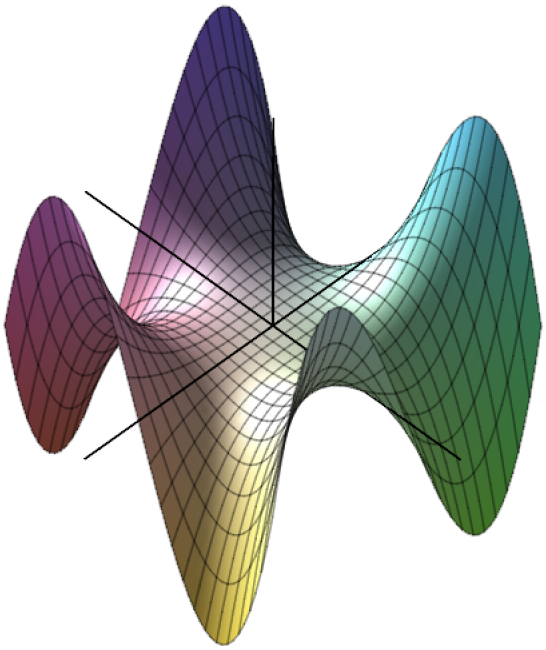
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas – Departamento de Matemática

Cálculo III

Resumen de conceptos y problemas resueltos



Sebastián Soto Rojas
Estudiante de Ingeniería Civil Electricista
(spsoto@uc.cl)

Este material se encuentra disponible de forma **gratuita** en la siguiente dirección:

http://web.ing.puc.cl/~spsoto

Permitida su libre distribución y difusión.
Prohibida estrictamente su venta y/o comercialización.

v1.0

© 2015 Sebastián Soto Rojas.

A esas 4 personas.
Quienes hicieron quien soy hoy,
e hicieron posible este trabajo.

Ellas, las 4, saben quiénes son.

Índice

1. Cálculo diferencial de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **6**

1.1. Nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$ . . . 6

1.2. Límites de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ . . . 13

1.3. Continuidad de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ . . . 25

1.4. Derivadas parciales, diferenciabilidad y derivadas direccionales . . . 32

1.4.1. Regla de la cadena . . . 50

1.5. Interpretación geométrica del gradiente . . . 61

1.6. Aplicaciones . . . 78

1.6.1. Teorema de Taylor . . . 78

1.6.2. Máximos y mínimos, matriz Hessiana . . . 82

1.6.3. Multiplicadores de Lagrange . . . 97

2. Cálculo diferencial de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ **120**

2.1. Diferenciabilidad de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y matriz jacobiana . . . 120

2.1.1. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas (*) . . . 127

2.2. Teorema de la función implícita . . . 132

2.3. Teorema de la función inversa . . . 147

3. Integrales múltiples **160**

3.1. Integrales dobles . . . 160

3.1.1. Áreas rectangulares . . . 160

3.1.2. Regiones generales . . . 167

3.1.3. Cambios de variables en integrales dobles . . . 178

3.1.4. Aplicaciones de la integral doble . . . 200

3.2. Integrales triples y aplicaciones . . . 218

3.3. Integrales $n-$múltiples $(*)$ . . . 253

4. Integrales de línea **256**

4.1. Integrales de línea para funciones escalares y vectoriales 256

4.2. Campos conservativos, funciones potenciales 275

4.3. El Teorema de Green 300

4.3.1. Aplicaciones del Teorema de Green 303

5. Los teoremas fundamentales del Cálculo Vectorial **333**

5.1. Integrales de superficie 333

5.1.1. Integrales de superficie sobre campos escalares: área de superficies 333

5.1.2. Integrales de superficie sobre campos vectoriales 345

5.2. La divergencia y el rotor 351

5.3. El Teorema de Kelvin-Stokes 356

5.3.1. Aplicaciones avanzadas 381

5.4. El Teorema de la Divergencia 385

5.4.1. El Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^2$ 385

5.4.2. El Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^3$ 392

5.4.3. Aplicaciones del Teorema del a Divergencia en $\mathbb{R}^3$ 406

Introducción

El presente texto nace como resultado de la compilación de las soluciones a las ayudantías realizadas durante el Primer Semestre de 2014 del curso Cálculo III. Posteriormente estas fueron revisadas, corregidas y se agregaron los conceptos importantes del curso así como algunos problemas resueltos adicionales. Todo esto resulta en un texto de más de 400 páginas que trata de abordar todas las tipologías de problemas disponibles en el curso.

En el curso de Cálculo III se realiza una extensión de los conceptos desarrollados durante Cálculo I a funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}^n$ en vez de $\mathbb{R}$, es decir, funciones con dominio en varias variables. Por esta razón es que, al igual que en dicho curso, debe realizarse un trabajo importante desarrollando y comprendiendo los conceptos, un esfuerzo que en este curso será aún más necesario pues si bien la dificultad de evaluación de las preguntas no es alta, sí requieren un adecuado dominio conceptual para resolverlas, tarea que no es del todo sencillo. Por esta razón se pone especial énfasis en comprender diversos conceptos a lo largo del trabajo, tanto en un enfoque teórico como en un enfoque práctico: he aquí la razón de la extensión de este libro.

El libro cuenta con problemas recopilados de diversas fuentes −cada uno resuelto y explicado íntegramente por el autor de este trabajo−, entre ellas:

- Evaluaciones históricas del curso desde 2005.
- El texto guía del curso: J. Stewart, *Calculus: Early Trascendentals*, 7a edición.
- El texto de referencia complementaria: C. Pita Ruiz, *Cálculo Vectorial*, 1a edición.
- Ayudantías históricas del curso, entre ellas destacan el notable trabajo realizado por mi buen amigo Sebastián Urrutia y Matías López.
- Problemas disponibles en las evaluaciones y material de los cursos de Cálculo de MIT, todos disponibles en la plata forma MIT OpenCourseWare.
- Problemas de elaboración propia, principalmente aquellos de carácter conceptual.

Este texto tiene como única finalidad ser un **complemento** al estudio del curso y en ningún caso reemplaza al estudio conceptual que debe realizarse sistemáticamente en las cátedras y los textos guías.

El libro se encuentra en permanente revisión y corrección de detalles, razón por la cual cualquier observación, comentario y/o sugerencia se muy bien recibida en mi correo personal, spsoto@uc.cl. Finalmente, me gustaría agradecer a todos aquellos quienes revisaron el trabajo, en particular mientras las ayudantías fueron elaboradas a lo largo el semestre, mención especial merecen: Enrique Marín, Altamiro Piña, Consuelo Valencia y Alessandro Valentini.

Si eres alumno de Cálculo III actualmente y estas leyendo esto, te deseo el mejor de los éxitos del curso, y espero que este texto pueda serte de gran utilidad en tu estudio y desempeño en las evaluaciones.

Sebastián Soto R.
Febrero de 2015

1. Cálculo diferencial de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

El primer objetivo del curso es desarrollar los conceptos de cálculo para funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Para cumplir con estos propósitos seguiremos una lógica similar a la ya seguida en Cálculo I: primero el concepto de límite, con ello el concepto de continuidad, seguido por el concepto de derivada y diferenciabilidad, para recién abordar el concepto de integración y los teoremas fundamentales del cálculo cuando estos primeros conceptos estén desarrollados.

1.1. Nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$

Antes de comenzar a definir los conceptos de cálculo diferencial e integral en $\mathbb{R}^n$, debemos definir los conceptos geométricos inherentes a la definición de límite (el primer gran concepto en cálculo): el concepto de distancia. Para ello, realizaremos un pequeño repaso de los conceptos de topología en $\mathbb{R}^n$ revisados en clases y en la bibliografía.

Definición: Conceptos topológicos básicos.

- Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. La *bola abierta* de centro en $\mathbf{x}_0$ y radio r, denotada por $B(x_0, r)$, es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ que distan de $\mathbf{x}_0$ en menos que r. Es decir:

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\} \tag{1.1}$$

- Se dice que el conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un *conjunto abierto* de $\mathbb{R}^n$ si para cada $\mathbf{x}_0 \in U$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_0, r) \subset U$.

Observación: $\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ son ejemplos de conjuntos abiertos.

Proposición: Toda bola $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Demostración: Sea $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{x}, r)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_0, \epsilon) \subset B(\mathbf{x}, r)$. De hecho, basta $\epsilon = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ y se verifica que $\epsilon > 0$, pues al pertenecer $\mathbf{x}_0$ a $B(\mathbf{x}, r)$, entonces por definición $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Para cualquier $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, \epsilon)$ se verifica que:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r \quad &\Rightarrow \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\
&\Rightarrow \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| < r \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|}_{\text{desigualdad triangular}} < r \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

- Se dice que el punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un *punto frontera* de U si toda bola abierta con centro en $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ contiene puntos dentro y fuera de U.
- La *frontera* de U es el conjunto de puntos frontera de U y se nota ∂U.
- Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice *cerrado* si $\partial U \subset U$.

Observaciones:

- Sea $U = B(\mathbf{x}_0, r)$, entonces $\partial U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : \, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \epsilon\}$.
- Si U es abierto $\mathbf{x}_0$ es punto frontera de U, entonces $\mathbf{x}_0$ no puede pertenecer a U: Si suponemos que pertenece a U, entonces existe un r_0 tal que $B(\mathbf{x}_0, r_0) \subset U$. Además, $B(\mathbf{x}_0, r_0) \nsubseteq U^C$ ya que $U \cap U^C = \{\emptyset\}$. Esto es una contradicción, pues en tal caso r_0 no sería un punto de la frontera.

Definición: Se define el *interior* de A como:

$$\text{Int}(A) = A - \partial A \tag{1.2}$$

Observación: A es un conjunto abierto $\Leftrightarrow A = \text{Int}(A)$.

Hecho este repaso, revisemos algunos de los problemas más relevantes en esta breve sección.

Problema 1.1

(a) Demuestre que el conjunto vacío $\varnothing$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. *Ayuda:* ¿Qué pasaría si $\varnothing$ no fuera un conjunto abierto?

(b) Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y cerrado a la vez. (*Moraleja*: ser abierto no es lo contrario a ser cerrado)

Solución:

(a) Realicemos la demostración por contradicción. Un conjunto que no es abierto contiene al menos un elemento que no se encuentra en el interior del conjunto. El conjunto vacío no tiene elementos, razón por la cual no puede satisfacer la condición de no ser abierto. Luego, necesariamente debe ser abierto. ■

(b) Un conjunto A es cerrado si $U \backslash A$ es abierto. En el caso de $\mathbb{R}^n$, tenemos que $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^n = \varnothing$ es abierto debido a la parte anterior. Luego, $\mathbb{R}^n$ es cerrado.

Por otra parte, un conjunto A es abierto si $U \backslash A$ es cerrado. Recordemos que un conjunto es cerrado si cada sucesión $f : \mathbb{N} \to A$ converge a un valor dentro de A. El vacío cumple dicha propiedad ya que todas las sucesiones $f : \mathbb{N} \to \varnothing$ están contenidas en $\varnothing$. Luego, se tiene que $\varnothing$ es cerrado y por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es abierto.

Con esto concluimos que $\mathbb{R}^n$ es tanto abierto como cerrado a la vez, y sirve para notar que las

definiciones de abierto y cerrado no son excluyentes: un conjunto puede ser cerrado y abierto a la vez. ■

Problema 1.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera. Demuestre que ∂A es un conjunto cerrado.

Solución:

Recordemos conceptos:

- Un conjunto es cerrado si: (1) su complemento es abierto, (2) si contiene a su frontera o (3) si cada sucesión de términos en el conjunto converge a un valor dentro del conjunto.
- Un punto x_0 pertenece a la frontera ∂A si $\forall r > 0\ B(\mathbf{x}_0, r)$ posee puntos en U y $\bar{U}$.

Podemos utilizar la definición (2) de conjunto cerrado, razón por la cual nos interesaría demostrar que $\partial(\partial A) \subset \partial A \Leftrightarrow \mathbf{x}_0 \in \partial(\partial A) \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in \partial A$.

Un punto pertenece a $\partial(\partial A)$ si $\forall r > 0\ B(\mathbf{x}_0, r)$ posee puntos en ∂A y $\overline{(\partial A)}$. Suponiendo lo anterior verdadero debemos demostrar que $\forall r > 0\ B(\mathbf{x}_0, r)$ posee puntos en A y $\bar{A}$.

