Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2018

**MAT1630 – Cálculo III**

# Solución Interrogación N° 1

1. Parametrice por longitud de arco $\lambda(t) = (e^{2t}cos(2t), e^{2t}sen(2t), 5), \quad t \geq 0$. Encuentre su curvatura en $(1, 0, 5)$.

   **Solución.** Tenemos que

   $$\lambda'(t) = (2e^{2t}\cos(2t) - 2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t), 2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t) + 2e^{2t}\cos(2t), 0) \Longrightarrow \|\lambda'(t)\|^2 = 8e^{2t}$$

   La función longitud de arco viene dada por

   $$s(t) = \int_0^t \|\lambda'(u)\|\, du = 2\sqrt{2}\int_0^t e^{2u}\, du = \sqrt{2}(e^{2t} - 1)\,.$$

   La inversa de la función longitud de arco es

   $$s^{-1}(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1\right)\,.$$

   Entonces, la parametrización por longitud de arco queda:

   $$\lambda(s) = (\omega\cos(\ln(\omega)), \omega\,\mathrm{sen}(\ln(\omega)), 5)\ , \qquad s \geq 0$$

   donde $\omega = s/\sqrt{2} + 1$.
   Notemos que $\lambda(0) = (1, 0, 5)$. Para calcular la curvatura, usamos la fórmula $\kappa(0) = \|\lambda''(0)\|$. Se tiene que

   $$\begin{aligned}\lambda'(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\ln(\omega)) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\ln(\omega)), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\ln(\omega)) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\ln(\omega), 0\right)\\ \lambda''(s) &= \left(-\frac{1}{2\omega}\,\mathrm{sen}(\ln(\omega)) - \frac{1}{2\omega}\cos(\ln(\omega)), \frac{1}{2\omega}\cos(\ln(\omega)) - \frac{1}{2\omega}\,\mathrm{sen}(\ln(\omega)), 0\right)\end{aligned}$$

   Por lo tanto,

   $$\kappa(0) = \|\lambda''(0)\| = \|(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

   **Puntaje Pregunta 1.**

   - 2 puntos por calcular la función longitud de arco.
   - 2 puntos por dar la pametrización de $\lambda$ por longitud de arco.
   - 2 puntos por calcular la curvatura.

2. Parametrice la curva dada por la intersección de la superfice $A = \{(tcos(t), tsen(t), z) : t > 0, z \in \mathbb{R}\}$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Encuentre la recta tangente y el plano normal en $(-\pi, 0, \pi^2)$.

**Solución.** Note que $z = x^2 + y^2 = t^2\cos^2(t) + t^2\,\mathrm{sen}^2(t) = t^2$. Entonces una paramatrización de la curva es

$$\lambda(t) = (t\cos(t), t\,\mathrm{sen}(t), t^2)\,, \qquad t > 0\,.$$

Ahora bien, el vector tangente de la curva es:

$$\lambda'(t) = (\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) + t\cos(t), 2t)$$

Como $\lambda(0) = (-\pi, 0, \pi^2)$ entonces el vector $v = \lambda'(\pi) = (-1, -\pi, 2\pi)$ es un vector paralelo a la recta tangente en $(-\pi, 0, \pi^2)$. Se sigue que la ecuación de la recta es:

$$\frac{x+\pi}{-1} = \frac{y}{-\pi} = \frac{z-\pi^2}{2\pi}$$

o bien

$$\begin{cases} x &= -\pi - t \\ y &= -\pi t \\ z &= \pi^2 + 2\pi t \end{cases} , t \in \mathbb{R}\,.$$

La ecuación del plano normal viene dada por:

$$[(x, y, z) - (-\pi, 0, \pi^2)] \cdot \lambda'(\pi) = 0 \Longleftrightarrow -(x+\pi) - \pi y + 2\pi(z - \pi^2) = 0\,.$$

**Puntaje Pregunta 2.**

- 2 puntos por obtener la parametrización incluido el intervalo de la curva.
- 2 puntos por obtener la ecuación de la recta tangente.
- 2 puntos por obtener la ecuación del plano normal.

3. Demuestre que la curva $\lambda : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^3$,

$$\lambda(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}\right)$$

es plana. Determine la ecuación del plano en que se encuentra.

