Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2017

Interrogación 3.

MAT 1630. Cálculo 3.

1. *a*) Sean f, g y h tres funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Calcular el rotacional del campo vectorial $\vec{F} = (f(x), g(y), h(z))$.
   b) Sean f y g dos funciones de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Calcule

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g).$$

Solución.
a) Calculamos el rotor de $F = (f(x), g(y), h(z))$:

$$\operatorname{rot}(F) = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y) = (0, 0, 0).$$

b) Notar que

$$\operatorname{rot}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g + f\operatorname{rot}(\nabla g).$$

Como el rotor de cualquier campo gradiente es cero, tenemos que

$$\nabla f \times \nabla g = \operatorname{rot}(f\nabla g).$$

Tomamos divergencia de esta igualdad y nos queda

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(f\nabla g)) = 0,$$

dado que la divergencia de un campo rotacional es siempre cero.
□

2. Sea S la superficie definida por la ecuación $z = f(x, y)$, donde $x^2 + y^2 < R^2$. Suponga que las derivadas parciales de f son continuas y satisfacen $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leq 1$ y $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 1$. Demuestre que el área de S es menor o igual a $\sqrt{3}R^2\pi$.

Solución. La superficie $z = f(x, y)$ se parametriza por $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y

$$\begin{aligned}\phi_x &= (1, 0, f_x)\\ \phi_y &= (0, 1, f_y)\\ \phi_x \times \phi_y &= (-f_x, -f_y, 1)\\ ||\phi_x \times \phi_y|| &= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.\end{aligned}$$

Por tanto, el área de la superficie corresponde a

$$A(S) = \iint_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy.$$

Como $|f_x|, |f_y| \leq 1$, tenemos que $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \leq \sqrt{3}$. Luego,

$$A(S) \leq \iint_U \sqrt{3} dxdy = \sqrt{3} A(U) = \sqrt{3}\pi R^2.$$

□

3. Sea $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

   a) Encuentre una parametrización de S.
   b) Calcular

   $$\int_S \vec{F},$$

   donde $\vec{F} = (x, y, x)$ y S esta orientada según los vectores normales apuntando hacia el interior de S.

Solución.
a) Una parametrización es $\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$, $u^2 + v^2 < 2$.
b) Usando la parametrización anterior tenemos que

$$\vec{N}(u, v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right)$$

es el campo de vectores que nos da la orientación pedida. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} &= \int\int_{u^2+v^2<2} \vec{F}(u,v,\sqrt{u^2+v^2}) \cdot \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right) dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<2} (u,v,u) \cdot \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right) dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<2} (-\sqrt{u^2+v^2}+u) dA \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (-\sqrt{r^2}+r\cos\theta) r d\theta\, dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (-^2+r^2\cos\theta) r d\theta\, dr = -\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

□

4. Sea $\vec{F} = (x^3/3, y^3/3+2, x-y)$ y S la superficie cuya parametrización es

$$\varphi(u,v) = (2uv, u^2-v^2, u^2+v^2), \quad u^2+v^2 \leq 1$$

y la orientación de S esta dada según el vector $\varphi_v \times \varphi_u$.

a) Calcular $rot(\vec{F})$ y $div(\vec{F})$.
b) Calcular

$$\int_S div(\vec{F}).$$

c) Calcular

$$\int_S rot(\vec{F}).$$

Solución.
a) Unos cálculos muestran que $rot(\vec{F}) = (-1,-1,0)$ y $div(\vec{F}) = x^2+y^2$.
b) Unos cálculos muestran que

$$\varphi_v \times \varphi_u = (-8uv, -4u^2+4v^2, 4u^2+4v^2)$$

y $\|\varphi_v \times \varphi_u\| = \sqrt{32}(u^2+v^2)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_S div(\vec{F}) &= \int\int_{u^2+v^2<1} div(\vec{F})(\varphi(u,v))\|\varphi_v \times \varphi_u\|\, dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<1} div(\vec{F})(\varphi(u,v))\|\varphi_v \times \varphi_u\|\, dA \\
&= \sqrt{32}\int\int_{u^2+v^2<1} (u^2+v^2)^3\, dA \\
&= \sqrt{32}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^7\, d\theta\, dr = \pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$c)$ Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_S rot(\vec{F}) &= \int\int_{u^2+v^2<1} rot(\vec{F})(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_v \times \varphi_u)\, dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<1} (-1,-1,0)\cdot(-8uv, -4u^2+4v^2, 4u^2+4v^2)\, dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<1} (8uv + 4u^2 - 4v^2)\, dA \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} 4r^3(\sin(2\theta)+\cos(2\theta))\, d\theta\, dr \\
&= \left(\int_0^1 4r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi}(\sin(2\theta)+\cos(2\theta))\, d\theta\right) = 0
\end{aligned}$$

□