Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo Semestre 2020

MAT-1630 - Interrogación 1-Parte 2

1. Considere la curva $\vec{r}(t) = (\sqrt{3}t^2, t^3 - t)$, con $t \in [-1, 1]$.

   a) Calcule el arcoparametro $s = s(t)$.

   Solución: Calculamos

   $$\vec{r}'(t) = (2\sqrt{3}t, 3t^2 - 1) \qquad ||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{12t^2 + 9t^4 - 6t^2 + 1} = 3t^2 + 1$$

   de donde, fijando la base en el punto inicial $t = -1$ obtenemos

   $$s(t) = \int_{-1}^{t} ||\vec{r}'(\bar{t})|| \, d\bar{t} = \int_{-1}^{t} 3\bar{t}^2 + 1 \, d\bar{t} = t^3 + t + 2$$

   b) Calcule la curvatura.

   Solución: Pensamos la curva como curva en $\mathbb{R}^3$ y calculamos:

   $$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (\sqrt{3}t^2, t^3 - t, 0) \\ \vec{r}'(t) &= (2\sqrt{3}t, 3t^2 - 1, 0) & ||\vec{r}'(t)|| &= 3t^2 + 1 \\ \vec{r}''(t) &= (2\sqrt{3}, 6t, 0) \\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= (0, 0, 6\sqrt{3}t^2 + 2\sqrt{3}) & ||\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|| &= 2\sqrt{3}(3t^2 + 1) \end{aligned}$$

   de donde

   $$\kappa(t) = \frac{||\vec{r}' \times \vec{r}''||}{||\vec{r}'||^3} = \frac{2\sqrt{3}(3t^2 + 1)}{(3t^2 + 1)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{(3t^2 + 1)^2}.$$

   c) Calcule el centro de masa.

   Solución: Primero observamos que el largo de la curva es $L = s(1) = 4$, y calculamos

   $$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_C x \, ds = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \sqrt{3}t^2(3t^2+1) \, dt = \frac{\sqrt{3}}{L}\int_{-1}^{1} 3t^4 + t^2 \, dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{5}t^5 + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{7}{15}\sqrt{3}.$$

   $$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_C y \, ds = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} (t^3 - t)(3t^2+1) \, dt = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} 3t^5 - 2t^3 - t \, dt = \frac{1}{L}\left(\frac{3}{6}t^6 - 2\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

   de donde el centro de masa es $(\frac{7}{15}\sqrt{3}, 0)$.

2. Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva arcoparametrizada con curvatura $k = k(s) > 0$ y torsión $\tau = \tau(s)$, y triedro móvil $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$. Sea $\varphi = \varphi(s)$ una curva con vector tangente $\varphi'(s) = \tau(s)\hat{t} + k(s)\hat{b}$.

a) Pruebe que la curvatura de φ es igual a $\dfrac{|k\tau' - k'\tau|}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}^3}$.

b) Pruebe que si la curvatura de φ no se anula entonces su torsión es 1.

a) $\varphi'' = \tau'\hat{t} + \tau k\hat{n} + k'\hat{b} - k\tau\hat{n}$ (por FS)

$= \tau'\hat{t} + k'\hat{b}$ 1,5 ptos

$\rightarrow \varphi' \times \varphi'' = (\tau\hat{t} + k\hat{b}) \times (\tau'\hat{t} + k'\hat{b})$

$= -\tau k'\hat{n} + \tau' k\hat{n} = (\tau' k - \tau k')\hat{n}$ 0,5 ptos

$|\varphi'|^2 = \varphi' \cdot \varphi' = k^2 + \tau^2$ 0,5 ptos

$\therefore \quad k_\varphi = \dfrac{|\varphi' \times \varphi''|}{|\varphi'|^3} = \dfrac{|\tau' k - \tau k'|}{(k^2 + \tau^2)^{3/2}}$ 0,5 ptos

b) $\varphi''' = \tau''\hat{t} + \tau' k\hat{n} + k''\hat{b} - k'\tau\hat{n}$

$= \tau''\hat{t} + (\tau' k - k'\tau)\hat{n} + k''\hat{b}$ 2 ptos

$\therefore \quad (\varphi' \times \varphi'') \cdot \varphi''' = (\tau' k - k'\tau)^2$ 0,5 ptos

Si $|\tau' k - \tau k'| \neq 0$ entonces

$\tau_\varphi = \dfrac{(\varphi' \times \varphi'') \cdot \varphi'''}{|\varphi' \times \varphi|^2} = \dfrac{(\tau' k - k'\tau)^2}{|\tau' k - k'\tau|^2} = 1$ 0,5 ptos