

Curvatura y Torsión caso general

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

5 de enero de 2023

Curvatura y Torsión caso general

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada que no está parametrizada por longitud de arco.
La idea es encontrar fórmulas que nos permitan hallar la curvatura y torsión para curvas que no satisfacen $\|\alpha'(t)\| \neq 1$.

Proposición.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular (no necesariamente parametrizada por longitud de arco). Entonces, los vectores tangente, normal y binormal unitarios son:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \qquad N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \qquad B(t) = T(t) \times N(t)\,.$$

Observación. Otra forma de obtener el vector binormal es usar la identidad

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

Curvatura y Torsión caso general

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular (no necesariamente parametrizada por longitud de arco). Entonces, la curvatura y torsión de la curva son:

1. $\kappa(t) = \dfrac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$
2. $\tau(t) = \dfrac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$

Curvatura y Torsión caso general

EJEMPLO 1 Calcule la curvatura de una circunferencia de radio r.

EJEMPLO 2 Calcule la curvatura, la torsión y los vectores tangente, normal y binormal de la hélice

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)\ .$$

EJEMPLO 3 Considere la curva $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$

$$\gamma(\theta) = (\sin(2\theta), 1 - \cos(2\theta), 2\cos(\theta))$$

1. Calcule el vector tangente unitario en cualquier valor de θ.
2. Calcule la ecuación del plano normal en $\theta = \pi$.
3. Encuentre la curvatura de γ para cualquier valor de θ.