

# Integrales de Superficies

**Cálculo III - MAT1630**

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

17 de enero de 2023

# Integrales de Superficie

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

**Definición.**

Sea $S$ una superficie regular parametriza mediante $\mathbf{r}(u,v)$ con $(u,v) \in D$. Sea $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una campo escalar continuo. Definimos la integral de superficie de $f$ sobre $S$ por

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA \, .$$

**EJEMPLO 1** Calcule $\iint_S x^2 dS$, donde $S$ es la esfera unitaria.

**EJEMPLO 2** Calcule $\iint_S (x^2+y^2)\, dS$ siendo $S$ la superficie del cono $z^2 = 3(x^2+y^2)$ entre $z=0$ y $z=3$.

# Integrales de Superficie

Si $S$ es una superficie regular por segmentos, es decir, una unión finita de superficies regulares $S_1, S_2, \ldots, S_n$ que se cortan solo a lo largo de sus fronteras, entonces la integral de superficie de $f$ sobre $S$ se define mediante

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x,y,z)\,dS$$

**EJEMPLO 3** Calcule $\iint_S z dS$ donde $S$ es la superficie cuyos lados $S_1$ los define el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cuyo fondo $S_2$ es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en el plano $z = 0$ y cuya tapa $S_3$ es la parte del plano $z = 1 + x$ que queda arriba de $S^2$.

## Superficies Orientadas.

**Definición.**

Diremos que una superficie $S$ es orientable si existe $N : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores continuo que a cada $q \in S$ le asigna un vector $N(q)$ normal a la superficie $S$.

Si $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de $S$ entonces una forma de definir el campo de vectores normal es

$$N(q) = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} .$$

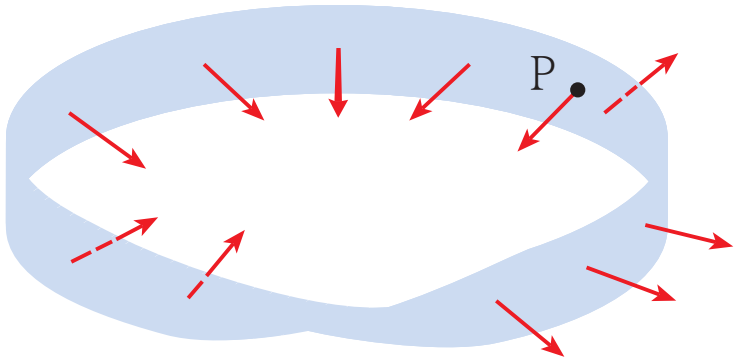
Esto define una orientación en $S$ y la orientación opuesta se obtiene con $-N(q)$

No todas las superficies son orientables.

# Integrales de Superficie

**EJEMPLO 4** (Banda de Möbius) Considere la superficie parametrizada $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\left(1 - v \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u), \left(1 - v \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u), v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right).$$




De aquí en adelante, solo se consideran superficies susceptibles de ser orientadas.

# Integrales de Superficie

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

**Definición.**

- Una superficie $S$ es **cerrada** si es la frontera de un sólido $E$.
- Diremos que una superficie cerrada $S$ tiene orientación positiva si sus vectores normales apuntan hacia afuera.

**Definición.**

Si $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo de vectores continuo definidos sobre una superficie orientada $S$ con vector normal unitario $\mathbf{n}$, entonces la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre $S$ es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se denomina **flujo** de $\mathbf{F}$ a través de $S$.

# Integrales de Superficie



Si $S$ esta parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, entonces

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot dS &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}\, dS \\ &= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}\right] \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA\end{aligned}$$

donde $D$ es el dominio del parámetro. Por lo tanto la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre $S$ es

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA\,.}$$

# Integrales de Superficie



**EJEMPLO 5** Determine el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ a través de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**EJEMPLO 6** Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ ,donde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $S$ es la frontera de la región sólida $E$ encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.