

Curvas Regulares

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

4 de enero de 2023

Curvas Regulares

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada diferenciable. Para cada $t \in I$ en donde $\alpha'(t) \neq 0$ existe una recta bien definida, que pasa por el punto $\alpha(t)$ y contiene al vector $\alpha'(t)$. Esta recta se denomina *recta tangente* a α en t. Para el estudio de la geometría de una curva es esencial la existencia de tal recta tangente en cada punto. Por esta razón, llamaremos a cualquier punto t donde $\alpha'(t) = 0$ un *punto singular* de α y centramos nuestra atención sobre curvas sin puntos singulares.

Definición.

Una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se denomina **regular** si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

De ahora en adelante consideraremos únicamente curvas parametrizadas diferenciables regulares (y, por conveniencia, suprimeros frecuentemente el término diferenciable).

Curvas Regulares

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t_o \in I$. La recta tangente a la curva correspondiente en $\alpha(t_0)$ es a recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\alpha(t_0)$ y tiene por vector parelelo a $\alpha'(t_0)$. Entonces, si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, tenemos que la recta tangente a la curva en $\alpha(t_0)$ es

$$\begin{cases} x &= x(t_0) + x'(t_0)s \\ y &= y(t_0) + y'(t_0)s \\ z &= z(t_0) + z'(t_0)s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos que también podemos decir que tal recta es la imagen de la curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(s) =$ $(x(t_0) + x'(t_0)s, y(t_0) + y'(t_0)s, z(t_0) + z'(t_0)s) = \alpha(t_0) + \alpha'(t_0)s$.

EJEMPLO 1 Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice de ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = t$$

en el punto $(0, 1, \pi/2)$.

Curvas Regulares

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 2 Considere la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (t, t^2, 2t^3)$. Determine si existen puntos de la curva que atraviesen al plano yz perpendicularmente.

EJEMPLO 3 Determine el punto del vector tangente a la curva

$$\alpha(t) = \left(\arctan(t), -\frac{1}{1+t}, \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right) \,, \quad t > -1 \,,$$

que tiene la dirección de la recta

$$L: \qquad x+1 = y-1 = z-2 \,.$$

Curvas Regulares

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema.

Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ curvas diferenciables y $f : J \to I$ una función real diferenciable. Entonces,

1. $\frac{d}{dt}(\alpha(t) + \beta(t)) = \alpha'(t) + \beta'(t)$
2. $\frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \beta(t)) = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t)$ (Regla de Leibniz)
3. $\frac{d}{dt}(\alpha(t) \times \beta(t)) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$
4. $\frac{d}{dt}(\alpha(f(t))) = \alpha'(f(t))f'(t)$ (Regla de la cadena)

EJEMPLO 4 Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Demostrar que $\|\alpha(t)\|$ es constante no nula si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.