**Solución.** Sea $\lambda(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Basta probar que la curvatura de la curva es cero. Recuerde que

$$\tau = \frac{(\lambda' \times \lambda'') \cdot \lambda'''}{\|\lambda' \times \lambda''\|^2}\,.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(\lambda' \times \lambda'') \cdot \lambda''' &= \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{(1-t)^2} & \frac{2t}{(1-t^2)^2} & \frac{-1}{(1+t)^2} \\ \frac{4}{(1-t)^3} & \frac{2+6t^2}{(1-t^2)^3} & \frac{2}{(1+t)^3} \\ \frac{12}{(1-t)^4} & \frac{24t+24t^3}{(1-t^2)^4} & \frac{-6}{(1+t)^4} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)^2(1+t)^2} \begin{vmatrix} 2 & 2t & -1 \\ \frac{4}{1-t} & \frac{2+6t^2}{1-t^2} & \frac{2}{1+t} \\ \frac{12}{(1-t)^2} & \frac{24t+24t^3}{(1-t^2)^2} & \frac{-6}{(1+t)^2} \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Entonces, la curva es plana y está contenida en el plano osculador, que tiene vector normal $B(t)$. Observe que amplificando las fracciones se ve que

$$\begin{aligned}
\lambda'(t) &= \left(\frac{2}{(1-t)^2}, \frac{2t}{(1-t^2)^2}, \frac{-1}{(1+t)^2}\right) = \left(\frac{2(1+t)^2}{(1-t^2)^2}, \frac{2t}{(1-t^2)^2}, \frac{-(1-t)^2}{(1-t^2)^2}\right) \\
\lambda''(t) &= \left(\frac{4}{(1-t)^3}, \frac{2+6t^2}{(1-t^2)^3}, \frac{2}{(1+t)^3}\right) = \left(\frac{4(1+t)^3}{(1-t^2)^3}, \frac{2+6t^2}{(1-t^2)^3}, \frac{2(1-t)^3}{(1-t^2)^3}\right)
\end{aligned}$$

Entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lambda' \times \lambda'' &= \frac{1}{(1-t^2)^5}(4t(1-t)^3 + (2+6t^2)(1-t)^2, -(4(1+t)^2(1-t)^3 + 4(1+t)^3(1-t)^2), \\
&\qquad 2(1+t)^2(2+6t^2) - 8t(1+t)^3) \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^5}((1-t)^2(2+4t+2t^2), -(1-t)^2(1+t)^2(4(1-t)(+4(1+t)), (1+t)^2(4-8t+4t^2)) \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^5}(2(1-t)^2(1+t)^2, -8(1-t)^2(1+t)^2, 4(1+t)^2(1-t)^2) \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^5}(2(1-t^2)^2, -8(1-t^2)^2, 4(1-t^2)^2) \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^3}(2, -8, 4)
\end{aligned}$$

Entonces

$$B(t) = \frac{\lambda'(t) \times \lambda''(t)}{\|\lambda'(t) \times \lambda''(t)\|} = \frac{1}{2\sqrt{21}}(2, -8, 4) = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, -4, 2)$$

Por lo tanto, la curva se encuentra en el plano

$$[(x, y, z) - \lambda(0)] \cdot B(t) = 0 \Longleftrightarrow (x - 1) - 4(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

**Puntaje Pregunta 3.**

- 3 puntos por calcular la torsión y concluir que la curva es plana.
- 3 puntos por obtener la ecuación del plano en que la curva está contenida.

4. Sea $\gamma$ una curva plana parametrizada por longitud de arco con curvatura constante. Pruebe que la imagen de $\gamma$ es una recta o una cincunferencia.

**Solución.** Si $\kappa \neq 0$ entonces

$$\frac{d}{ds}(\gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)) = T(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T(s)) = 0\,.$$

Luego, $\gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)$ es constante, digamos igual a $a$. Entonces

$$\|\gamma(s) - a\| = \left\|\frac{1}{\kappa}N(s)\right\| = \frac{1}{\kappa}\|N(s)\| = \frac{1}{\kappa} = cte\,.$$

por lo tanto, $\gamma$ está sobre una circunferencia de radio $r = 1/\kappa$ y centro en $a$.
Ahora bien, si $\kappa = 0$ entonces $T'(s) = \kappa N(s) = 0$ para todo $s$, luego el vector tangente es constante para todo $s$ lo que implica que la curva $\gamma$ está sobre una recta.

**Puntaje Pregunta 4.**

- 4 puntos por mostrar que si $\kappa \neq 0$ entonces la curva está sobre una circunferencia.
- 2 puntos por mostrar que si $\kappa = 0$ entonces la curva está sobre una recta.