Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2017

Pauta Interrogación 1.

MAT 1630. Calculo 3.

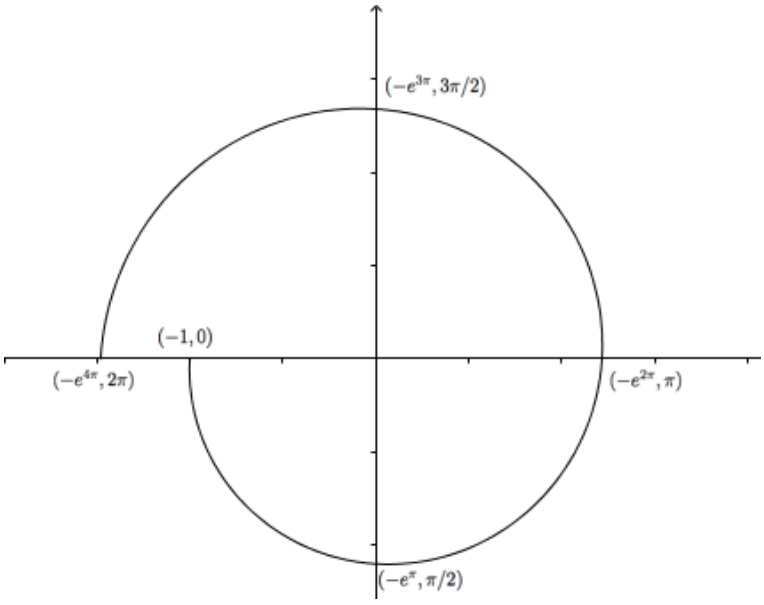
1. *a*) Demuestre que la fórmula de longitud de curva de la curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ esta dada por:
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)}\, d\theta.$$
b) Use lo anterior para encontrar la longitud de la curva polar $r(\theta) = -e^{2\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
c) Graficar la curva anterior.

Solución.

a) La curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ se parametriza como
$$\alpha(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$
Un cálculo muestra que
$$\alpha'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)$$
y
$$\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{(r')^2(\theta) + r^2(\theta)}.$$
Por lo tanto, usando la fórmula de longitud de curva para curvas paramétricas tenemos que la longitud de la curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ esta dada por
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)}\, d\theta.$$

b) Usando la fórmula anterior tenemos que la longitud de la curva polar $r(\theta) = -e^{2\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ es
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}e^{2\theta}\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1).$$

c) La función $r(\theta) = -e^{2\theta}$ es decreciente y negativa en el intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$. El gráfico se muestra en la figura a continuación



□

2. *a*) Demuestre que la fórmula de curvatura de la curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ esta dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{-r''(\theta)r(\theta) + 2(r')^2(\theta) + r^2(\theta)}{(r^2(\theta) + (r')^2(\theta))^{3/2}}.$$

b) Calcular $\kappa(\pi/3)$ para la curva polar $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$.

Solución.

a) Usando las ecuaciones $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$ y $y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$ tenemos que

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, \\ x''(\theta) &= r''(\theta)\cos\theta - 2r'(\theta)\sin\theta - r(\theta)\cos\theta, \\ y'(\theta) &= r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \\ y''(\theta) &= r''(\theta)\sin\theta + 2r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta. \end{aligned}$$

Luego, usando la fórmula de curvatura para curvas paramétricas tenemos que

$$\kappa(\theta) = \frac{y''(\theta)x'(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)}{((x')2(\theta) + (y')^2(\theta))^{3/2}} = \frac{-r''(\theta)r(\theta) + 2(r')^2(\theta) + r^2(\theta)}{(r^2(\theta) + (r')^2(\theta))^{3/2}}.$$

b) Usando la fórmula anterior para la curva $r = 1 + \cos\theta$ tenemos

$$\kappa(\theta) = \frac{3}{2^{3/2}(1 + \cos\theta)^{1/2}}.$$

Por lo tanto

$$\kappa(\pi/3) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

3. Sea $\alpha(s)$ una curva arcoparametrizada con curvatura constante. Sean $\vec{T}_\alpha$ y $\vec{N}_\alpha$, respectivamente, los vectores tangente y normal unitario de α. Calcular $\beta' \cdot \beta'''$, donde $\beta(s) = -3\alpha(s) + 5\vec{T}_\alpha(s) + \vec{N}_\alpha(s)$.

Solución. Unos cálculos muestran que

$$\begin{aligned}\beta' &= -3\alpha' + 5T'_\alpha + N'_\alpha \\ &= -3T_\alpha + 5kN_\alpha - kT_\alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta'' &= -3T'_\alpha + 5kN'_\alpha - kT'_\alpha \\ &= -3kN_\alpha - 5k^2T_\alpha - k^2N_\alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta''' &= -3kN'_\alpha - 5k^2T'_\alpha - k^2N'_\alpha \\ &= 3k^2T_\alpha - 5k^3N_\alpha + k^3T_\alpha.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\beta \cdot \beta''' = -(3+k)(3k^2+k^3) - 25k^4.$$

□

4. Considere la curva

$$\alpha(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1}\right), t \in \mathbb{R}.$$

a) Encuentre el arcoparámetro de α.
b) Arcoparametrizar α.

Solución.

a) Unos cálculos muestran que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \left(\frac{-4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2(1+t^2)-4t^2}{(t^2+1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{-4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||\alpha'|| &= \frac{\sqrt{16t^2+4-8t^2+4t^4}}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{4(t^2+1)^2}}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{2}{t^2+1}.\end{aligned}$$

Luego, el arcoparámetro $s(t)$ es

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_{-\infty}^{t} ||\alpha'(x)||dx \\ &= 2\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= 2\arctan(t) + \pi.\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1. *El límite inferior en la integral del arcoparámetro se puede escoger de manera arbitraria.*

b) Para arcoparametrizar la curva calculamos $t(s) = s^{-1}(t)$, es decir,

$$s = 2\arctan(t) + \pi \Leftrightarrow t(s) = \tan\left(\frac{s-\pi}{2}\right).$$

Luego, la arcoparametrización de α se obtiene reemplazando $t(s)$ en la curva $\alpha(t)$, es decir,

$$\alpha(s) = (\cos(s-\pi), \sin(s-\pi)),\ s \in [0, 2\pi].$$

□

5. Considere la circunferencia $C : (x-1/2)^2 + y^2 = 1/4$ y la recta $L : x = 1$. Desde el origen de coordenadas se traza una semi-recta R que corta a C y L en los puntos P y Q respectivamente. Si rotamos R alrededor del origen, el punto medio entre P y Q describirá una curva que denominaremos α. Encuentre una parametrización de la curva α.

Solución. La semi recta R tiene ecuación,

$$y = \tan(\theta)x,\ x > 0 \text{ y } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

El punto $P = R \cap C$ se calcula mediante

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} &\Longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \tan(\theta)^2 x^2 = \frac{1}{4} \\ &\Longrightarrow x^2 \sec(\theta)^2 - x = 0 \\ &\Longrightarrow P = \left(\cos(\theta)^2, \sin(\theta)\cos(\theta)\right).\end{aligned}$$

Por otra parte, el punto $Q = R \cap L$ se calcula mediante

$$(1, y) \Longrightarrow Q = (1, \tan(\theta)).$$

Por tanto, la curva α está parametrizada por

$$\alpha(\theta) = \frac{P+Q}{2} = \left(\frac{\cos(\theta)^2 + 1}{2}, \frac{\sin(\theta)\cos(\theta) + \tan(\theta)}{2}\right), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

□