PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
7 noviembre 2018

MAT–1630 - CALCULO III
RESOLUCIÓN INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

Calcule el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,-z)$ a través de la porción del plano contenido en el interior del triángulo de vértices (4, 0, 0), (0, 8, 0) y (0, 0, 10), donde el flujo positivo es definido en la dirección positiva de OY.

Solución. La ecuación del plano que pasa por $(4,0,0)$, $(0,8,0)$, $(0,0,10)$ es

$$z = 10 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}y\,. \qquad \boxed{\text{Exhibe ecuación del plano. (\textbf{1.0 pto})}}$$

La porción del plano S pedida es

$$r(x,y) = \left(x, y, 10 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}y\right) \qquad \boxed{\text{Parametriza triángulo. (\textbf{1.0 pto})}}$$

con $(x,y) \in D$, D es el interior del triángulo con vértices $(0,0,0), (4,0,0), (0,8,0)$.

Se tiene que $r_x = \left(1, 0, \frac{-5}{2}\right)$ y $r_y = \left(0, 1, \frac{-5}{4}\right)$ y la orientación S queda determinada por

$$\vec{n} = r_x \times r_y = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, 1\right)\,. \qquad \boxed{\text{Calcula normal. (\textbf{1.0 pto})}}$$

Es decir el flujo pedido es

$$\int\int_S F \cdot \vec{n}\, ds = \int\int_D F(r(x,y)) \cdot \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, 1\right)\, dA \qquad \boxed{\text{Expresa el flujo como integral . (\textbf{0.5 pto})}}$$

Puesto que $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 8-2x,\ 0 \le x \le 4\}$ $\boxed{\text{Parametriza interior del triángulo. (\textbf{1.0 pto})}}$

$$\int\int_D \left(x, y, -10 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}y\right) \cdot \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, 1\right)\, dA = \int_0^4 \int_0^{8-2x} \left(5x + \frac{5}{2}y - 10\right)\, dydx$$

$\boxed{\text{Exhibe integral iterada. (\textbf{0.5 pto})}}$

Luego,

$$\int\int_S F \cdot \vec{n}\, ds = \frac{160}{3} \qquad \boxed{\text{Calcula integral. (\textbf{1.0 pto})}}$$

Pregunta 2

Considere la hélice $(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $0 \leq t \leq \pi$. Sea U la superficie que se obtiene al unir cada punto de la hélice horizontalmente con el eje z.

1. Encuentre una parametrización para U.
2. Exprese su área como una integral en una variable.

Solución.

Lo que debemos hacer es unir un punto de la curva con un trazo horizontal, es decir, unir $P(t) = (0, 0, t)$ y $Q(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $0 \leq t \leq \pi$.

Una parametrización del segmento de recta que une $P(t)$ con $Q(t)$ es:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1-s)P(t) + sQ(t) \\ &= (1-s)(0,0,t) + s(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t) \\ &= (s\cos(t), s\operatorname{sen}(t), t)\end{aligned}$$

con $0 \leq s \leq 1$ y $0 \leq t \leq \pi$. Parametriza U (**2.0 pto**) Tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_t &= (-s\operatorname{sen}(t), s\cos(t), 1) && \text{Calcula } \varphi_t \text{ (**1.0 pto**)} \\ \varphi_s &= (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0) && \text{Calcula } \varphi_s \text{ (**1.0 pto**)} \\ \varphi_s \times \varphi_t &= (\operatorname{sen}(t), -\cos(t), s) && \text{Calcula normal (**1.0 pto**)}\end{aligned}$$

Entonces, el área se calcula

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \|\varphi_s \times \varphi_t\| \, ds d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+s^2}\, ds \, .$$

Expresa área como integral unidimensional (**1.0 pto**)

Haciendo el cambio de variables $s = \tan(\alpha)$ se obtiene la integral

$$A = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sec^3(\alpha) d\alpha = \pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})) \, .$$

Pregunta 3

Calcule la coordenada $\overline{y}$ del centro de masa de una lámina que tiene la forma del cono $y^2 = x^2 + z^2$ entre los planos $y = 1$ e $y = 4$, si su densidad de masa en cada punto (x, y, z) está dada por $\sqrt{x^2 + z^2}$.

Solución. La función densidad de masa es $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$. Una parametrización para la superficie es $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(x, z) = (x, \sqrt{x^2 + z^2}, z)$$

donde $\Omega = \{(x, z) \mid 1 \leq x^2 + z^2 \leq 16\}$. Construye una parametrización (**1.0 pto**)

El vector normal inducido por la parametrización es

$$\varphi_x \times \varphi_z = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, -1, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right)$$ Calcula normal (**1.0 pto**).