Observe que si $B(\mathbf{x}_0, r)$ posee puntos en $\overline{\partial A} = \text{Int}(A) \cup \bar{A}$, entonces se cumple que $B(\mathbf{x}_0, r)$ tiene puntos en A (pues tiene puntos en $\text{Int}(A) \subset A$) y tiene puntos en $\bar{A}$. Como r es arbitrario, entonces concluimos que $x_0 \in \partial A$. Con lo anterior hemos demostrado que $\partial(\partial A) \subset \partial A$, por lo cual concluimos que ∂A es cerrado. ■

Problema 1.3 Para $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos. Muestre que $A \cup B$ y $A \cap B$ también son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Propuesto: Generalice su resultado para los conjuntos abiertos $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$, i.e. demuestre que los siguientes conjuntos son abiertos:

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad \text{y} \quad \bigcap_{i=1}^{m} A_i$$

Solución:

Demostraremos la primera afirmación. Por demostrar que si A y B son abiertos, entonces $A \cup B$ es abierto. Como A es abierto, entonces para todo $\mathbf{x}_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que: $B(\mathbf{x}_0, r) \subset A$. Análogamente para todo $\mathbf{x}_1 \in B$ existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_1, r) \subset B$.

Pero $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, por lo cual $B(\mathbf{x}_0, r) \subset A \cup B$. De esta forma, para todo $\mathbf{x} \in A \cup B$ se cumple que $\mathbf{x} \in A \vee \mathbf{x} \in B$. Por lo tanto, existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset A$ ó $B(\mathbf{x}, r) \subset B$ y en cualquiera de los dos casos $B(\mathbf{x}, r) \subset A \cup B$. Con ello concluimos que $A \cup B$ es abierto. ■

Ahora demostramos la segunda afirmación. Si $\mathbf{x} \in A \cup B$, entonces se cumple que $\mathbf{x} \in A$ y $\mathbf{x} \in B$. Como A es abierto, entonces para dicho $\mathbf{x}$ arbitrario existe $r_1 > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r_1) \subset A$. Análogamente se concluye para B: existe $r_2 > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r_2) \subset B$.

La idea clave de la demostración es notar que existen bolas abiertos al interior de la intersección de los conjuntos, por lo cual debemos escoger un radio r lo suficientemente pequeño de modo que permita concluir que $B(\mathbf{x}, r) \subset A \cup B$.

Si $r_a < r_b$, es evidente que $B(\mathbf{x}, r_a) \subset B(\mathbf{x}, r_b)$. Digamos entonces que $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$, de modo que $B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}, r_1) \subset A$ y $B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}, r_2) \subset B$. Observe que se cumple entonces que $B(\mathbf{x}, r) \subset A$ y $B(\mathbf{x}, r) \subset B$, se puede demostrar mediante teoría de conjuntos (se deja propuesto al lector, y es muy sencillo observarlo por diagrama de Venn) que entonces $B(\mathbf{x}, r) \subset A \cap B$.

Por lo tanto, como $x \in A \cap B$ es arbitrario y demostramos que existe un $r > 0$ que cumple la condición, hemos demostrado que $A \cap B$ es abierto. ■

Problema 1.4 Para $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ se define

$$A + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \,|\, \mathbf{x} \in A,\, \mathbf{y} \in B\}$$

Pruebe que si A es abierto, entonces $A + B$ es abierto.

Solución:

Dado que A es abierto, sabemos entonces que para todo $\mathbf{x} \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset A$. Buscamos demostrar que para todo $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in A + B$ existe $\tilde{r} > 0$ tal que $B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tilde{r}) \subset A + B$. Si determinamos dicho $\tilde{r}$ el problema queda demostrado.

Como existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$. Entonces,

$$B(\mathbf{x}, r) + B \subseteq A + B$$

$A + B$ representa sumar un elemento que traslada el centro de la bola solamente. Es decir, $B(\mathbf{x}, r) + B(\mathbf{y}, r) = B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, r)$ con $\mathbf{y} \in B$ y $\mathbf{x} \in A$ de la definición de suma. Luego, $\tilde{r} = r$ y de esta forma $B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \tilde{r}) \subseteq A + B$. Con ello, $A + B$ es abierto. ■

Problema 1.5 Determine justificadamente si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados:

(a) $A = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$.

(b) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0\}$.

(c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \wedge x < 1\right\}$.

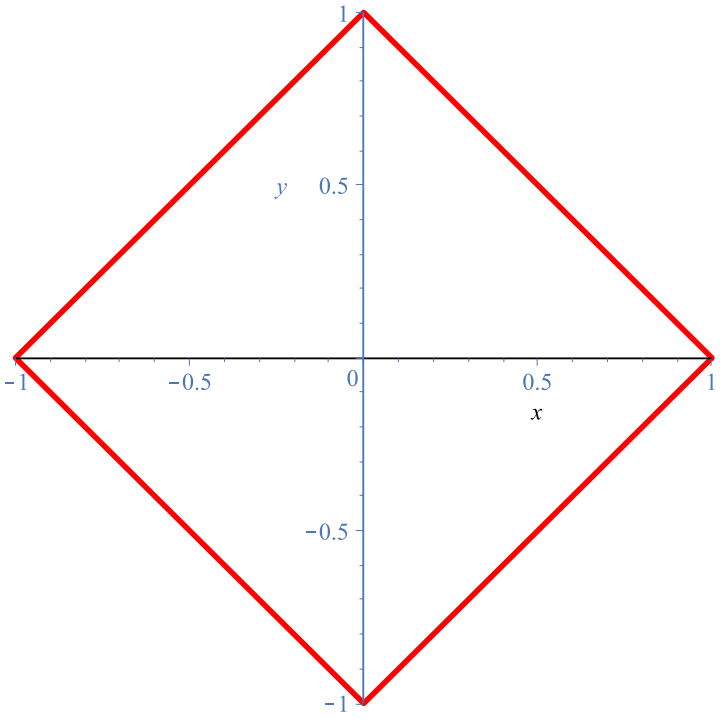
(d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(0, 0)\}$.

Solución:

(a) Lo mejor para comprender la situación es graficar. Para ello, analizamos el módulo según corresponda a los cuadrantes (en ellos cambia el comportamiento del módulo).

- Primer cuadrante ($x > 0$, $y > 0$): $x + y < 1 \to y < 1 - x$.
- Segundo cuadrante ($x < 0$, $y > 0$): $-x + y < 1 \to y < x + 1$.
- Tercer cuadrante ($x < 0$, $y < 0$): $-x - y < 1 \to y > -x - 1$.
- Cuarto cuadrante ($x > 0$, $y < 0$): $x - y < 1 \to y > x - 1$.

Se genera un gráfico como el que se presenta a continuación:

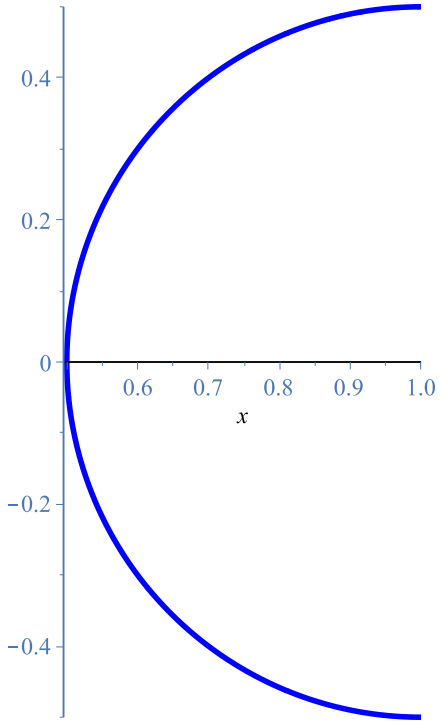


El interior de la figura corresponde a la región descrita por A. Como todos los bordes de la región están descritos por desigualdades estrictas, para todo punto al interior siempre encontraremos una circunferencia de radio lo suficientemente pequeño que se encuentre al interior de A. Concluimos que A es **abierto** en este caso.

(b) El conjunto se puede entender como todas las circunferencias con radio mayor o igual a cero. Más aún, por axiomática en $\mathbb{R}$ se cumple que $x^2 + y^2 \geq 0$ para todo número real. Por lo tanto, $A = \mathbb{R}^2$, el cuál como vimos en problemas anteriores es **cerrado** y **abierto**.

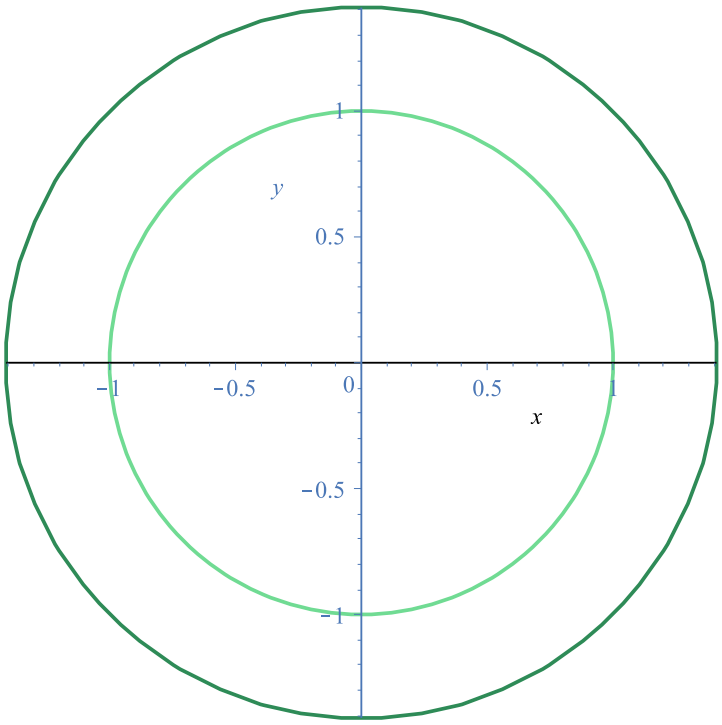
(c) Observe que la primera igualdad describe una circunferencia (no un círculo, ya que es una igualdad, no una desigualdad). Por otra parte la segunda condición impone que las coordenadas x de esta circunferencia deben ser menores a 1.

Graficando ambos elementos y la figura resultante:



Concluimos que el segmento en verde es una semicircunferencia. Como corresponde a un conjunto unidimensional, concluimos que el conjunto es **cerrado**, ya que $\bar{A}$ es claramente un conjunto abierto.

(d) Graficamos todos los elementos descritos:



Observe que hay una desigualdad estricta y otra no estricta. La última garantiza que el conjunto **no puede ser abierto**, ya que elementos de ∂A también pertenencen a A, i.e. $A \cap \partial A \neq \varnothing \rightarrow A \neq \text{Int}\,(A)$.

El conjunto tampoco puede ser cerrado, ya que basta tomar una sucesión de elementos en el interior que converja a un elemento en la desigualdad estricta.

Por lo tanto, el conjunto **no es abierto ni cerrado**.

Propuesto Sea $B = \{(r,s) : r,s \in Q,\, 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq s \leq 1\}$. Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto cerrado tal que $B \subset A$, decida justificadamente si $[0,1] \times [0,1] \subset A$.

Propuesto Demuestre que las siguientes operaciones $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ corresponden a normas:

(a) Norma de la suma: $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

(b) Norma p: $\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} x_k^p}$.

(c) Norma del máximo: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p$.

1.2. Límites de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Antes de comenzar a trabajar los problemas, repasemos la definición de límite de este tipo de funciones así como las proposiciones básicas con las que trabajaremos.

Definición: Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto de U o bien un punto frontera de U. Se dice que el límite de f cuando x tiende a $\mathbf{x}_0$ es L si podemos acercanos a L acercándonos cuanto queramos a $\mathbf{x}_0$ seleccionando un valor de $\mathbf{x}$ adecuado.

