# Solución

## P11

a) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \Rightarrow (x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = 1$

$\rightarrow x^{1/3} = \cos T \qquad y^{1/3} = \operatorname{Sen} T$

$$\begin{cases} x(T) = \cos^3 T \\ y(T) = \operatorname{Sen}^3 T \end{cases}, \quad T \in [0, 2\pi]$$

b) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \Rightarrow \left(\frac{x-h}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{r}\right)^2 = 1$

$\rightarrow \frac{x-h}{r} = \cos T \qquad \frac{y-k}{r} = \operatorname{Sen} T$

$$\begin{cases} x(T) = r\cos T + h \\ y(T) = r\operatorname{Sen} T + k \end{cases}, \quad T \in [0, 2\pi]$$

c) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$\rightarrow \frac{x-h}{a} = \cos T \qquad \frac{y-k}{b} = \operatorname{Sen} T$

$$\begin{cases} x(T) = a\cos T + h \\ y(T) = b\operatorname{Sen} T + k \end{cases}, \quad T \in [0, 2\pi]$$

# P2

A)

$$\begin{cases} (X-1)^2 + (Y-2)^2 + Z^2 = 2 \\ X^2 + Y^2 - 4X - 2Y = -4 \end{cases} \qquad Z > 0$$

Completamos cuadrado para la segunda ecuación

$$X^2 - 4X + 4 + Y^2 - 2Y + 1 = -4 + 4 + 1 \implies (X-2)^2 + (Y-1)^2 = 1$$

$$X - 2 = \cos T \ \wedge \ Y - 1 = \operatorname{Sen} T \implies X(T) = \cos T + 2 \ \wedge \ Y(T) = \operatorname{Sen} T + 1$$

Reemplazamos $X(T)$ e $Y(T)$ en la 1ra ecuación

$$(\cos T + 2 - 1)^2 + (\operatorname{Sen} T + 1 - 2)^2 + Z^2 = 2$$

$$\underbrace{\cos^2 T + 2\cos T + 1}_{1} + \operatorname{Sen}^2 T - 2\operatorname{Sen} T + 1 + Z^2 = 2$$

$$Z^2 = 2\operatorname{Sen} T - 2\cos T - 1$$

$$Z = \pm\sqrt{2\operatorname{Sen} T - 2\cos T - 1}, \quad Z > 0$$

$$Z(T) = \sqrt{2\operatorname{Sen} T - 2\cos T - 1}$$

1° La parametrización es

$$\begin{cases} X(T) = \cos T + 2 \\ Y(T) = \operatorname{Sen} T + 1 \\ Z(T) = \sqrt{2\operatorname{Sen} T - 2\cos T - 1} \end{cases}, \quad T \in [0, 2\pi]$$

y $2\operatorname{Sen} T - 2\cos T - 1 > 0$

B)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

De la 2da ecuación

$$x(t) = \cos t \qquad y(t) = \operatorname{sen} t$$

Reemplazamos $x(t)$ e $y(t)$ en la 1ra ecuación

$$\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = z$$

∴ La parametrización es

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \\ z(t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

C)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

Completamos cuadrado para la segunda ecuación

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \implies (x-1)^2 + y^2 = 1 \implies x - 1 = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

$$\implies x(t) = \cos t + 1 \qquad y(t) = \operatorname{sen} t$$

Reemplazamos $x(t)$ e $y(t)$ en la 1ra ecuación

$$(\cos t + 1)^2 + \operatorname{sen}^2 t = z^2 \implies 2\cos t + 2 = z^2$$

$$\Rightarrow \quad z(T) = \begin{cases} \sqrt{2\cos T + 2} & , z > 0 \\ -\sqrt{2\cos T + 2} & , z < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ La parametrización es

$$\begin{cases} x(T) = \cos T + 1 \\ y(T) = \operatorname{sen} T \\ z(T) \end{cases} \quad , \; T \in [0, 2\pi]$$

# P3)

Buscamos los $T_1$ y $T_2$ donde $r(T_1) = r(T_2) = (1,0,0)$

$\operatorname{Sin}^2 T = 1$ Si $T_1 = \pi/2$ $\Rightarrow$ $1^2 = 1$

$\operatorname{Sin} T \cos T = 0$ $1 \cdot 0 = 1$, $0 = 0$

$\cos T = 0$ Si $T_2 = 3\pi/2$ $\Rightarrow$ $(-1)^2 = 1$

$-1 \cdot 0 = 0$, $0 = 0$

Para $r'(T)$, derivamos cada componente de $r(T)$ respecto a $T$.

$$r'(T) = (2\operatorname{Sin} T \cos T, \; \cos^2 T - \operatorname{sen}^2 T, \; -\operatorname{sen} T)$$

Evaluando $T_1$ y $T_2$ en $r'(T)$

$$r'(\pi/2) = (0, -1, -1) \qquad r'(3\pi/2) = (0, -1, 1)$$

Condición de ortogonalidad: $r'(\pi/2) \cdot r'(3\pi/2) = 0$

$(0,-1,-1) \cdot (0,-1,1) = 0 + 1 - 1 = 0$

∴ Las tangentes en $(1,0,0)$ son ortogonales

Ecuación segmento de recta

$r(T) =$ punto conocido $+ T$ (pendiente en el punto) $r'$(punto conocido)

Para $T_1$

$r_1(T) = (1,0,0) + T(0,-1,-1)$

Para $T_2$

$r_2(T) = (1,0,0) + T(0,-1,1)$

## P4

Intersección entre semiesfera y cilindro

$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

Parametrizo la 2da ecuación

$x - 1 = \cos T \qquad y = \operatorname{Sen} T$

$x(T) = \cos T + 1 \qquad y(T) = \operatorname{Sen} T$

Reemplazando en la ec. de la esfera

$$(\cos T + 1)^2 + \operatorname{sen}^2 T + z^2 = 4$$

$$\cos^2 T + 2\cos T + 1 \quad \operatorname{sen}^2 t + z^2 = 4$$

$$z^2 = 2 - 2\cos T$$

$$z = \sqrt{2 - 2\cos T} \quad \text{con} \quad z > 0$$

$\therefore$ La parametrización es

$$\begin{cases} X(T) = \cos T + 1 \\ Y(T) = \operatorname{sen} T \\ Z(T) = \sqrt{2 - 2\cos T} \end{cases}, \quad T \in [0, 2\pi]$$