Pregunta 3.-

V1 $\nabla\cdot(fF\times G) = f\,G\cdot(\nabla\times F) - f\,F\cdot(\nabla\times G) + \nabla f\cdot(F\times G)$

V2 $\nabla\cdot(fF\times\nabla g) = f\,G\cdot(\nabla\times F) + \nabla f\cdot(F\times\nabla g)$

V3 $\nabla\times(\nabla\times F) = \nabla(\nabla\cdot F) - \nabla^2 F$

V4 $(\nabla\times F)\cdot(\nabla\times fF) = f\|\nabla\times F\|^2 + F\cdot((\nabla\times F)\times\nabla f)$

Para V1 y V2 pueden calcular

$$\nabla\cdot(fH) = \nabla f\cdot H + f\nabla\cdot H$$

y reemplazar $H = F\times G$ en V1
$H = F\times\nabla g$ en V2

Para V3 pueden desarrollar los dos lados y llegar a la igualdad

Para V4, conviene calcular

$$\nabla\times(fF) = f(\nabla\times F) + \nabla f\times F$$

y hacer producto escalar con $\nabla\times F$.

Entonces:

V1: 4 puntos por calcular (1)

$$\nabla\cdot(fH) = \nabla\cdot(fH_1, fH_2, fH_3)$$

$$= (fH_1)_x + (fH_2)_y + (fH_3)_z$$

$$= f_x H_1 + f H_{1x} + f_y H_2 + f H_{2y} + f_z H_3 + f H_{3z}$$

$$= (f_x, f_y, f_z)\cdot(H_1, H_2, H_3) + f(H_{1x} + H_{2y} + H_{3z})$$

$$= \nabla f\cdot H + f\nabla\cdot H$$

Reemplar $H = F\times G$ da

$$\nabla\cdot(f(F\times G)) = \nabla f\cdot(F\times G) + f\,\nabla\cdot(F\times G)$$

4 puntos por calcular $\nabla\cdot(F\times G) = G\cdot(\nabla\times F) - F\cdot(\nabla\times G)$ (2)

$$F\times G = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix}$$

$$= (F_2G_3 - G_2F_3,\ F_3G_1 - F_1G_3,\ F_1G_2 - G_1F_2)$$

$$\nabla\cdot(F\times G) = (F_2G_3 - G_2F_3)_x + (F_3G_1 - F_1G_3)_y + (F_1G_2 - G_1F_2)_z$$

$$= F_{2x}G_3 + F_2G_{3x} - G_{2x}F_3 - G_2F_{3x}$$
$$+ F_{3y}G_1 + F_3G_{1y} - F_{1y}G_3 - F_1G_{3y}$$
$$+ F_{1z}G_2 + F_1G_{2z} - G_{1z}F_2 - G_1F_{2z}$$

$$= G_1(F_{3y} - F_{2z}) + G_2(F_{1z} - F_{3x}) + G_3(F_{2x} - F_{1y})$$
$$- (F_1(G_{3y} - G_{2z}) + F_2(G_{1z} - G_{3x}) + F_3(G_{2x} - G_{1y}))$$

$$= G\cdot(\nabla\times F) - F\cdot(\nabla\times G)$$

luego se tiene el resultado

2 puntos por reemplazar. (3)

Para $\sqrt{2}$: distribuir los puntos como

Pn (1) 3 p
(2) 4 p
dar 2 p por usar $\nabla\times(\nabla g) = \vec{0}$
(3) 1 p

Para v3.-

4 puntos por desarrollo de cada lado (total 8p)

2 puntos por la igualdad

Para v4

5 puntos por calcular

$\nabla \times (f F) = f(\nabla \times F) + \nabla f \times F$

3 puntos por multiplicar punto por $\nabla \times F$

2 puntos por concluir la igualdad.

Pregunta 6.-

En todas las regiones el campo vectorial es de la forma

$a(x-x_0)=r\cos t \Leftarrow$
$b(y-y_0)=r\operatorname{sen} t$

$$\left(\frac{-(y-y_0)}{a^2(x-x_0)^2+b^2(y-y_0)^2} \,,\, \frac{x-x_0}{a^2(x-x_0)^2+b^2(y-y_0)^2}\right)$$

$$+\left(\frac{\alpha(x-x_1)}{c^2(x-x_1)^2+d^2(y-y_1)^2} \,,\, \frac{\beta(y-y_1)}{c^2(x-x_0)^2+d^2(y-y_1)^2}\right) \quad (c^2\beta=d^2\alpha)$$

$$= (P_1, Q_2) + (P_2, Q_2)$$

(P_1, Q_1) singular en (x_0, y_0)