En otras palabras, si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap U(x \neq x_0) \Longrightarrow f(\mathbf{x}) \in B(L, \epsilon) \tag{1.3}$$

o equivalentemente:

$$\sim 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$$

En tal caso, utilizamos la notación:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

Teorema: Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en el abierto U y sea $\mathbf{x}_0$ un punto de $U \cup \partial U$. Si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M$$

Entonces:

(a) $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (f + g)(\mathbf{x}) = L + M.$

(b) $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (f \cdot g)(\mathbf{x}) = LM.$

(c) $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \dfrac{f}{g}(\mathbf{x}) = \dfrac{L}{M}$ si y solo si $M \neq 0$.

Observaciones:

- Una condición necesaria, pero no suficiente para que $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ exista y sea L es que si los límites
$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, \sigma(x)) \quad ; \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, \varphi(x))$$
existen, entonces deben valer L (en caso contrario el límite no existe).
- Para límites de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se puede hacer la conversión a coordenadas polares. Podemos tomar $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y evaluar el límite cuando $r \to 0$. Si se logra demostrar que $\forall\theta$ el límite se va a cero, entonces el límite sí es cero. Si se logra probar que existen θ_1 y θ_2 para los cuales el límite es distinto, entonces el límite no existe. En caso contrario esta sustitución no garantizada nada.
- Se pueden aplicar teoremas como el teorema del sandwich para la demostración de límites en varias variables.

Problema 1.8 Conjeture el valor de

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

y luego demuestre formalmente que la función converge a dicho límite.

Solución:

Dado que x^2y es una expresión de orden 3, comparado a una expresión de orden 2 (x^2+y^2), podemos conjeturar que el límite tiende a 0. Demostremos este resultado.

En este caso, debemos demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon$$

Como $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, la idea es lograr manipular la expresión de la derecha para que se parezca a esta expresión. Notemos que:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2\,|y|}{x^2+y^2}$$

Podemos eliminar el denominador sumando y^2 al numerador, generando así una desigualdad:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\,|y|}{\cancel{x^2+y^2}} = |y|$$

Por axiomática real, $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{y^2+x^2}$. Es decir,

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

que es la expresión que buscábamos conseguir. Si hacemos $\delta = \epsilon$ se tendrá que:

$$\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon \to |y| < \epsilon \to \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon$$

lo cual demuestra la implicancia. Como ϵ es arbitrario, hemos demostrado que para todo ϵ existe un δ que cumple la expresión (y de hecho encontramos este δ). ■

Problema 1.9 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existe y $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Demuestre que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ existe si y solo si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$ existe.

Solución:

Dado que tenemos que demostrar una equivalencia, tenemos que demostrar ambos lados de ella.

($\leftarrow$) Es equivalente a demostrar que si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \text{ existe} \rightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \text{ existe}$$

Pero $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existe, por lo que esto no es más que aplicar las propiedades de álgebra de límites vista en clases. $\square$

($\rightarrow$) Tenemos que:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \text{ existe}$$

Luego, por álgebra de límites e hipótesis

$$\frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})} \text{ existe}$$

pero el límite anterior es igual a $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \dfrac{f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \text{ existe } \square$$

Finalmente, concluimos así lo pedido. ■

Problema 1.10 Calcule (si existen) el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(y^2-x\right)^2}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(2xy^2\right)}{2\left(x^2+y^4\right)^2}$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\left(x^4-y^4+1\right)}{x^2+y^2}$.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}}$.

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y}{x-y}$.

(h) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2yz}{x^4+y^2x^2+z^4}$.

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}$.

(j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x-y}$.

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3\operatorname{sen}(x)}{x^4+y^2}$.

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y+y^2z}{x^2+2y^2+3z^2}$.

Solución:

(a) En extensión al concepto de límites laterales en funciones de una variable, probemos trabajando con **límites direccionales**, lo cual es una suposición bastante razonable: independiente de la curva que tomemos para acercarnos al origen ($(x,y)\to(0,0)$), el límite de existir debe ser el mismo. Si esto no se cumple, el límite **no** existe. Esto no es más que una extensión del concepto de límites laterales en una variable: o nos acercamos por la izquierda o nos acercamos por la derecha[a].

Probemos acercándonos con la curva $\varphi(t)=(t,0)$. Con ello, tenemos el límite:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2}=1$$

Con la curva $\varphi(t)=(0,t)$, tenemos el límite:

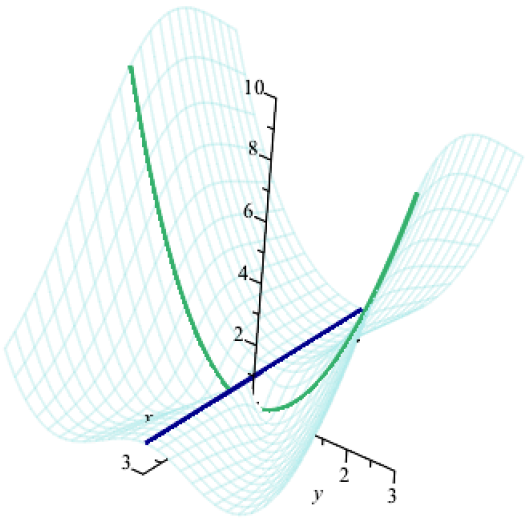
$$\lim_{t\to 0}\frac{\left(t^2\right)^2}{t^2}=0$$

Luego, como hay dos formas de aproximarse en las cuales el límite arroja distinto valor, concluimos que el límite **no existe**.

Comprobamos esto gráficamente desplegando ambas curvas en $\mathbb{R}^2$, la superficie involucrada,

$$z=\left(y^2-x\right)^2/\left(x^2+y^2\right)$$

y la proyección de las curvas sobre la superficie (lo cual nos entrega el valor del límite):



El lector puede quedar con dudas respecto a qué se hizo: tomamos una curva en $\mathbb{R}^2$: $\varphi(t)$ y la evaluamos en la función, i.e. obtuvimos $f(\varphi(t))$. Esto a su vez genera una curva, ahora en $\mathbb{R}^3$ dada por $\phi(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Evidentemente, estará contenida en la superficie $z = (y^2 - x)^3 / (x^2 + y^2)$ pues para un mismo (x, y) sus coordenadas z evidentemente coinciden.

Luego, simplemente estamos estudiando el límite de la coordenada z cuando x e y tienden a cero. Si para curvas distintas, el manto nos devuelve un valor distinto, concluimos entonces que el límite en efecto no existe.

(b) Dado que aparece la expresión $x^2 + y^2$, probamos con la sustitución polar:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Con esto el límite se convierte a:

$$\lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2} - 1}{r^2}$$

Note inmediatamente que mediante la sustitución la función deja de ser una función de θ, razón por la cual el límite siempre será el mismo independiente de este valor. El límite anterior es conocido y se puede calcular ya sea mediante la sustitución $u = r^2$ o bien mediante la regla de L'Hôpital, obteniendo así,

$$\lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2} - 1}{r^2} = 1$$

De modo que,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} = 1}$$

(c) Las curvas $\varphi(t) = (t, 0)$ y $\varphi(t) = (0, t)$ dan inmediatamente cero como resultado. Dado que la participación de y es el doble en grado que la de x, podemos tratar de probar con la curva

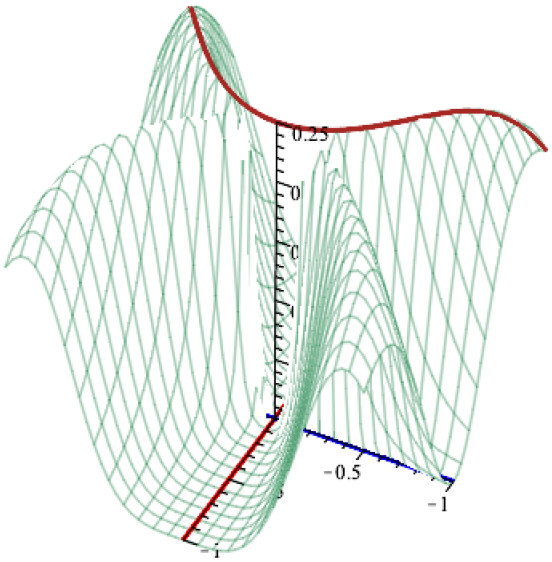
$\varphi(t) = (t^2, t)$, obteniendo el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(2t^4)}{2(2t^4)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \neq 0$$

Luego, contrario a la intuición por el hecho de que el límite es similar al límite trigonométrico conocido:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

el límite **no existe**. Se grafica la situación:



(d) Hagamos la sustitución polar, obteniendo así que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r(\theta)\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\operatorname{sen}^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{r(\theta)\to 0} r\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right)$$

Observe que $-2 \leq \cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta \leq 2$ donde se asumieron las cotas (no siendo necesariamente los supremos) al ser coseno y seno menores o iguales que 1 y mayores o iguales que 1. Luego, se tiene que:

$$-2r \leq r\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right) \leq 2r$$

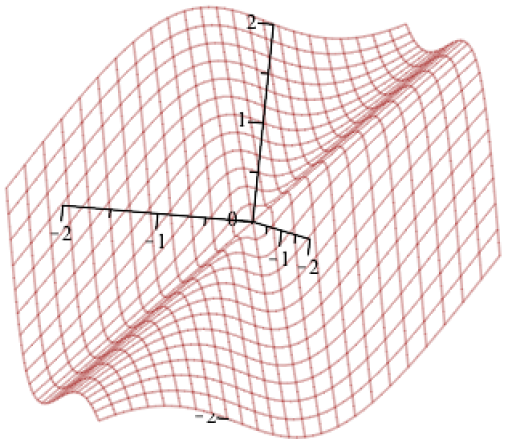
Como ambos límites extremos tienden a cero, concluimos por Teorema del Sándwich que:

$$\lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right) = 0$$

independientemente del valor de θ. Por lo tanto, concluimos que:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0}$$

Se grafica la situación:



Observe cómo en comparación a los límites que no existen aquí el manto claramente tiende en todas las direcciones al mismo lugar, sin una suerte de comportamientos oscilatorios que ocurren cerca del origen en los casos anteriores.

(e) Si probamos con las curvas convencionales, el límite tenderá claramente a cero. Por lo tanto, podemos intentar calcularlo mediante álgebra de límites. Para ello, recordamos que el siguiente límite es conocido:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

Luego, "hacemos aparecer" esta expresión:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^4-y^4+1)}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^4-y^4+1)}{x^4-y^4}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^4-y^4+1)}{x^4-y^4}\,1 \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} x^2-y^2
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^4-y^4+1)}{x^2+y^2} = 0}$$

(f) Nuevamente la misma idea: suponiendo que el límite tiende a cero por efecto del comportamiento del numerador versus el denominador, demostramos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}} \right| = 0$$

Partamos notando que $ab \geq -|ab|$. Por lo tanto,

$$(a+b)^2 \geq 0 \to a^2+2ab+b^2 \geq 0 \to a^2-2|ab|+b^2 \geq 0$$

Con lo cual $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$. Como esta es una propiedad axiomática en $\mathbb{R}$, en particular se cumple que

$$2\left|xy^2\right| \leq x^2 + y^4$$

¿Para qué necesitamos esto? ¡Para establecer una cota!

$$0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}}\right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{2\left|xy^2\right|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|xy|}{\sqrt{|x|}\,|y|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|x|}$$

Como los extremos tienden a cero, entonces el límite del módulo también como consecuencia del teorema del sándwich. Finalmente,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}} = 0}$$

(g) Recordando la identidad de prostaféresis:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x-y} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)}{x-y} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}} \\
&= 1 \cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x-y} = 1}$$

(h) Observemos qué ocurre al introducir curvas. Es evidente que las curvas $(t,0,0)$, $(0,t,0)$ y $(0,0,t)$ producen todas cero como resultado del límite ya que se anula inmediatamente el denominador.

Sin embargo, con la curva $\varphi(t) = (t,t,t)$ se tiene que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^4}{3t^4} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el límite **no existe**.

