Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Primer semestre de 2015

Pauta Interrogación 2
MAT1630 * Cálculo 3.

1. *a)* Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x(x^2-3)+y(y^2-3)$.

   b) Sea $z = f(u,v)$ una función dos veces diferenciable. Si $u = x^2-y^2$, $v = 2xy$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en términos de u,v,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

Solución.

a) Los puntos críticos de f son aquellos puntos (x,y) que satisfacen la ecuación

$$\nabla f(x,y) = (0,0).$$

Un cálculo muestra que los puntos críticos deben satisfacer las ecuaciones

$$3x^2 - 3 = 0, \quad 3y^2 - 3 = 0,$$

por lo tanto, los puntos críticos de f son

$$(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1).$$

Para clasificar tales puntos críticos, utilizaremos el criterio del Hessiano. El Hessiano de f en un punto (x,y) esta dado por

$$Hess(f)(x,y) = det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = 36xy.$$

Evaluando en (1,1) vemos que

$$Hess(f)(1,1) = 36 > 0, \quad f_{xx}(1,1) = 6 > 0,$$

por lo tanto, $(1,1)$ es un punto mínimo.

Evaluando en (1,-1) vemos que

$$Hess(f)(1,-1) = -36 < 0, \quad f_{xx}(1,-1) = 6 > 0,$$

por lo tanto, $(1,-1)$ es un punto silla.

Evaluando en (-1,1) vemos que

$$Hess(f)(-1,1) = -36 < 0, \quad f_{xx}(-1,1) = -6 < 0,$$

por lo tanto, $(-1,1)$ es un punto silla.

Evaluando en (-1,-1) vemos que

$$Hess(f)(-1,-1) = 36 > 0, \quad f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0,$$

por lo tanto, $(-1,-1)$ es un punto máximo.

b) Sea $z = f(u,v)$, donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Por la regla de la cadena vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{2}$$

Usando (1) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right) + 2y\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Usando (2) se obtiene (de manera análoga a (3))

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\frac{\partial f}{\partial u} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \tag{4}$$

Sumando (3) y (4) se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right). \tag{5}$$

De las ecuaciones $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ se obtiene la relación

$$u^2 + v^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2+y^2)^2$$

de la cual se obtiene al reemplazar en (6) la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

□

2. Encuentre los máximos y mínimos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeto a las condiciones

$$x + y + z = 12, \quad xyz = 54.$$

Solución. Sean $g_1(x,y,z) = x+y+z$ (o bien $g_1(x,y,z) = x+y+z-12$) y $g_2(x,y,z) = xyz$ (o bien $g_1(x,y,z) = xyz-54$). Para encontrar los extremos de f con las condiciones dadas, por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g_1(x,y) + \mu \nabla g_2(x,y) &= 0 \\ x + y + z &= 12 \\ xyz &= 54. \end{aligned}$$

El sistema anterior es equivalente al sistema

$$2x + \lambda + \mu yz = 0 \tag{6}$$
$$2y + \lambda + \mu xz = 0 \tag{7}$$
$$2z + \lambda + \mu xy = 0 \tag{8}$$
$$x + y + z = 12 \tag{9}$$
$$xyz = 54. \tag{10}$$

Restando (6) y (7); (7) y (8) obtenemos el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} (x-y)(2-\mu z) &= 0 \\ (y-z)(2-\mu x) &= 0 \end{aligned}$$

de las cuales se desprende (en cualquier caso) que una variable es igual a la otra. Por simetría, basta analizar el caso $x = y$, por lo tanto, tomando $x = y$ en (9) y (10) obtenemos el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + z &= 12 \\ x^2 z &= 54, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $x^2(6-x) = 27$. Observar que la ecuación anterior es equivalente a la ecuación $(x-3)(x^2-3x-9) = 0$, cuyas soluciones son $x = 3$, $x = (3/2)(1+\sqrt{5})$ y $x = (3/2)(1-\sqrt{5})$. Entonces, los puntos críticos, aparte de los que se obtienen por permutación de x, y, z (que producen los mismos valores de f), son los siguientes:

$$(3,3,6),\ \left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5},\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5},9-3\sqrt{5}\right),\ \left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5},\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5},9+3\sqrt{5}\right)$$

Evaluando estos puntos obtenemos

$$\begin{aligned} f(3,3,6) &= 54, \\ f\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5},\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5},9-3\sqrt{5}\right) &= 153-45\sqrt{5}, \quad \text{(mínimo)} \\ f\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5},\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5},9+3\sqrt{5}\right) &= 153+45\sqrt{5}. \quad \text{(máximo)} \end{aligned}$$

□

3. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xzw+xy-y^2w+2 &= 0 \\ \cos(xw)+zy-2 &= 0 \end{aligned}$$

a) Muestre que cerca del punto $(x_0,y_0,z_0,w_0)=(0,1,1,2)$ existe una función $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de clase C^1 definida en una vecindad de $(0,1)$ tal que $(z,w)=\varphi(x,y)$.

b) Muestre que la función φ definida en (a) es invertible cerca del punto $(0,1)$.