(P_2, Q_2) " " (x_1, y_1)

$Q_{1x} - P_{1y} = 0 \quad \forall (x,y) \neq (x_0, y_0)$

$Q_{2x} - P_{2y} = 0 \quad \forall (x,y) \neq (x_1, y_1)$

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_\gamma (P_1, Q_1)\cdot d\vec{r} + \int_\gamma (P_2, Q_2)\cdot d\vec{r}$$

$$= I_1 + I_2$$

a) Para I_1: Aplicar T. Green



$$\oint_{\gamma\cup(-C_1)} (P_2, Q_2)\cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_{1x} - P_{1y})\, dA = 0$$

luego $I_1 = \oint_{C_1} (P_1, Q_1)\cdot d\vec{r}$ = valor

lo mismo para I_2

$$I_2 = \oint_{C_2} (P_2, Q_2)\cdot d\vec{r} = 0$$

Conviene C_1, C_2 apropiados según el campo

b) $(x_0, y_0) \notin \gamma \cup D$

luego sólo

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_2} (P_2, Q_2) \cdot d\vec{r} = 0$$

Observación:

El problema tipo similar a este fue hecho en clase para todas las secciones y es análogo al ejemplo 5 pag 1088-1089 del libro.

Puntaje:

- Si aplican teorema de Green a pesar de la singularidad — 0 punto
- Por separar $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F_1} \cdot dr + \int_{\gamma} \vec{F_2} \cdot d\vec{r}$ (2p)
- Por calcular $Q_{ix} - P_{iy} = 0 \quad i = 1, 2$ (excepto en la singularidad) (1.5p)
- Por introducir las regiones





(2p)

- Por aplicar T Green para concluir

$$\oint_{\gamma} \vec{F_i} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_i} \vec{F_i} \cdot d\vec{r}$$

(1.5p)

— Los C_i conviene elegirlos

C_1 $\quad a^2(x-x_0)^2 + b^2(y-y_0)^2 = \rho^2$

$x - x_0 = \frac{\rho}{a}\cos t$

$y - y_0 = \frac{\rho}{b}\operatorname{sen} t$

$t \in (0, 2\pi)$

C_2 $\quad c^2(x+x_1)^2 + d^2(y+y_1)^2 = \rho^2$

$x + x_1 = \frac{\rho}{c}\cos t$

$y + y_1 = \frac{\rho}{d}\operatorname{sen} t$

$t \in (0, 2\pi)$

(2p)

Por las respuestas (1p)

Pregunta 8.-

Sol 1 El campo vectorial está definido en todo el espacio y es C^∞, luego basta calcular el rotor para ver que es conservativo:

Puntaje: 5 puntos por demostrar que $\vec{F}$ es conservativo.

Bajar 2p si no menciona que se cumplen las hipótesis del Teorema que usan

5 puntos por calcular un potencial (ver abajo)

Sol 2.- Pueden resolver directamente

$$f_x = P(x,y,z)$$
$$f_y = Q(x,y,z)$$
$$f_z = R(x,y,z)$$

sin necesidad de usar el Teorema.

Por ejemplo en la V1: Buscar f:

(1) $f_x = e^x \operatorname{sen}(yz) + 2$

(2) $f_y = ze^x \cos(yz) + 5y^2$

(3) $f_z = ye^x \cos(yz) + 2z$

de (1) $f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen}(yz) + 2x + g(y,z)$

Usando (2)

$$ze^x \cos(yz) + 5y^2 = ze^x \cos(yz) + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)$$

luego $\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 5y^2$

$g(y,z) = \frac{5}{3}y^3 + h(z)$

luego $f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen}(yz) + 2x + \frac{5}{3}y^3 + h(z)$

Usando (3)

$y e^x \cos(yz) + 2z = y e^x \cos(yz) + h'(z)$

$\Rightarrow \quad h'(z) = 2z$

$h(z) = z^2 + C$

Así un potencial es

$f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen}(yz) + 2x + \frac{5}{3}y^2 + z^2 + 1$

(no es necesario agregar la constante).

Puntaje: (Duplico el de la sol, 2ª parte)

2p. Pn plantear las ecs (1), (2), (3)

2p. Pn integrar c/r a una de las variables, digamos x

2p. Pn usar la ec (2) y calcular $g(y,z)$

2p. Pn usar la ec (3)

2p. Pn escribir $f(x,y,z) = \cdots$