(i) El hecho de probar las curvas en todas las direcciones básicas (se deja esto propuesto al lector) sugiere que el límite tiende a cero. Ya sabemos cómo proceder en este caso: por demostrar que:

$$\lim_{(x,y)\to 0}\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}\right| = 0$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}\right| &= \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2+y^4}\\ &\leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2+y^4}\\ &\leq \frac{|x|^3+|y|^3}{|x|^2+|y|^2}\end{aligned}$$

Ya vimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$ por lo cual es fácil concluir bajo los mismos argumentos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = 0$$

Finalmente, por teorema del sándwich concluimos que el límite es cero. Es decir,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to 0}\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}\right| = 0}$$

(j) Observe que el aporte de x^3 e y^3 en el numerador es el mismo en cuanto a grados del polinomio. Lo mismo ocurre para el denominador. Por esta razón, y ya que sabemos que probar los límites direccionales **no garantizan convergencia**, es que se puede probar realizar una sustitución a coordenadas polares, donde:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Tenemos garantizado el hecho de que en este caso el límite se expresa como uno que tiende a $r \to 0$. Del valor de θ no necesariamente se puede afirmar lo mismo. De hecho, ya sabemos que tenemos que aproximarnos en cualquier dirección posible al mismo límite, razón por la cual **el valor del límite debe ser el mismo independiente del valor de** θ.

Si bajo esta sustitución encontramos dos valores distintos para distintos valores de θ, el límite no existe. Si para todos los valores de θ encontramos el mismo valor del límite debido al comportamiento de r, entonces concluimos que la función converge a dicho límite. Para la garantización del resultado sería prudente, si el ejercicio lo requiere (no en este caso), hacer una demostración formal.

Haciendo la sustitución,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x^3+y^3}{x-y} &= \lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta + r^3\operatorname{sen}^3\theta}{r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}\\ &= \lim_{r\to 0} r^2\frac{\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}\end{aligned}$$

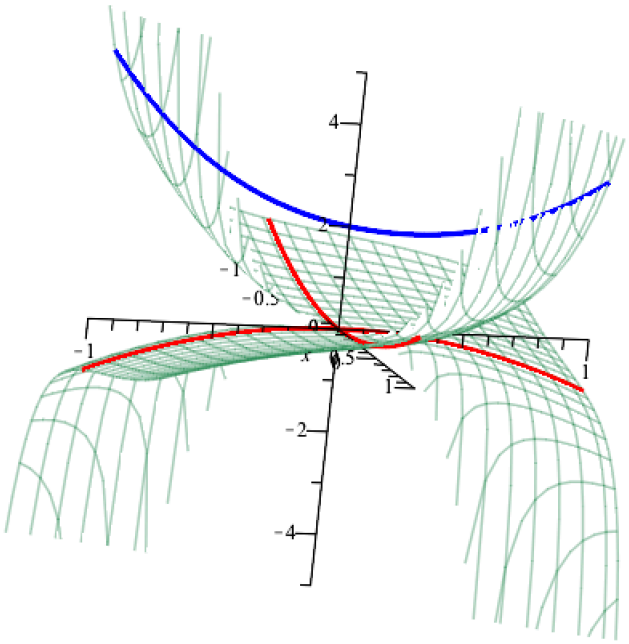
Observe que independientemente del valor de θ, el valor del límite es claramente cero. Sin embargo, esto no ocurre para un valor de θ, $\theta = \pi/4$. Es claro que $\theta = \theta(r)$. Si $\theta(r)$ llega a aproximarse a $\pi/4$ más rápido de lo que r^2 se aproxima a cero, entonces el límite podría eventualmente no existir. ¿Cómo solucionamos esto? Escogiendo una curva que se aproxime al origen de forma cúbica. Si probemos con $\varphi(t) = (t^3, t)$, el límite se convierte a:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^6+t^3}{t^3-t} = 0$$

Por lo tanto, para evitar la simplificación por t por efecto de la resta de t en el denominador, podemos probar con $\varphi(t) = (t^3+t, t)$. El límite se convierte a:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{(t^3+t)^3+t^3}{t^3+t-t} &= \lim_{t\to 0}\left(t^2+1\right)^3+1\\ &= 2\end{aligned}$$

Como consecuencia de esto, concluimos que el límite **no existe**. Graficamos la situación:



(k) Es evidente que el límite tiende a cero al probar con las curvas $\varphi(t) = (t, 0)$ y $\varphi(t) = (0, t)$ ya que el numerador se anula. ¿Qué ocurre con la curva $\varphi(t) = (t, t)$? Se tiene el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3 \operatorname{sen}(t)}{t^4 + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2 + 1} = 0$$

Tampoco se generan problemas, lo cual nos hace sospechar que el límite efectivamente es cero. Verificamos esto bajo la misma idea que el problema anterior. Demostaremos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{y^3 \operatorname{sen}(x)}{x^4 + y^2} \right| = 0$$

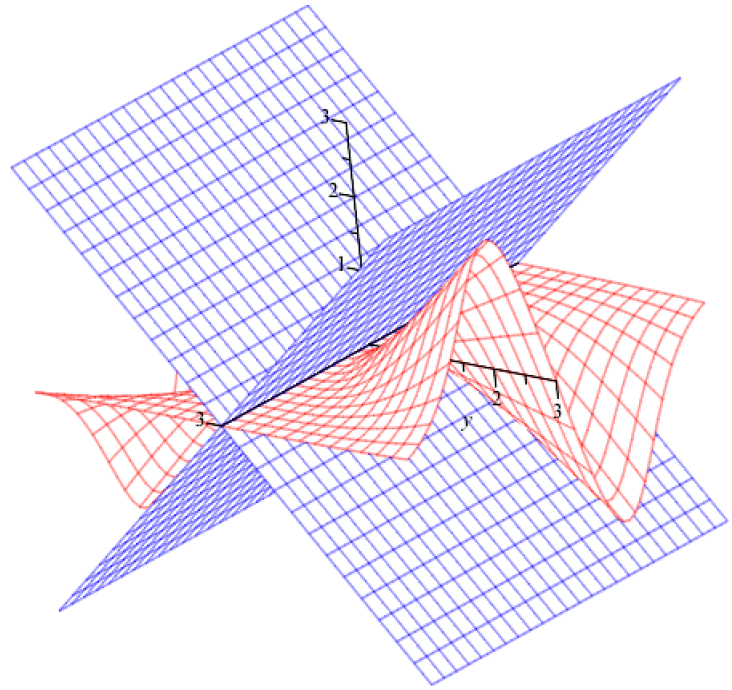
Observe que:

$$\left| \frac{y^3 \operatorname{sen}(x)}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{|y|^3}{x^4 + y^2} \leq \frac{|y|^3}{y^2} = |y|$$

donde la primera desigualdad se genero pues $0 \leq |\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ y la segunda por axiomática real, pues $x^4 + y^2 \geq y^2$ al ser $x^4 \geq 0$. Como $|y| \to 0$ cuando $y \to 0$, entonces concluimos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{y^3 \operatorname{sen}(x)}{x^4 + y^2} \right| = 0 \to \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 \operatorname{sen}(x)}{x^4 + y^2} = 0}$$

Graficamos la segunda situación, con ambas cotas superiores y la inferior, probando que la función tiende a cero en el origen:



(l) Observe que el numerador es de orden polinomial 3, en cambio el denominador es de orden 2, razón por la cual podemos conjeturar que el límite en cuestión tiende a cero. Tal que como

en el problema anterior, nos conviene entonces demostrar que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0)} \left| \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \right| = 0 \rightarrow \lim_{(x,y,z)\to(0,0)} \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} = 0$$

Trabajemos entonces con el primer límite. Tenemos que establecer una cota superior que tienda a cero para el módulo, lo cual solo se puede lograr aplicando todas las propiedades conocidas para el módulo, en este caso la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \right| &\leq \frac{x^2\,|y| + y^2\,|z|}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} = |y| \frac{x^2}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} + |z| \frac{y^2}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \\ &\leq |y| \frac{x^2}{x^2} + |z| \frac{y^2}{2y^2} = |y| + \frac{|z|}{2} \end{aligned}$$

Como el extremo derecho tiende evidentemente a cero, entonces concluimos finalmente que:

$$\boxed{\lim_{(x,y,z)\to(0,0)} \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} = 0}$$

[a]Nota: esta metodología solo sirve para probar que los límites **no existen**. No es útil para probar que un límite toma tal valor ya que habría que demostrarlo para las infinitas formas de aproximarse al origen.

Problema 1.11 Determine si existe $k > 0$ tal que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^k}{x - y^2}$ exista.

Solución:

Si nos acercamos por la curva $(0, t)$, el límite es cero.

Al igual que en problemas anterior, el hecho de que aparezca una resta en el denominador sugiere que el límite puede no existir. Por ensayo y error tenemos que encontrar una curva que nos permita probar esto. En efecto, si nos acercamos por la curva $\left(t^2 + t^{k+2}, t\right)$ ocurre lo siguiente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^k}{x - y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(t^2 + t^{k+2}\right) t^k}{t^2 - t^{k+2} - t^2} = -\lim_{t\to 0} \left(1 + t^k\right) = -1$$

Por lo tanto, el límite para ningún valor de $k > 0$ puede existir pues la curvas por las que nos aproximamos al origen generan límites distintos.

1.3. Continuidad de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Para estos problemas debemos tener claro el concepto de continuidad, que no es más que una extensión del concepto de continuidad del cálculo en una variable. Repasemos su definición formal:

Definición: Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *continua en* $\mathbf{x}_0$ si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) \tag{1.4}$$

Análogamente, f se dice continua en el abierto $\mathcal{A}$ si para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$ se satisface la propiedad anterior.

Tal como podría imaginarse por la analogía a las funciones de una sola variable, las suma, resta, multiplicación, ponderación por escalar y división (con denominador distinto a cero) de funciones continuas genera funciones continuas. La misma suerte corre la composición con funciones continuas. Este es un argumento que utilizaremos fuertemente al momento de estudiar la continuidad de la función en su dominio.

Por lo tanto, la tónica de estos problemas es clara: determinar el valor del límite en cada punto de interés y compararlo con el valor de la función en dicho punto.

Problema 1.12 Estudie la continuidad de la siguiente función en **todo** su dominio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,\text{sen}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución:

Es evidente con solo mirar el problema que la principal dificultad del problema se centrar en estudiar qué ocurre en el origen. En efecto, partamos estudiando la continuidad de la función para $(x,y) \neq (0,0)$.

¿Cómo hacemos esto? ¡Aprovechándonos del álgebra de funciones continuas! Tenemos que x^2y y x^2+y^2 son funciones polinomiales y por lo tanto continuas. En particular x^2+y^2 es distinta de cero pues estamos en el caso $(x,y) \neq (0,0)$. Luego, por teorema visto en clases $x^2y/(x^2+y^2)$ es continua. Se sigue que como seno es una función continua entonces

$$\text{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) \text{ es continua}$$

Bajo los mismos argumentos tenemos que $xy/(x^2+y^2)$ es continua, por lo cual por simple álgebra de límites $f(x,y)$ es continua para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Nos queda estudiar la continuidad en el origen. En este caso ya no corremos la misma suerte, lamentablemente. Dada la definición de continuidad, tendremos que:

$$f(x,y) \text{ es continua en } (0,0) \longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}\,\text{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = f(0,0) = 0$$

Calculemos entonces el límite. Observe que en un problema anterior demostramos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Esto quiere decir que en cualquier dirección que nos aproximemos por esa función, el límite dará cero. Por esta misma razón, es fácil notar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)^{-1} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = 1$$

dada la similitud con el límite estudiado en cálculo. Un argumento más contundente es notar que cualquier curva que tomemos $\varphi(t)$ que se aproxime al origen generará la misma velocidad de aproximación en el seno y en el denominador, por lo cual en efecto el límite es 1. Luego, notemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2y}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

Para calcular el último límite es evidente el requerimiento de una sustitución polar, dada la aparición de x^2+y^2 en el denominador. En efecto,

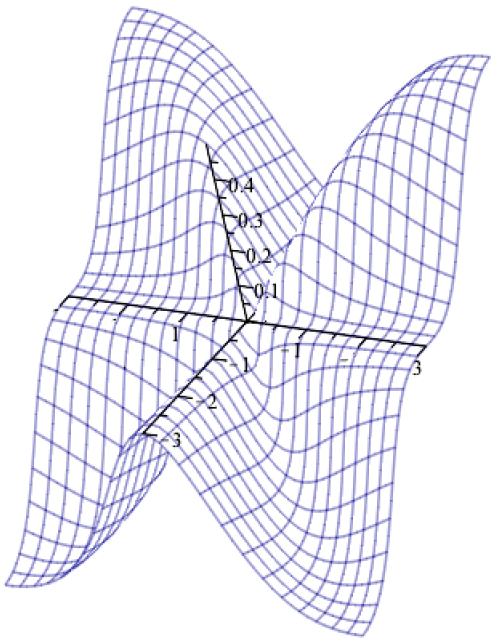
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

Como:

$$-r \leq r\cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta \leq r$$

concluimos por teorema del sándwich que el límite es cero indistintamente del valor de θ. Finalmente, concluimos que la función es continua en $(0,0)$ y por lo tanto es **continua en todo** $\mathbb{R}^2$.

