Pontificia Universidad Católica de Chile – Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática – Segundo semestre, 2015

MAT1630 – Cálculo III – Interrogación 1

PAUTA DE SOLUCIONES

1. (1 punto) Decida si existe el siguiente límite, justificando su respuesta.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^4+y^4}\,.$$

Solución: Sea $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^4+y^4}$. Notemos que

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^4+0} = 0\,,$$
$$\lim_{t\to 0} f(t,2t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2(t^2-4t^2)}{t^4+16t^4} = -\frac{3}{17}\,.$$

Esto muestra que los valores de $f(x,y)$ pueden aproximarse de dos valores distintos dependiendo de la manera como (x,y) se aproxima de $(0,0)$. Por lo tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **no existe**.

2. (1 punto) Sea $f = f(x,y)$ una función con dominio $\mathbb{R}^2$ que tiene derivadas parciales f_x y f_y continuas. Sabiendo que:

   - $f(x,0) = 1 - x + x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
   - $f(t,2t) = 1 + 3t$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

   calcule $f_y(0,0)$.

Solución: Por un lado, $f_x(x,0) = -1 + 2x$ y en particular $f_x(0,0) = -1$. Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$3 = \frac{d}{dt}\big(1+3t\big) = \frac{d}{dt} f(t,2t) = f_x(t,2t)\frac{d}{dt}(t) + f_y(t,2t)\frac{d}{dt}(2t) = f_x(t,2t) + 2f_y(t,2t)\,,$$

y en particular $3 = f_x(0,0) + 2f_y(0,0)$. Por lo tanto $3 = -1 + 2f_y(0,0)$, o sea, $f_y(0,0) = 2$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cuyas derivadas parciales de primer y segundo orden son todas continuas, y tal que:

- $\nabla f(0,0) = (-3, 1)$;
- $f_{xx}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 1$.

Considere la función $\phi(t) = f(t + t^2, 3t)$.

(a) (1 punto) Muestre que $t = 0$ es punto crítico **de la función** ϕ.

Solución: Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= f_x(t + t^2, 3t)\frac{d}{dt}(t + t^2) + f_y(t + t^2, 3t)\frac{d}{dt}(3t)\\ &= (1 + 2t)f_x(t + t^2, 3t) + 3f_y(t + t^2, 3t)\,.\end{aligned}$$

En particular,

$$\phi'(0) = (1 + 0)\underbrace{f_x(0,0)}_{-3} + 3\underbrace{f_y(0,0)}_{1} = -3 + 3 = 0\,,$$

lo que significa que $t = 0$ es punto crítico de la función ϕ.

(b) (1 punto) Calcule $\phi''(0)$.

Solución: Derivamos la función $\phi'(t)$ obtenida arriba, utilizando las reglas del producto y de la cadena:

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= \frac{d}{dt}\left[(1 + 2t)f_x(t + t^2, 3t) + 3f_y(t + t^2, 3t)\right]\\ &= \frac{d(1 + 2t)}{dt} \cdot f_x(t + t^2, 3t) + (1 + 2t)\frac{d}{dt}f_x(t + t^2, 3t) + 3\frac{d}{dt}f_y(t + t^2, 3t)\\ &= 2f_x(t + t^2, 3t) + (1 + 2t)\left[f_{xx}(t + t^2, 3t)\frac{d}{dt}(t + t^2) + f_{xy}(t + t^2, 3t)\frac{d}{dt}(3t)\right]\\ &\qquad + 3\left[f_{xy}(t + t^2, 3t)\frac{d}{dt}(t + t^2) + f_{yy}(t + t^2, 3t)\frac{d}{dt}(3t)\right]\\ &= 2f_x(t + t^2, 3t) + (1 + 2t)\left[(1 + 2t)f_{xx}(t + t^2, 3t) + 3f_{xy}(t + t^2, 3t)\right]\\ &\qquad + 3\left[(1 + 2t)f_{xy}(t + t^2, 3t) + 3f_{yy}(t + t^2, 3t)\right]\\ &= 2f_x(t + t^2, 3t) + (1 + 2t)^2 f_{xx}(t + t^2, 3t) + 6(1 + 2t)f_{xy}(t + t^2, 3t) + 9f_{yy}(t + t^2, 3t)\end{aligned}$$

En particular, para $t = 0$,

$$\phi''(0) = 2\underbrace{f_x(0,0)}_{-3} + \underbrace{f_{xx}(0,0)}_{1} + 6\underbrace{f_{xy}(0,0)}_{1} + 9\underbrace{f_{yy}(0,0)}_{1} = -6 + 1 + 6 + 9 = 10.$$

4. (1 punto) ¿Existen planos tangentes a la superficie $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1$ que sean paralelos al plano $2x - 3y - 2z = 0$? Determine las ecuaciones de estos planos.

Solución: La superficie dada es superficie de nivel de la función $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$. Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de la superficie, entonces el plano tangente tiene como vector normal $\vec{n}_1 = \nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 6y_0, 4z_0)$. Por otro lado, el plano $2x - 3y - 2z = 0$ tiene vector normal $\vec{n}_2 = (2, -3, 2)$. Si los dos planos son paralelos entonces $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son múltiplos uno del otro; o sea, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n}_1 = r\vec{n}_2$, es decir,

$$(2x_0, 6y_0, 4z_0) = (2r, -3r, 2r) \quad \text{o equivalentemente} \quad (x_0, y_0, z_0) = (r, -r/2, r/2)$$

Además sabemos que $f(x_0, y_0, z_0) = 1$, o sea,

$$1 = x_0^2 + 3y_0^2 + 2z_0^2 = r^2 + 3(r/2)^2 + 2(r/2)^2 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) r^2 = \frac{9}{4} r^2 \,.$$

Es decir $r^2 = 4/9$, y por lo tanto hay dos soluciones $r = 2/3$ y $r = -2/3$, las cuales corresponden a los puntos:

$$(x_0, y_0, z_0) = (2/3, -1/3, 1/3) \qquad \text{y} \qquad (x_0, y_0, z_0) = (-2/3, 1/3, -1/3) \,.$$

Los planos buscados tienen ecuaciones del tipo $2x - 3y - 2z = c$. Remplazando los valores (x_0, y_0, z_0), encontramos

$$2x - 3y - 2z = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad 2x - 3y - 2z = -\frac{5}{3} \,.$$

5. (1 punto) Encuentre todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^x$$

y clasifíquelos.

Solución: Las derivadas de primer orden son:

$$f_x(x,y) = (x^2 + y^2 + 2x)e^x$$
$$f_y(x,y) = 2ye^x$$

$f_y(x,y) = 0$ si y solo si $y = 0$; además $f_x(x,0) = (x^2 + 2x)e^x = x(x+2)e^x$ es 0 si y solo si $x = 0$ o $x = -2$. Por lo tanto hay exactamente dos puntos críticos: $(0,0)$ y $(-2,0)$.

Como $f(0,0) = 0$ y la función f jamás es negativa, el punto crítico $(0,0)$ es **punto de mínimo local**, o de de hecho **punto de mínimo absoluto**.

Para clasificar el segundo punto crítico, calculamos las derivadas f_{xx}, f_{yy}:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (x^2+y^2+4x+2)e^x \quad \Rightarrow \quad f_{xx}(-2,0) = -2e^{-2} > 0 \\ f_{yy}(x,y) &= 2e^x \quad \Rightarrow \quad f_{yy}(-2,0) = 2e^{-2} < 0 \end{aligned}$$

Como estas dos derivadas tienen signos distintos, sigue que $(-2,0)$ es **punto de silla**.