La masa de la supercicie :

$$\begin{aligned}
m &= \iint_\Omega \delta(x, y, z) \|\varphi_x \times \varphi_z\| dxdz \\
&= \iint_\Omega \sqrt{x^2 + z^2} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + z^2} + 1 + \frac{z^2}{x^2 + z^2}} dxdz \\
&= \iint_\Omega \sqrt{2(x^2 + z^2)} dxdz \quad \text{Expresa masa como integral (\textbf{0.5 pto})} \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \int_1^4 \sqrt{2r^2} r dr d\theta \\
&= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \int_1^4 r^2 dr d\theta = \frac{126\sqrt{2}\pi}{3} . \quad \text{Calcula masa (\textbf{1.0 pto})}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega y\delta(x, y, z)\, dS &= \iint_\Omega \sqrt{x^2 + z^2} \sqrt{x^2 + z^2} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + z^2} + 1 \frac{z^2}{x^2 + z^2}}\, dxdz \\
&= \iint_\Omega \sqrt{2}(x^2 + z^2)\, dxdz \quad \text{Expresa integral coordenada } y \text{ (\textbf{1.0 pto})} \\
&= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \int_1^4 r^3\, dr d\theta \quad \text{Cambio de variable (\textbf{0.5 pto})} \\
&= \frac{255\sqrt{2}\pi}{2} \quad \text{Calcula integral (\textbf{0.5 pto})}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{y} = \dfrac{1}{m} \iint_\Omega y\, \delta(x, y, z)\, dS = \dfrac{85}{28}$. Calcula $\tilde{y}$ (**0.5 pto**)

Pregunta 4

Considere S la superficie en $\mathbb{R}^3$ que se genera al rotar el círculo que se encuentra en el plano XY de radio 1 y centro $(x, y, z) = (4\sqrt{2}, 0, 0)$ en torno al eje OY.

1. Determine la ecuación del plano tangente a S en el punto $p = \left(\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2}\right)$.
2. Determine todos los puntos en S de modo que el plano tangente a S en esos puntos son paralelos al plano XZ.

Solución. (a)

La parametrización de S es la siguiente:

$$\begin{aligned} x(s,t) &= (4\sqrt{2} + \cos(s))\cos(t) \\ y(s,t) &= \operatorname{sen}(s) \\ z(s,t) &= (4\sqrt{2} + \cos(s))\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

con $0 \le s \le 2\pi$, $0 \le t \le 2\pi$. Explicita una parametrización (**0,5 pto**)

Los valores (s,t) que representan al punto p son: $(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = \left(\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Calculando, $x^2 + z^2 = (4\sqrt{2} + \cos(s))^2 = 2\frac{9^2}{4}$ y por lo tanto $s = \frac{\pi}{4}$ ó $s = \frac{3\pi}{4}$. Además $(4\sqrt{2} + \cos(s))\cos(t) = \frac{9}{2}$. Luego,

$$(4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})\cos(t) = \frac{9}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}\,. \qquad \text{Calcula } t \text{ y } s \text{ (**0,5 pto**)}$$

Luego la solución es $s = t = \frac{\pi}{4}$.

Cálculo de ector normal del plano en p : $\vec{n} = (x_s, y_s,\ z_s) \times (x_t, y_t,\ z_t)$ en p.

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (-\operatorname{sen}(s)\cos(t), \cos(s), -\operatorname{sen}(s)\operatorname{sen}(t)) \times (-(4\sqrt{2} + \cos(s))\operatorname{sen}(t), 0, (4\sqrt{2} + \cos(s))\cos(t)\,) \\ &= \alpha(\cos t \cos s, \operatorname{sen} s, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s) \end{aligned}$$

donde $\alpha(s) = 4\sqrt{2} + \cos(s) \neq 0$ para todo s.

El vector normal en p es cualquier múltiplo no nulo de $\alpha(\pi/2)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .. Luego, cualquier múltiplo de $(1, \sqrt{2}, 1)$ es un vector normal. Describe vector normal (**1.0 pto**)

La ecuación cartesiana del plano tangente a S en p es:

$$\left(x - \frac{9}{2}\right) + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} + \left(z - \frac{9}{2}\right) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{2}y + z = 10\,.$$ Exhibe ecuación (**1.0 pto**)

Solución. (b) Se pide que los planos tangentes sean paralelos al plano XZ. Luego, la primera y tercera coordenada de $\tilde{\mathbf{n}}$ deben ser cero. Es decir,

$$\cos s \cos t = 0\,, \qquad \cos s \operatorname{sen} t = 0\,. \qquad \text{Explicita condiciones (**1.0 pto**)}$$

Conjunto solución, los dos círculos siguientes:

$$\{(4\sqrt{2}\cos t, 1, 4\sqrt{2}\operatorname{sen} t) : 0 \le t \le 2\pi\}\,, \quad \{(4\sqrt{2}\cos t, -1, 4\sqrt{2}\operatorname{sen} t) : 0 \le t \le 2\pi\}$$

Cada conjunto (**1.0 pto**)