Se puede observar gráficamente cómo todo el manto es continuo:



Problema 1.13 Analice la continuidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x^2y^6}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\arctan(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Ayuda: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\arctan(x)}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2(y+1)+y^2}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Solución:

(a) Tenemos que calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x^2y^6}{x^4+y^6}$$

determinar si existe y si es o no cero. Observe que mediante álgebra de límites podemos hacer tender el seno a 1 y eliminarlo:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x^2y^6}{x^4+y^6} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x^2y^6}{x^2y^6}\frac{x^2y^6}{x^4+y^6} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^6}{x^4+y^6}\end{aligned}$$

Bajo la idea de los problemas de límites, podemos conjeturar que este límite efectivamente es cero. Demostramos por teorema del sándwich:

$$0 \le \frac{x^2y^6}{x^4+y^6} \le \frac{x^2y^6}{y^6} = x^2$$

y como ambas funciones tienden a cero en el orígen, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x^2y^6}{x^4+y^6} = f(0,0) = 0$$

por lo tanto la función sí **es continua**.

(b) Por calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x-\cos\left(x^2+y^2\right)-\arctan(x)}{x^2+y^2}$$

Sabemos que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

por lo cual reagrupamos inteligentemente los términos:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x-\cos\left(x^2+y^2\right)-\arctan(x)}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} + \frac{1-\arctan(x)}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2+y^2\right) + \frac{1-\arctan(x)}{x^2+y^2} \\ &= 0 + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\arctan(x)}{x^2+y^2} \\ &= 0 + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\arctan(x)}{x^3}\cdot\frac{x^3}{x^2+y^2} \\ &= 0 + \frac{1}{3}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

donde se utilizó la ayuda para establecer la última igualdad. Como

$$0 \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|^3}{x^2} = |x|$$

entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$. Con ello,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x-\cos\left(x^2+y^2\right)-\arctan\left(x\right)}{x^2+y^2} = 0$$

con lo cual concluimos que la función **es continua**.

(c) Calculamos el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\left(y+1\right)+y^2}{2x^2+y^2}$$

Acerquémonos al origen por $(t,0)$, teniendo así el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^2+0}{2t^2+1} = 1$$

Acercándonos por $(0,t)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{0+t^2}{0+t^2} = 1$$

Acercándonos por (t,t):

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^3+3t^2}{3t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\left(2t+3\right)}{3t^2} = 1$$

Esto da para pensar que el límite sí existe y es 1. No podemos en este caso trabajar con el módulo ya que el candidato del límite no es cero, si no 1. Probamos con coordenadas polares:

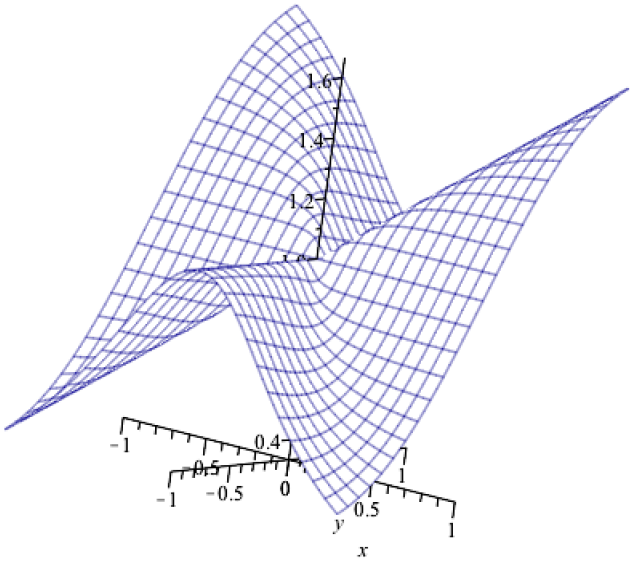
$$\lim_{r\to 0} \frac{2\cos^2\theta\left(r\,\mathrm{sen}\,\theta+1\right)+\mathrm{sen}^2\,\theta}{2\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta} = \lim_{r\to 0} 1+2r\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 1$$

independiente del valor de θ. Luego,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\left(y+1\right)+y^2}{2x^2+y^2} = 1$$

y la función **es continua**.

Una solución elegante: Veamos la figura de la función para la cual se está estudiando el límite:



Es fácil notar que sí se puede establecer una cota superior y una inferior para aplicar teorema del sándwich. La cota superior puede tener forma aproximadamente de una función tipo $|x|+1$ ó $|y|+1$. Busquemos esta función inteligentemente a partir de lo que nos sugiere el gráfico haciendo una traslación en una unidad hacia abajo, de modo que sí podremos aplicar lo que sabemos sobre los módulos.

Observe que si el límite es 1, entonces debe cumplirse que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\,(y+1)+y^2}{2x^2+y^2} - 1 = 0$$

Pero:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\,(y+1)+y^2}{2x^2+y^2} - 1 &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\,(y+1)+y^2-(2x^2+y^2)}{2x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{2x^2+y^2}\end{aligned}$$

Tomamos módulo:

$$0 \leq \left|\frac{2x^2y}{2x^2+y^2}\right| = 2\frac{x^2\,|y|}{2x^2+y^2} \leq \frac{2x^2\,|y|}{2x^2} \leq |y|$$

Luego, por teorema del sándwich se tiene que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\,(y+1)+y^2}{2x^2+y^2} - 1 = 0$$

Con lo cual,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\,(y+1)+y^2}{2x^2+y^2} = 1}$$

Propuesto Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función escalar definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2 - xy + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Determine α de modo que $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$.

1.4. Derivadas parciales, diferenciabilidad y derivadas direccionales

Trabajaremos ahora con el concepto de diferenciabilidad, el cual partiremos definiendo:

Definición: Una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *diferenciable* en $\mathbf{x}_0 \in U$ si nos desplazamos $\mathbf{h}$ en la función desde $\mathbf{x}_0$ se obtiene una expresión

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\, h_i + \mathcal{O}(\mathbf{h}) \tag{1.5}$$

tal que $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} \dfrac{\mathcal{O}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$.

En otras palabras, una función es diferenciable en un punto si al desplazarnos una pequeña cantidad de dicho punto, el valor de la función puede obtenerse mediante una aproximación de primer orden de sus derivadas parciales.

La notación $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\, h_i$ es homologable a un producto punto y puede compactarse como:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\, h_i = \vec{\nabla} f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{h} \tag{1.6}$$

donde $\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) \right)$ se conoce como *vector gradiente*, y será utilizado posteriormente.

Observación importante: Despejando $\mathcal{O}(\mathbf{h})$ de la definición tenemos que:

$$\mathcal{O}(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$$

Luego, una función se dice diferenciable si:

$$\boxed{\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathcal{O}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \vec{\nabla} f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0} \tag{1.7}$$

Usaremos esta definición para nuestros análisis de diferenciabilidad en funciones a tramos. Adicionalmente, podemos utilizar los siguientes teoremas:

Teorema: Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$ si todas sus derivadas parciales son continuas en $\mathbf{x}_0$, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ es continua en } \mathbf{x}_0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

¡Ojo! No se verifica necesariamente la expresión recíproca, i.e. f puede ser diferenciable sin que sus derivadas parciales sean continuas.

Y en analogía a lo estudiado para el cálculo de funciones de una variable, tenemos que:

- Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, f es continua en dicho punto. Esta demostración se deja propuesta al lector.
- El álgebra de funciones deferenciables es similar: la suma, resta, multiplicación, ponderación por escalar y composición de funciones diferenciables genera como resultado funciones diferenciables.

Problema 1.15

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

Determine $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ en todo punto (x,y) y estudie la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en todo su dominio.

Solución:

Partiremos calculando las derivadas parciales para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Aplicamos simples reglas de derivación:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Derivamos por simples reglas de derivación, asumiendo y constante en este caso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2xy^3\left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(x^2+y^2\right)2x\cdot x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^4} \\ &= \frac{2xy^3\left(x^2+y^2-2x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \end{aligned}$$

$$\to \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{2xy^3\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

Ahora derivamos con respecto a y, asumiendo que x es una constante:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{3x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)2y\cdot x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^4} \\ &= \frac{x^2y^2\left(3x^2+3y^2-4y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{x^2y^2\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

Ahora calculamos las derivadas parciales para $(x,y)=(0,0)$. Para ello, aplicamos la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^20^3}{\left(h^2+0^2\right)^2}-0}{h}$$

$$\to \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$$

Análogamente,

$$\to \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$$

Para todo $(x,y)\neq 0$ la función es diferenciable como consecuencia de que es un cuociente de funciones diferenciables tales que el denominador nunca se anula. También es posible notar y argumentar que para $(x,y)\neq(0,0)$ ambas derivadas parciales son continuas y por lo tanto aplicar el teorema antes mencionado. Para $(x,y)=(0,0)$ requerimos un análisis más sofisticado.

Usaremos la definición presentada para nuestros análisis de diferenciabilidad en funciones a tramos. Decantando estas ideas en este ejercicio, tenemos que: $\mathbf{x}_0=(0,0)$, $\mathbf{h}=(h,k)$ (con h y k cualesquiera) y f la función dada de la definición.

Luego,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \\ &= (0,0)\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{h}\| = \sqrt{h^2+k^2}$$

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = \frac{h^2k^3}{\left(h^2+k^2\right)^2}$$

$$f(\mathbf{x}_0)=0$$

Es decir, la función es diferenciable si se cumple que:

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\dfrac{h^2k^3}{\left(h^2+k^2\right)^2}}{\left(h^2+k^2\right)^{1/2}} = 0 \leftrightarrow \lim_{(h,k)\to 0} \frac{h^2k^3}{\left(h^2+k^2\right)^{5/2}} = 0$$

Notar que entonces la diferenciabilidad de la función en $(0,0)$ se reduce a probar que este límite es cero. Si no es cero, la función no es diferenciable en el punto en cuestión.

Si nos acercamos por $(t,0)$ ó $(0,t)$ el límite vale inmediatamente cero. Sin embargo, si nos acercamos con (t,t) se tiene el siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^5}{2^{5/2}t^5} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

por lo cual el límite no existe y por lo tanto la función **no es diferenciable** en $(0,0)$. Concluimos entonces que la función es diferenciable para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Si f es diferenciable, se tiene de la definición que:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f\left(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}\right) - f\left(\mathbf{x}_0\right) - \vec{\nabla} f\left(\mathbf{x}_0\right)\cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Si consideramos que $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$ con $\mathbf{v}$ una dirección unitaria y $t \to 0$, entonces en la ecuación anterior se obtiene que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v}\right) - f\left(\mathbf{x}_0\right) - \vec{\nabla} f\left(\mathbf{x}_0\right)\cdot t\mathbf{v}}{|t|} = 0$$

Entonces,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v}\right) - f\left(\mathbf{x}_0\right) - \vec{\nabla} f\left(\mathbf{x}_0\right)\cdot t\mathbf{v}}{t} = 0 \to \lim_{t\to 0}\left[\frac{f\left(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v}\right) - f\left(\mathbf{x}_0\right)}{t} - \vec{\nabla} f\left(\mathbf{x}_0\right)\cdot \mathbf{v}\right] = 0$$

Luego, como $\vec{\nabla} f\left(\mathbf{x}_0\right)\cdot \mathbf{v}$ no depende de t y aparece la definición de derivada direccional, concluimos la siguiente proposición:

Proposición: Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{v}$ unitario, entonces se tiene que:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\left(\mathbf{x}_0\right) = \vec{\nabla} f\left(\mathbf{x}_0\right)\cdot \mathbf{v}} \tag{1.8}$$

Cabe notar que esto **solo** se cumple si la función es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Problema 1.16

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,(1-\cos y)\,\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ a, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

(a) Determine a de modo que la función sea continua en el origen.