Solución.

a) Sean $F_1(x,y,z,w)=xzw+xy-y^2w+2$ y $F_2(x,y,z,w)=\cos(xw)+zy-2$. Un cálculo muestra que

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}=xw,\ \ \frac{\partial F_1}{\partial w}=xz-y^2,\ \ \frac{\partial F_2}{\partial z}=y,\ \ \frac{\partial F_2}{\partial w}=-x\sin(xw)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}(x,y,z,w) &= det\begin{pmatrix} xw & xz-y^2 \\ y & -x\sin(xw) \end{pmatrix} \\ &= -x^2w\sin(xw)-y(xz-y^2). \end{aligned}$$

Reemplazando en el punto $(0,1,1,2)$, concluimos

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}(0,1,1,2)=1\neq 0,$$

luego, por el teorema de la función implícita, existe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 definida en una vecindad de $(0,1)$ tal que $(z,w) = \varphi(x,y)$.

b) Para mostrar que la función φ del apartado (a) es invertible cerca del punto $(0,1)$, debemos mostrar que $det(J_\varphi)(0,1) \neq 0$, donde J_φ es la matriz Jacobiana de φ (Teorema de la función inversa). De lo obtenido en (a) tenemos que $(z,w) = \varphi(x,y)$ y por lo tanto la matriz Jacobiana de φ es

$$J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} z_x & z_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix}.$$

Las derivadas parciales z_x, z_y, w_x, w_y se obtienen derivando implícitamente las ecuaciones

$$xzw + xy - y^2w + 2 = 0 \tag{11}$$

$$\cos(xw) + zy - 2 = 0 \tag{12}$$

respecto a x e y. Derivando respecto a x e y las ecuaciones (11) y (12) obtenemos las siguientes 4 ecuaciones

$$zw + x(z_x w + z w_x) + y - y^2 w_x = 0 \tag{13}$$

$$-(w + x w_x)\sin(xw) + y z_x = 0 \tag{14}$$

$$x(z_y w + w_y z) + x - 2yw - y^2 w_y = 0 \tag{15}$$

$$-x w_y \sin(xw) + y z_y + z = 0. \tag{16}$$

Evaluando (13), (14), (15) y (16) en el punto $(0,1,1,2)$ obtenemos que

$$z_x = 0, \quad z_y = -1, \quad w_x = 3, \quad w_y = -4$$

y por lo tanto

$$det(J_\varphi)(0,1) = det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = 3 \neq 0.$$

□

4. *a*) Considere la siguiente región en el plano

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x < y < 2x+1,\ 1-2x < y < 8-2x\}.$$

Exprese las integrales iteradas

$$\int\int_D (y-2x)dydx, \quad \int\int_D (y-2x)dxdy$$

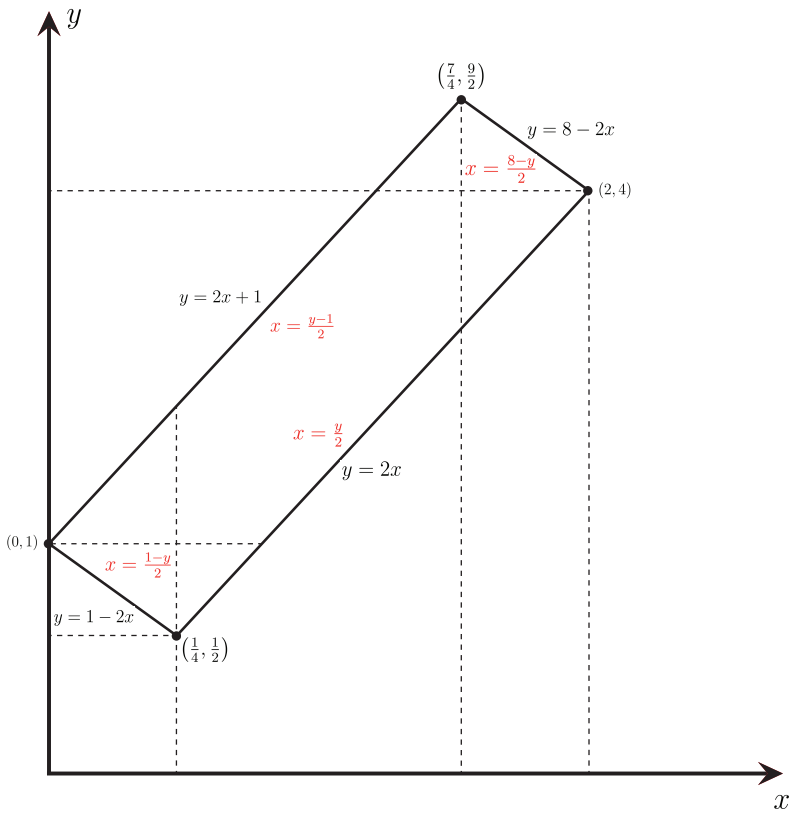
y calcule el valor de la integral $\int_D (y-2x)dA$.

