PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2015

INTERROGACIÓN 3
MAT1630 ⋆ CÁLCULO 3

1. Considere la región E acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2; z = 36 - x^2 - y^2$.

   a) Describa la región anterior y escriba la respectiva integral para determinar el volumen, usando coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

   b) Calcule el volumen de la región E.

2. Determine la masa del sólido determinado por

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

   si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje z.

3. *a*) Calcule la integral de línea para el campo $F(x, y) = (y^3, x^2)$ a lo largo de la parábola $x = 1 - y^2$ desde el punto $(0, -1)$ hasta el punto $(0, 1)$.

   b) Considere la curva γ definida como la intersección de las superficies

$$z = y, \qquad 2z = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}, \qquad \text{para} \quad x \geq 0, \quad y \geq 1.$$

   Determine el trabajo efectuado por la fuerza $F(x, y, z) = (x, z, y)$ a lo largo de la curva γ.

4. Considere el campo vectorial dado por $F(x, y, z) = (ye^z - 2xy, xe^z - x^2, xye^z)$

   a) Demuestre que para una curva γ la integral $\int_\gamma F\, d\gamma$ solo depende de los extremos de la curva.

   b) Calcule $\int_\gamma F\, d\gamma$ para alguna curva γ que una los puntos $(1, 0, 2\pi)$ y $(1, 0, 0)$.

Una solución

1. *a*) Describiremos el volumen pedido en los tres sistemas de coordenados solicitados. En primer lugar en cartesianas.

$$V = \int_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{18-x^2}}^{\sqrt{18-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{36-x^2-y^2} 1\, dzdydx$$

A continuación en coordenas cilindricas

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{3\sqrt{2}} \int_{r^2}^{36-r^2} r \cdot dzdrd\theta.$$

Finalmente en coordenadas esféricas, utilizando la simetria respecto de $z = 18$, que es en la altura en la cual se intersectan los dos paraboloides, que corresponde a $\varphi_0 = Arctg(\sqrt{2}/6)$.

$$V = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{18\sec(\varphi)} r\,\mathrm{sen}^2(\varphi) drd\varphi d\theta + 2\int_0^{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\varphi)/\,\mathrm{sen}^2(\varphi)} r\,\mathrm{sen}^2(\varphi) drd\varphi d\theta.$$

b) Para calcular el volumen, utilizaremos el segundo de los cambios de coordenadas,

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{3\sqrt{2}} \int_{r^2}^{36-r^2} r \cdot dzdrd\theta = \frac{\pi}{2} \cdot 18^2.$$

2. Notemos que la región que nos piden corresponde al exterior a la esfera de radio 2 pero interior a la esfera de radio 3. Para ello calcularemos la masa M_1 de la esfera de radio 3 y a esta masa le restaremos la masa M_2 de la esfera de radio 2. Para ello utilizaremos coordenadas esféricas, con lo cual.

$$M_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{3} k \cdot r^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)\, drd\varphi d\theta = 9\pi^2 k.$$

Analogamente

$$M_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2} k \cdot r^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)\, drd\varphi d\theta = 9\pi^2 k = \frac{8\pi^2 k}{3}.$$

Con lo cual la masa pedida resulta ser $\dfrac{19\pi^2 k}{3}$.

3. *a*) En primer lugar notemos que una parametrización para el segmento de parábola es:

$$\gamma(t) = (1 - t^2, t) \qquad \text{para} \quad t \in [-1, 1].$$

Con lo cual la integral de linea queda como:

$$\int_1^1 (t^3, (1-t^2)^2) \cdot (-2t, 1)\, dt = \int_1^1 1 - 2t^2 - t^4\, dt = 2.$$

b) En primer lugar determinemos una parametrizacion de la curva dada, para ello intersectamos las dos ecuaciones para obtener

$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{3}{4}.$$

con lo cual una parametrización es:

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t), 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(t), 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(t) \right).$$

Con lo cual el trabajo pedido se calcula como:

$$\int_0^{\pi/2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{-3}{4}\operatorname{sen}(t)\cos(t) + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(t)\cos(t)) \right) dt = \sqrt{3} + \frac{3}{8}.$$

4. *a*) Para probar la primera parte, demostraremos que el campo F es conservativo, para ello encontraremos una función potencial f tal que $\nabla f = F$. Es decir buscamos f tal que

$$\begin{aligned} f_x &= ye^z - 2xy, \\ f_y &= xe^z - x^2, \\ f_z &= xye^z. \end{aligned}$$

Integramos la primera igualdad respecto de x para obtener

$$f(x, y, z) = xye^z - x^2 y + h(z, y).$$

En la relación anterior derivamos respecto de y para notar que $h_y = 0$. Analogamente al derivar respecto de z se tiene que $h_z = 0$. Se concluye que una función potencial para F es $f(x, y, z) = xye^z - x^2 y$ y por lo tanto la respectiva integral solo depende de los extremos de la curva γ.

Otra solución: Como el dominio de F es todo el plano $\mathbb{R}^2$ (el cual es convexo), en este caso una segunda manera de demostrar lo pedido consiste en calcular $\nabla \times F$ y verificar que este es igual a $(0, 0, 0)$.

b) Como sabemos que F es un campo conservativo, se tiene que

$$\int_\gamma F d\,\gamma = \int_\gamma \nabla f \, d\,\gamma = f(\text{punto final}) - f(\text{punto inicial}) = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) = 0.$$