(b) ¿Es la función diferenciable en el origen? Justifique sus resultados.

(c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$ para $\mathbf{v}$ unitario cualquiera.

Solución:

(a) Debemos escoger a de modo que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,(1-\cos\,y)\,\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4} = a$$

Tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,(1-\cos\,y)\,\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-\cos\,y)}{y^2}\,\frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}$$

El primer límite es conocido y vale $1/2$. El segundo lo calculamos mediante sustitución polar:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,|r|}{r^2\cos^2\theta + r^4\,\mathrm{sen}^4\,\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\,|r|\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^4\,\theta}$$

Debido a que el denominador no se anula para ningún valor de θ (incluso en $\theta = \pi/2$) ya que solo aparecen términos positivos. Concluimos que para cualquier valor de r el límite es cero.

Realicemos esta demostración de una forma más elegante tomando el módulo. Para ello notamos que:

$$0 \leq \left| \frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4} \right|$$

A partir de la axiomática real tenemos que $(|a| - |b|)^2 \geq 0$. Expandiendo el cuadrado se deduce que $a^2 + b^2 \geq 2\,|ab|$. Haciendo $a = x$ y $b = y^2$ tenemos que:

$$x^2 + y^4 \geq 2\,|x|\,y^2$$

Con lo cual,

$$0 \leq \left| \frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4} \right| \leq \frac{|x|\,y^2\sqrt{x^2+y^2}}{2\,|x|\,y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

Como ambos extremos tienden a cero cuando $(x,y) \to (0,0)$ concluimos entonces que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,(1-\cos\,y)\,\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4} = \boxed{a=0}$$

(b) Calculamos las derivadas parciales en el origen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 \end{aligned}$$

Luego, aplicando la observación que hicimos antes de comenzar los problemas de diferenciabilidad, reemplazamos con los valores de f, $\mathbf{h}$ y $\mathbf{x}_0$ y por lo tanto la función es diferenciable si y solo si:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\,(1-\cos\,k)\,\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^4)} = 0$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\,(1-\cos\,k)\,\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^4)} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1-\cos\,k)}{k^2}\frac{hk^2}{h^2+k^4} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{h^2+k^4} \end{aligned}$$

Con $(t,0)$ y $(0,t)$ el límite vale cero. Con (t,t) tenemos el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{1+t^2} = 0$$

Dado que el aporte de h es la mitad en grado que el de k, dejamos la expresión simétrica con la curva (t^2,t), obteniendo así el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

Luego, el límite no existe y por lo tanto la función **no es diferenciable** en el origen.

(c) Dado que la función no es diferenciable, **no** podemos aplicar la propiedad de que:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

Entonces, para calcular las derivadas direccionales en el origen hagámoslo por definición y para ello tomamos la dirección unitaria en función del ángulo:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Con esto calculamos la derivada direccional en el origen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\theta) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t\cos\theta\left[1-\cos(t\operatorname{sen}\theta)\right]|t|}{t^2\cos^2\theta + t^4\operatorname{sen}^4\theta} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\cos\theta\left[1-\cos(t\operatorname{sen}\theta)\right]|t|}{t^3\left(\cos^2\theta + t^2\operatorname{sen}^4\theta\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\theta}{\left(\cos^2\theta + t^2\operatorname{sen}^4\theta\right)} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t\operatorname{sen}\theta)|t|}{t^2} \\
&= \frac{1}{\cos\theta} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t\operatorname{sen}\theta)}{t^2\operatorname{sen}^2\theta}|t|\operatorname{sen}^2\theta \\
&= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{2} \times 0 \times \operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0}$$

en todo punto.

Problema 1.17 Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^k}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Determine k de modo que f sea continua en $(0,0)$.

(b) Determine k de modo que f sea diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

(a) Asumamos que la función es efectivamente continua. Entonces, debe cumplirse que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^k}{x^2+y^2} = 0$$

Este problema no lo podemos hacer tomando el módulo, ya que si este no da cero, esto no nos garantiza que efectivamente el límite en cuestión no sea cero (que el límite del módulo sea cero es una condición suficiente, no necesaria). La mejor forma, y la más simple de trabajar es mediante

la sustitución a coordenadas polares, i.e.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

De modo que el límite se convierte en:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^k}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta \cdot r^k \,\mathrm{sen}^k\,\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \\ &= \lim_{r\to 0} r^{k-1}\,\mathrm{sen}^k\,\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que lograr que:

$$\lim_{r\to 0} r^{k-1}\,\mathrm{sen}^k\,\theta\cos\theta = 0$$

Observe que para lograr el término r^{k-1} tiene que tender a cero para anular los distintos valores que pueden tomar el seno y el coseno. Por lo tanto, notamos que:

- Si $k < 1$ el límite diverge, por lo cual este subconjunto no sirve.
- Si $k = 1$, entonces la función pasa a ser solamente una función de θ, por lo cual el límite no existe.
- Si $k > 1$ el límite converge a 0 indistintamente del valor de θ. Este intervalo nos sirve.

Luego, el conjunto de k para los cuales $f(x,y)$ es continua es:

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \{k \in \mathbb{R} \,:\, k > 1\}}$$

(b) Partimos haciendo una importante observación para validar los resultados. Observe que el conjunto $\mathcal{S}_2$ de los k para los cuales $f(x,y)$ es diferenciable en el origen:

$$\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}_1$$

Pues una condición necesaria para que la función sea diferenciable es que sea continua.

Recordamos la definición de diferenciabilidad para aplicarla y obtener condiciones en k. Para ello requerimos calcular el diferencial de f en el origen, lo cual a su vez requiere calcular las derivadas parciales. Tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

Como $k > 1$, siempre se cumplirá que $f(h,0) = 0$ como consecuencia de que $y = 0$. Es decir, $f_x(0,0) = 0$. Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Luego, la función es diferenciable si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) + \vec{\nabla} f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Reemplazando, si la función es diferenciable deberá cumplir que:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv^k}{\left(u^2+v^2\right)^{3/2}} = 0$$

Se reemplazó el (h,k) convencional por (u,v) para evitar conflictos con la letra involucrada. Haciendo nuevamente la sustitución trigonométrica tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv^k}{\left(u^2+v^2\right)^{3/2}} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\cdot r^k \operatorname{sen}^k\theta}{r^3} \\ &= \lim_{r\to 0} r^{k-2}\cos\theta\operatorname{sen}^k\theta\end{aligned}$$

Luego, bajo el mismo razonamiento que el problema anterior, concluimos inmediatamente que:

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \{k\in\mathbb{R} \,:\, k>2\}}$$

Problema 1.18 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,1), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,1). \end{cases}$$

(a) Calcule f_x y f_y en todo punto $\mathbb{R}^2$.

(b) Pruebe que f es diferenciable en todo punto en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

(a) Procedemos de forma análoga, a como ya hemos hecho. Aplicando reglas de derivación llegamos a que:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,1)} = \frac{x(y-1)\left[x^2+2(y-1)^2\right]}{\left[x^2+(y-1)^2\right]^{3/2}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,1)} = \frac{x^4}{\left[x^2+(y-1)^2\right]^{3/2}}$$

El desarrollo detallado solo requiere el dominio y práctica de las reglas de diferenciación, conocidas ya desde el cálculo de una variable. Se dejan propuestos los cálculos al lector. Luego, aplicando la definición se puede obtener de forma inmediata que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,1)}{h} = 0$$

(b) El problema se separa en demostrar que la función es diferenciable en todo punto distinto a $(0,1)$ y en $(0,1)$.

Para todo punto distinto a $(0,1)$ conocemos las derivadas parciales, y podemos afirmar sin mayor dificultad que estas son continuas por ser una composición de funciones polinomiales, de acuerdo a las proposiciones vistas en clases. Luego, como ambas derivadas parciales son continuas para todo $\mathbf{x} \neq (0,1)$, concluimos que f es diferenciable en dichos puntos.

Nos queda el caso $(x,y) = (0,1)$. f es diferenciable por definición en $(0,1)$ si y solo si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,1+k) - f(0,1) - \vec{\nabla} f(0,1) \cdot (h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Reemplazando, el problema es equivalente a demostrar que el siguiente límite es cero:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k}{h^2+k^2} = 0$$

En efecto, como la expresión de arriba es de orden 3 y la de abajo de orden 2, el límite efectivamente debe ser cero. Podemos usar la sustitución polar, o bien como ya hemos hecho muchas veces, notar que:

$$0 \leq \left| \frac{h^2 k}{h^2+k^2} \right| \leq \left| \frac{h^2 k}{h^2} \right| = |k|$$

Como ambos extremos tienden a cero, concluimos entonces por teorema del sándwich que el límite es cero y por lo tanto la función sí es diferenciable en $(0,1)$.

De esta forma concluimos que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

Problema 1.19 Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) ¿Es la función diferenciable en el origen? Justifique sus resultados.

(b) Calcule la derivada direccional de $f(x,y)$ en el origen para una dirección unitaria cualquiera.

(c) Determine la dirección en que la derivada direccional es máxima.

Solución:

(a) Dada la definición de diferenciabilidad que vimos en el problema anterior, requerimos calcular el vector gradiente para obtener nuestros resultados. Calculamos cada una de las derivadas parciales en el origen mediante la definición:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, $\vec{\nabla} f(0,0) = (0,0)$. Luego, de acuerdo a la definición, la función es diferenciable si se cumple que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Este límite no existe ya que para las curvas $(t,0)$ y $(0,t)$ el resultado es cero. En cambio, para la curva (t,t) da como resultado un número distinto de cero. Por lo tanto, la función **no es diferenciable** en el punto.

(b) Tenemos que calcular la derivada direccional en el origen. Como a priori no sabemos si la función es diferenciable o no en el origen, aplicamos la definición de derivada direccional:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

con f dado que $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. Como estamos trabajando en $\mathbb{R}^2$, una dirección cualquiera también puede ser representada en coordenadas polares, de modo que:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

con θ arbitrario. Si resolvemos este problema para θ cualquiera, lo habremos resulto para cualquier dirección. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(t\cos\theta, t\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - f\left(0,0\right)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^2\cos^2\theta\cdot t\,\mathrm{sen}\,\theta}{t\cdot t^2}\\ &= \cos^2\theta\cdot\mathrm{sen}\,\theta\\ &= v_1^2 v_2\end{aligned}$$

donde θ representa el ángulo de inclinación con respecto al eje x en sentido antihorario.

(c) Es sabido que si f es diferenciable, entonces la derivada direccional corresponde a:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \vec{\nabla} f\cdot\mathbf{v}$$

y la dirección de máximo crecimiento corresponde al gradiente. Como todavía no hemos garantizado la diferenciabilidad de la función, debemos recurrir a otros métodos. Observe que:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\left(\theta\right) = \varphi\left(\theta\right)$$

Luego, podemos derivar con respecto a θ e igualar a cero para encontrar donde la derivada direccional es máxima, obteniendo así,

$$\varphi'\left(\theta\right) = -2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^3\theta$$

Igualando a cero:

$$\cos^3\theta - 2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 0 \to \cos\theta\left(\cos^2\theta - 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) = 0$$

Un caso probable es que $\cos\theta = 0$, lo cual inmediatamente anula la derivada direccional, por lo cual no puede corresponder a un máximo. El otro caso probable es:

$$\cos^2\theta - 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 0 \leftrightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{2}$$

Solo consideramos la rama positiva, ya que en caso contrario obtendríamos un ángulo negativo por la imparidad de la tangente, y como consecuencia una dirección de crecimiento negativa, la cual no puede corresponder a un máximo. Por lo tanto, la solución es

$$\boxed{\theta_0 = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Problema 1.20 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)\,y}{x^\alpha}, & \text{si } 0 < y < x, \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine los valores de f tales que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Solución:

Observe que la función vale $(x-y)\,y/x^\alpha$ para todo punto (x,y) cuya coordenada y está bajo la recta $y = x$ y se encuentra en el primer cuadrante (pues $x, y > 0$). Se propone al lector graficar este resultado.