b) Calcule el área de la región

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < x^3 < 4y,\ 9x < y^3 < 16x\}.$$

Solución.

a) La region $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x < y < 2x+1,\ 1-2x < y < 8-2x\}$ es el interior del paralelogramo de vertices $(0,1)$, $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, $(2,4)$, $\left(\frac{7}{4},\frac{9}{2}\right)$ que se muestra en la figura a continuación.



De la figura se desprende que las integrales iteradas

$$\int\int_D (y-2x)dydx, \quad \int\int_D (y-2x)dxdy$$

se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\int\int_D (y-2x)dydx &= \int_0^{1/4}\int_{1-2x}^{2x+1}(y-2x)dydx + \int_{1/4}^{7/4}\int_{2x}^{2x+1}(y-2x)dydx \\ &\quad + \int_{7/4}^{2}\int_{2x}^{8-2x}(y-2x)dydx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_D (y-2x)dxdy &= \int_{1/2}^{1}\int_{(1-y)/2}^{y/2}(y-2x)dxdy + \int_{1}^{4}\int_{(y-1)/2}^{y/2}(y-2x)dxdy \\ &\quad + \int_{4}^{9/2}\int_{(y-1)/2}^{(8-y)/2}(y-2x)dxdy.\end{aligned}$$

El valor de la integral doble $\int_D (y-2x)dA$ se obtiene (usando el teorema de Fubini) mediante el cálculo de cualquier integral iterada presentada anteriormente. A continuación presentamos una manera alternativa y mas sencilla usando un cambio de variables adecuado. Para esto consideremos la transformación afín

$$T(x,y) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}y, \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}y + 1\right).$$

Se puede mostrar, usando argumentos de algebra lineal, que $T([0,1]\times[0,1]) = D$. Un sencillo cálculo muestra que el Jacobiano de T es

$$det(J_T) = det\begin{pmatrix} 1/4 & 7/4 \\ -1/2 & 7/2 \end{pmatrix} = \frac{7}{4},$$

y por el teorema de cambio de variables tenemos que

$$\begin{aligned}\int_D (y-2x)dA &= \int_{[0,1]\times[0,1]} \left\{\left(\frac{-1}{2}u + \frac{7}{2}v + 1\right) - 2\left(\frac{1}{4}u + \frac{7}{4}v\right)\right\}\frac{7}{4}dudv \\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{7}{4}(1-u)dudv = \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

b) Por definición, el área de la región R es

$$\int_R 1\, dA.$$

Sea $(x,y) \in R$, entonces se tiene que $y < x^3 < 4y$ y $9x < y^3 < 16x$. Es fácil ver que si $u = x^3/y$, $v = y^3/x$ entonces el punto (u,v) pertenece al rectángulo $[1,4]\times[9,16]$. Lo anterior muestra que la transformación

$$T(x,y) = \left(\frac{x^3}{y}, \frac{y^3}{x}\right)$$

transforma la región R el el rectángulo $[1,4]\times[9,16]$. Por el teorema de cambio de variables se tiene que

$$\int_R 1\,dA = \int_{[1,4]\times[9,16]} |det(J_{T^{-1}})|dudv,$$

donde $J_{T^{-1}}$ es el Jacobiano de la transformación inversa de T. Un cálculo directo muestra que el Jacobiano de T es $det(J_T) = 8xy$. Por otra parte, de las ecuaciones $u = x^3/y$, $v = y^3/x$ se obtiene que $xy = \sqrt{uv}$, por lo tanto, usando la regla de la cadena, tenemos que

$$det(J_{T^{-1}})(u,v) = \frac{1}{det(J_T)(T^{-1}(u,v))} = \frac{1}{8\sqrt{uv}}.$$

Finalmente, usando el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_R 1\,dA &= \int_{[1,4]\times[9,16]} |det(J_{T^{-1}})|dudv \\
&= \int_1^4 \int_9^{16} \frac{1}{8\sqrt{uv}} dudv \\
&= \frac{1}{8}\left(\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}}du\right)\left(\int_9^{16} \frac{1}{\sqrt{v}}dv\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□