptos**

Luego,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (x''(t)\, x'(t) + y(t)''\, y'(t) + z(t)''\, z'(t))\, dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x'(t))^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y'(t))^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z'(t))^2 \right) dt \end{aligned}$$ Simplifica derivada **0.5 ptos**

Luego, por las propiedades de la integral y de la derivada $\dfrac{d}{dt}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}'(t)\|^2\, dt \end{aligned}$$ Explicita igualdad **1.0 ptos**

Como $\mathbf{r}$ es una parametrización por longitud de arco, $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, es decir, $\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = 1$ para todo t. **0.5 ptos**

Luego, $\dfrac{d}{dt}\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = 0$ para todo t. De esta manera se obtiene que $\int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} = 0$. Concluye **0.5 ptos**

Solución. b) Por definición,

$$\int_C (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} = \int_C (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'\, dt$$ Concluye **1.0 ptos**

Pero, el vector $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ es siempre perpendicular a cada una de sus componentes, es decir, $(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' = 0$ para todo t. Argumenta integrando es cero **1.5 ptos**

Luego, $\int_C (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} = 0$ Concluye **0.5 ptos**.

4. Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, cerrada y simple en el plano, $\mathcal{R}$ la región acotada limitada por ella.

   a) Utilizando el Teorema de Green demuestre que el área de $\mathcal{R}$ está dada por

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx.$$

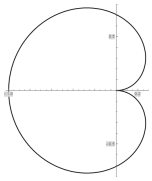
   b) Calcule el área de la región acotada limitada por la curva dada en coordenadas polares : $r = \cos(\theta/2)$, donde $\pi \leq \theta \leq 3\pi$.

Solución. a) Elijamos el campo $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$. Construye V **1.0 ptos**
Este campo $\mathbf{F} = (P,Q)$ es derivable con continuidad (C^1) en todo $\mathbb{R}^2$. Entonces se puede aplicar el Teorema de Green, se obtiene que Verifica hipótesis **1.0 ptos**

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx &= \int\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) \quad \text{Aplica Green } \mathbf{0.5\ ptos}\\ &= 2\int\int_{\mathcal{R}} dxdy\\ &= = 2\text{Area}\,(\mathcal{R})\,. \quad \text{Explicita respuesta } \mathbf{0.5\ ptos}\end{aligned}$$

Solución. b) Una parametrización en coordenadas cartesianas es

$x(\theta) = r\cos(\theta) = \cos(\theta/2)\,\cos(\theta)\,,\qquad y(\theta) = r\text{sin}(\theta) = \cos(\theta/2)\sin(\theta)$ Parametriza curva **1.0 ptos**



Dibujo **0.5 ptos**
Por parte a):

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} (x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta))\,d\theta \quad \text{Desarrollo } \mathbf{0.5\ ptos}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} (\cos(\theta/2)\,\cos(\theta)y'(\theta) - \cos(\theta/2)\sin(\theta)x'(\theta))d\theta \quad \text{Desarrollo } \mathbf{0.5\ ptos}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} (\cos^2\theta\cos^2(\theta/2) + \text{sen}^2\,\theta\cos^2(\theta/2)d\theta \quad \text{Desarrollo } \mathbf{0.5\ ptos}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} \cos^2(\theta/2)\,d\theta\\ &= \frac{\pi}{2} \quad \text{Explicita resultado } \mathbf{0.5\ ptos}\end{aligned}$$