Luego, no tenemos que garantizar la continuidad de la función solo en el origen, sino que también tenemos que hacerlo en todo punto donde ocurre cambio de tramos. Estos son:

- La línea diagonal.
- El origen.
- La línea horizonal.

Partamos notando que $(x-y)\,y$ y x^α son funciones continuas para todo (x,y) tal que $0 < y < x$, y para cualquier valor de α, puesto que $x > 0$ en este tramo. Luego, como $x^\alpha \neq 0$ entonces tenemos que

$$\frac{(x-y)\,y}{x^\alpha} \text{ es continua para todo } 0 < y < x$$

En otro caso tenemos la función constante 0 que es evidentemente continua. Con esto se garantiza la continuidad en los tramos por separado de la función. Ahora observemos qué ocurre en los casos límite. Partamos estudiando el cambio de tramo en la línea $y = x$. En particular, tenemos que estudiar qué ocurre en los puntos de la forma (a,a) con $a > 0$. f será continua en estos puntos si:

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = f(a,a) = 0$$

Si tomamos cualquier curva $\varphi(t)$ tal que $x(t) \geq y(t)$ tendremos inmediatamente por la definición de la función que el límite en efecto es cero. Por lo tanto, solo resta probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{(x-y)\,y}{x^\alpha} = f(a,a) = 0$$

Pero ya vimos que $(x-y)\,y/x^\alpha$ es continua para todo $x, y \neq 0$. Luego,

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{(x-y)\,y}{x^\alpha} = \frac{(a-a)\,a}{a^\alpha} = 0$$

Hasta ahora todo valor de α es posible. Probemos ahora sobre la línea horizontal, es decir, en el caso en que $y = 0$. α debe ser tal que el límite en cualquier punto de la línea $(a, 0)$ con $a > 0$ sea:

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{(x-y)\,y}{x^\alpha} = f\,(a,0) = 0$$

Pero,

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{(a-0)\,a}{a^\alpha} = 0$$

la cual no se indetermina nunca salvo en el caso $a = 0$. Por lo tanto, analizar la continuidad en esta línea tampoco es concluyente sobre el valor de a.

Deberemos imponer restricciones a partir del caso final. Queda estudiar la continuidad en $(0, 0)$. En particular, f será continua en el origen si:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y) = f(0,0) = 0$$

Nuevamente, si tomamos la curva $\varphi(t)$ que se aproxima al origen con $x(t) \geq y(t)$ o bien desde cualquier cuadrante que no sea el primero el resultado del límite será inmediatamente cero pues la función vale cero para $x > y$.

Solo nos queda encontrar estudiar la continuidad de la función al acercarnos por el cono:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\0<y<x}} \frac{(x-y)\,y}{x^\alpha}$$

En particular, α debe cumplir que el límite anterior sea cero para garantizar la continuidad de la función. Por simple inspección notamos que si $\alpha \leq 0$ esto se garantiza inmediatamente pues en dicho caso tendríamos una función polinomial.

Si $\alpha \leq 1$ tenemos que

$$\left|\frac{(x-y)\,y}{x^\alpha}\right| \leq \frac{(|x|+|y|)}{|x|^\alpha}\,|y| \leq \frac{|x|}{|x|^\alpha}\,|y| = |x|^{1-\alpha}\,|y|$$

Luego, como la función de la derecha siempre tiende a cero para $\alpha \in [0, 1]$, concluimos que en dicho caso

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\0<y<x}} \left|\frac{(x-y)\,y}{x^\alpha}\right| = 0 \to \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\0<y<x}} \frac{(x-y)\,y}{x^\alpha} = 0$$

Para $\alpha > 1$ hagamos la sustitución polar conocida:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\0<y<x}} \frac{(x-y)\,y}{x^\alpha} = \lim_{\substack{r\to0\\0<\theta<\frac{\pi}{4}}} r^{2-\alpha}\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos^\alpha\theta}\operatorname{sen}\theta$$

Este límite solo converge para todo valor de θ en el cono $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ si y solo si $2 - \alpha > 0$ con lo cual $\alpha < 2$. Finalmente, concluimos que la condición pedida es

$$\boxed{\alpha < 2}$$

Para cerrar el estudio de diferenciabilidad de funciones y adquirir un adecuado dominio de los conceptos de diferenciabilidad, se recomienda encarecidamente revisar este problema:

Problema 1.21 Considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Estudie la continuidad en el origen de cada una de las derivadas parciales.

(c) Demuestre que $f(x,y)$ es diferenciable en el origen.

(d) ¿Invalida este resultado el teorema que continuidad en las derivadas parciales? Explique.

Solución:

(a) Siguiendo la idea de un ejercicio anterior, derivamos para cada tramo por separado. Primero, para $(x,y) \neq (0,0)$ lo hacemos por reglas de derivación:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Por simetría de la función,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Calculamos las derivadas en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right)$$

Es fácil notar aplicando el teorema del sándwich que

$$\lim_{h\to 0} h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0$$

Luego, nuevamente bajo el argumento de simetría se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Finalmente,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) De acuerdo a lo estudiado de continuidad, es necesario calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

y determinar si su valor es igual a $f(0,0)$. Observe que si nos acercamos por $(0,t)$ el límite es inmediatamente cero. Al acercanos por $(t,0)$ tenemos el límite:

$$\lim_{t\to 0} 2t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{t}{|t|} \cos\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

Observe que este límite no existe por efecto del segundo término: $t/|t|$ no existe por los límites laterales e incluso oscila sin tender a cero como consecuencia del coseno.

Concluimos entonces que f_x no es continua en el origen. Dada la simetría de la función, podemos concluir exactamente lo mismo de f_y. Luego, **ninguna de las derivadas parciales es continua en el origen.**

(c) f es diferenciable en el origen si y solo si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \vec{\nabla} f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Expandiendo el límite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \vec{\nabla} f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

Es evidente, dada la aparición del seno, que podemos utilizar el truco habitual del teorema del sándwich ya visto en cálculo de una variable. Notando que:

$$-\sqrt{h^2+k^2} \leq \sqrt{h^2+k^2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) \leq \sqrt{h^2+k^2}$$

y como por continuidad se tiene que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0$, concluimos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0$$

con lo cual la función **sí es diferenciable** en el origen.

(d) Este resultado no invalida en lo absoluto el teorema de las derivadas parciales continuas. Este enuncia que si todas las derivadas parciales de f son continuas en $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Sin embargo, acabamos de ver con un ejemplo que f sea diferenciable en $\mathbf{x}_0$ no garantiza la continuidad de sus derivadas parciales. Es decir, perfectamente las derivadas parciales pueden ser discontinuas. Esto prueba que la relación entre ambas afirmaciones del teorema **corresponden a una implicancia y no a una equivalencia**. En resumen,

$$\boxed{\text{derivadas parciales continuas en } \mathbf{x}_0 \implies f \text{ diferenciable en } \mathbf{x}_0}$$

Problema 1.22 Decida justificadamente si la siguiente función es continua, diferenciable y/o de clase $\mathcal{C}^1$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Solución:

Respondámonos la pregunta sobre si la función es de clase $\mathcal{C}^1$, pues si lo es será diferenciable y continua. Eso aliviana la carga de trabajo significativamente.

Por álgebra de funciones diferenciables, sabemos que la función será diferenciable para todo $(x,y) \neq (0,0)$ pues se trata de una composición de funciones sabidamente diferenciables.

Ahora bien, solo nos resta analizar la diferenciabilidad en $(0,0)$. Para ello, partamos calculando las derivadas parciales en el origen:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Aplicando ahora la definición de diferenciabilidad, f es diferenciable si:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)\,h - f_y(0,0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Pero, el límite de arriba es igual a:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Ahora bien, si tomamos $(t,0)$ y $(0,t)$ el límite es cero, pero si tomamos (t,t) el límite no se anula. Por lo tanto, la función no es $\mathcal{C}^1$ ni diferenciable en el origen.

Luego, nos queda determinar solamente si la función es continua en el origen. Para ello, evaluamos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Pero,

$$0 \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{xy^2}{y^2}\right| \leq |x|$$

Luego, por teorema del sándwich el límite es cero, y por lo tanto la función sí es continua en el origen.

Ejercitemos un poco las reglas de derivación en derivadas parciales con el siguiente problema:

Problema 1.23 Se define la función $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$.

Determine el valor de

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

Solución:

Calculamos las derivadas parciales respectivas mediante reglas de derivación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= n\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^{n-1}\frac{(x+y-z)-(x-y+z)}{(x+y-z)^2}\\ &= n\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^{n-1}\frac{2(y-z)}{(x+y-z)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= n\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^{n-1}\frac{-(x+y-z)-(x-y+z)}{(x+y-z)^2}\\ &= -n\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^{n-1}\frac{2x}{(x+y-z)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= n\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^{n-1}\frac{(x+y-z)+(x-y+z)}{(x+y-z)^2}\\ &= n\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^{n-1}\frac{2x}{(x+y-z)^2}\end{aligned}$$

Luego,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=n\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^{n-1}\frac{2x(y-z)-2xy+2xz}{(x+y-z)^2}$$

Con lo cual,

$$\boxed{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0}$$

1.4.1. Regla de la cadena

Antes de partir este problema enunciaremos la Regla de la Cadena para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

Teorema: Si f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$ tal que $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde cada x_i es una función diferenciable en $\mathbb{R}^m$ tal que $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_k}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_k}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial y_k}\quad k\in\{1,\ldots,m\} \tag{1.9}$$

La demostración de este teorema suele dejarse pendiente hasta que se estudien las funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donde este resultado aparece de forma natural. Lo importante ahora es la adecuada comprensión de este teorema. Recuerde la regla de la cadena en una sola variable:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

donde agregamos "un término entre medio". Al hacerlo en varias variables siempre conservamos la variable en el segundo término, solo agregamos entre medio todas las variables sobre las cuales f es directamente función.

Consideramos adicionalmente el Lema de Schwarz, el cual plantea que una función de clase $\mathcal{C}^2$ cumple que:

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \tag{1.10}$$

Este lema será útil para realizar simplificaciones en las expresiones que puedan aparecer.

Problema 1.24 Sea $f(u,v,w)$ una función con derivadas parciales continuas de orden 1 y 2 y sea $g(x,y) = f(x+y, x-y, xy)$. Calcule $g_{xx} + g_{yy}$ en términos de derivadas de $f(u,v,w)$.

Solución:

Estamos calculando entonces la regla de la cadena para $f(u,v,w)$, donde $u(x,y) = x+y$, $v(x,y) = x-y$ y $w(x,y) = xy$. Empleamos la regla de la cadena, primero en su expresión general. Digamos $\mathbf{x}_0 = (x+y, x-y, xy)$ con el único propósito de compactar notación, de modo que:

$$g_x(x,y) = f_u(\mathbf{x}_0)\, u_x(x,y) + f_v(\mathbf{x}_0)\, v_x(x,y) + f_w(\mathbf{x}_0)\, w_x(x,y)$$

Luego, calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 1 \\ v_x(x,y) &= 1 \\ w_x(x,y) &= y \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$g_x(x,y) = f_u(\mathbf{x}_0) + f_v(\mathbf{x}_0) + y f_w(\mathbf{x}_0)$$

Debemos derivar nuevamente, y esto es lo que genera cierta dificultad en la comprensión de los problemas. Observe, a modo de ejemplo, que $f_u = f_u(u,v,w)$ (sigue dependiendo de las tres variables originales). A su vez, como u, v y w son funciones de x, y y z, debemos aplicar nuevamente de forma pertinente la regla de la cadena en cada caso. De esta forma se tiene que:

$$g_{xx}(x,y) = f_{uu}u_x + f_{uv}v_x + f_{uw}w_x + f_{vu}u_x + f_{vv}v_x + f_{vw}w_x + y(f_{wu}u_x + f_{wv}v_x + f_{ww}w_x)$$

Reemplazando con los valores de las derivadas parciales y reagrupando:

$$g_{xx}(x,y) = (f_{uu} + f_{vu}) + (f_{uv} + f_{vv}) + y(f_{wu} + f_{wv} + f_{uw} + f_{vw}) + y^2 f_{ww}$$

Ahora hacemos lo mismo para $g_{yy}(x,y)$, teniendo las mismas ideas en mente:

$$g_y(x,y) = f_u u_y + f_v v_y + f_w w_y$$

Donde:

$$u_y = 1 \quad , \quad v_y = -1 \quad w_y = x$$

Con lo cual,

$$g_y(x,y) = f_u - f_v + x f_w$$

$$\begin{aligned} \rightarrow g_{yy}(u,v) &= f_{uu}u_y + f_{uv}v_y + f_{uw}w_y - (f_{vu}u_y + f_{vv}v_y + f_{vw}w_y) + x(f_{wu}u_y + f_{wv}v_y + f_{ww}w_y) \\ &= f_{uu} - f_{uv} + x f_{uw} - f_{vu} + f_{vv} - x f_{vw} + x f_{wu} - x f_{wv} + x^2 f_{ww} \end{aligned}$$

Reordenando,

$$g_{yy}(u,v) = (f_{uu} - f_{vu}) - (f_{uv} - f_{vv}) + x(f_{uw} - f_{vw} + f_{wu} - f_{wv}) + x^2 f_{ww}$$

Considerando el Lema de Schwarz, y el hecho de que la función es de clase $\mathcal{C}^2$ tenemos entonces que $f_{uv} = f_{vu}$, $f_{vw} = f_{wv}$, $f_{uw} = f_{wu}$:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= f_{uu} + 2f_{uv} + f_{vv} + 2y(f_{uw} + f_{vw}) + y^2 f_{ww} \\ g_{yy} &= f_{uu} - 2f_{uv} + f_{vv} + 2x(f_{uw} - f_{vw}) + x^2 f_{ww} \end{aligned}$$

Finalmente, sumando:

$$\boxed{g_{xx} + g_{yy} = 2f_{uu} + 2f_{vv} + 2(x+y) f_{uw} - 2(x-y) f_{vw} + \left(x^2 + y^2\right) f_{ww}}$$

Problema 1.25 Sea $g(x,y,z) = f\left(\dfrac{y^2 - x}{xy^2}, \dfrac{z^3 - x}{xz^3}\right)$ con $f(u,v)$ de clase $\mathcal{C}^2$.

(a) Demuestre que $x^2 g_x + \dfrac{y^3}{2} g_y + \dfrac{z^4}{3} g_z = 0$.

(b) Suponga que $f(u,v)$ satisface $f_{uu} + 2f_{uv} + f_{vv} = 0$.
Exprese g_{xx} en términos de x, y, z y de las derivadas parciales de f.

Solución:

(a) Nuevamente, aplicamos regla de la cadena para efectuar correctamente la derivación. Sea

$$u(x,y,z) = \frac{y^2 - x}{xy^2} \quad \text{y} \quad v(x,y,z) = \frac{z^3 - x}{xz^3}$$

Luego,

$$g_x = f_u u_x + f_v v_x$$

Calculamos u_x y v_x:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2-x}{xy^2} = \frac{-xy^2-(y^2-x)\,y^2}{x^2y^4} \\ &= -\frac{y^2\,(x+y^2-x)}{x^2y^4} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{-xz^3-z^3\,(z^3-x)}{x^2z^6} = \frac{-z^3\,(x+z^3-x)}{x^2z^6} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{g_x = -\frac{1}{x^2}\,(f_u+f_v)}$$

Análogamente,

$$g_y = f_u u_y + f_v v_y$$

Derivando,

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{2y\,(xy^2)-2yx\,(y^2-x)}{x^2y^4} = 2xy\frac{y^2-y^2+x}{x^2y^4} \\ &= \frac{2}{y^3} \end{aligned}$$

$$v_y = 0 \leftarrow \text{no es función de } y$$

Con ello,

$$\boxed{g_y = \frac{2}{y^3}f_u}$$

El mismo procedimiento para z:

$$g_z = f_u u_z + f_v v_z$$

Obteniendo las derivadas parciales:

$$u_z = 0 \leftarrow \text{no es función de } z$$

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{3z^2\,(xz^3)-3z^2x\,(z^3-x)}{x^2z^6} = 3z^2x\frac{z^3-z^3+x}{x^2z^6} \\ &= \frac{3}{z^4} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{g_z = \frac{3}{z^4}f_v}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x^2 g_x + \frac{y^3}{2} g_y + \frac{z^4}{3} g_z &= -(f_u + f_v) + f_u + f_v \\ &= 0 \end{aligned}$$

demostrando así lo pedido. ■

(b) Sabemos ya que:

$$g_x = -\frac{1}{x^2}(f_u + f_v)$$

Con ello,

$$g_{xx} = \frac{2}{x^3}(f_u + f_v) - \frac{1}{x^2}(f_{uu}u_x + f_{uv}v_x + f_{vu}u_x + f_{vv}v_x)$$

Ya sabemos el valor de las derivadas parciales, en particular sabemos por el Lema de Schwarz que $f_{uv} = f_{vu}$ y que $u_x = v_x$, de modo que:

$$g_{xx} = \frac{2}{x^3}(f_u + f_v) + \frac{1}{x^4}(f_{uu} + \cancel{2f_{uv} + f_{vv}})$$

donde se canceló el segundo término por la información del enunciado. Con ello concluimos que:

$$\boxed{g_{xx} = \frac{2}{x^3}(f_u + f_v)}$$

Problema 1.26 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y definimos $g(u,v) = f(x,y)$ donde $x = u + v$, $y = uv^2$. Suponiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

en $(x,y) = (2,1)$. Calcule $\vec{\nabla}^2 g(1,1) = g_{uu}(1,1) + g_{vv}(1,1)$.

Solución:

Dado que es explícito lo que se está pidiendo calcular, no tenemos más opción que hacerlo. Partiendo por la variable u:

$$g_u = f_x x_u + f_y y_u$$

pero $x_u = 1$ e $y_u = v^2$, con lo cual

$$g_u = f_x + v^2 f_y \to g_{uu} = f_{xx}x_u + f_{xy}y_u + v^2(f_{yx}x_u + f_{yy}y_u)$$

Es decir

$$g_{uu}(u,v) = f_{xx}(u,v) + v^2 f_{xy}(u,v) + v^2 f_{yx}(u,v) + v^4 f_{yy}(u,v)$$

El lector puede sentir muchas dudas respecto a por qué se expresaron las derivadas parciales de f en función de u y v y no de de x e y como podría pensarse. Observe que en la definición de la función en el enunciado se dice que x e y pueden escribirse como funciones de u y v (estas de hecho salen explícitas), razón por la cual si bien es correcto afirmar que las derivadas parciales dependen de x e y, también es correcto afirmar que dependen de u y v por esta definición, lo cual nos es en efecto práctico para calcular lo que efectivamente se pide.

Pues bien, haciendo $u = v = 1 \rightarrow x = 2$ e $y = 1$. Luego, basta reemplazar con la información del enunciado:

$$g_{uu}(1,1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Análogamente,

$$g_v = f_x x_v + f_y y_v$$

con $x_v = 1$ e $y_v = 2uv$. Entonces,

$$g_v = f_x + 2uvf_y \rightarrow g_{vv} = f_{xx}x_v + f_{xy}y_v + 2uf_y + 2uv\left(f_{yx}x_v + f_{yy}y_v\right)$$

Es decir,

$$g_{vv} = f_{xx} + 2uvf_{xy} + 2uf_y + 2uvf_{yx} + 4u^2v^2f_{yy}$$

Reemplazando con $u = v = 1$, concluimos que:

$$g_{vv}(1,1) = 1 + 2 + 4 + 2 + 4 = 13$$

y finalmente

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 g(1,1) = 4 + 13 = 17}$$

Problema 1.27 Considere una función $\omega(u,v)$. Se realiza la sustitución $u = x+y^2$, $v = x/y^2$.

(a) Escriba las derivadas ω_x y ω_y en términos de ω_u, ω_v, x e y.

(b) Escriba $x\omega_x + \dfrac{1}{2}y\omega_y$ en términos de ω_u y ω_v. Escriba los coeficientes como funciones de u y v.

Solución:

(a) Al igual que en los problemas anteriores, estos ejercicios no requieren nada además de ser ordenado y tener claridad en el uso de la regla de la cadena. Como $\omega = \omega(u,v)$, $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, entonces aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_u u_x + \omega_v v_x \\ \omega_y &= \omega_u u_y + \omega_v v_y \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$u_x = 1 \qquad v_x = \frac{1}{y^2}$$

$$u_y = 2y \qquad v_y = -\frac{2x}{y^3}$$

Es decir,

$$\boxed{\omega_x(x,y) = \omega_u(u(x,y), v(x,y)) + \frac{1}{y^2}\omega_v(u(x,y), v(x,y))}$$

$$\boxed{\omega_y(x,y) = 2y\omega_u(u(x,y), v(x,y)) - \frac{2x}{y^3}\omega_v(u(x,y), v(x,y))}$$

(b) Reemplazamos:

$$x\omega_x + \frac{y}{2}\omega_y = x\omega_u + \frac{x}{y^2}\omega_v + y^2\omega_u - \frac{x}{y^2}\omega_v$$

Escribiendo como funciones de u y v:

$$\boxed{x\omega_x + \frac{y}{2}\omega_y = \left(x + y^2\right)\omega_u = u\omega_u}$$

Trabajaremos ahora la regla de la cadena con expresiones de orden 2. En particular, con un operador conocido como Laplaciano, el cual se expresa haciendo abuso de notación como:

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.11}$$

Con lo cual:

$$\vec{\nabla}^2 f = \triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.12}$$

Es perfectamente expandible (pero poco usado en la práctica) a $\mathbb{R}^n$. Muchas leyes físicas quedan descritas como ecuaciones diferenciales parciales en términos del laplaciano de una función. Ejemplos de ellas son:

- La ecuación de onda: *(óptica, electricidad y magnetismo, sonido, física cuántica)*

$$\vec{\nabla}^2 f = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

- La ecuación de calor: *(ondas, calor, termodinámica)*

$$\vec{\nabla}^2 f = k \frac{\partial f}{\partial t}$$

- La ecuación de Laplace: *(electromagnetismo)*

$$\vec{\nabla}^2 f = 0$$

- La ecuación de Poisson: *(electromagnetismo)*

$$\vec{\nabla}^2 f(x,y,z) = \rho(x,y,z)$$

Hay que realizar un importante comentario: este es un operador espacial, no temporal, por lo cual en problemas físicos de la forma $f(x,y,z,t)$ el laplaciano de f solo considera las variables x, y y z.

Problema 1.28 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{\nabla}^2 f = 0$ para todo $(u,v) \in \Omega$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi(x,y) = f(x-y, x+y)$. Calcule $\vec{\nabla}^2 \varphi$.

Solución:

Tenemos que:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

Calculamos cada una de las derivadas parciales aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= f_u u_x + f_v v_x \\ \varphi_y &= f_u u_y + f_v v_y \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales de u y v:

$$u_x = 1 \quad v_x = 1$$

$$u_y = -1 \quad v_y = 1$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \varphi_x &= f_u + f_v \\ \varphi_y &= -f_u + f_v \end{aligned}$$

Derivando nuevamente,

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= f_{uu} u_x + f_{uv} v_x + f_{vu} u_x + f_{vv} v_x \\ \varphi_{yy} &= -(f_{uu} u_y + f_{uv} v_y) + f_{vu} u_y + f_{vv} v_y \end{aligned}$$

A la luz del Lema de Schwarz (implícitamente estamos trabajando con funciones de clase $\mathcal{C}^2$) se tiene que $f_{uv} = f_{vu}$, y reemplazando con las derivadas parciales de u y v se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= f_{uu} + 2f_{uv} + f_{vv} \\ \varphi_{yy} &= f_{uu} - 2f_{uv} + f_{vv} \end{aligned}$$

Sumando,

$$\vec{\nabla}^2\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 2\left(f_{uu} + f_{vv}\right) = 2\vec{\nabla}^2 f$$

Como $\vec{\nabla}^2 f = 0$, entonces $\boxed{\vec{\nabla}^2\varphi = 0}$. Concluimos entonces que las transformaciones lineales conservan una ley física.

Problema 1.29 Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que

$$\triangle f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

y considere

$$z(u,v) = e^u \cos v + f(u+v, u-v)$$

Determine el valor de $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}(u,v) + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}(u,v)$, $\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

Es claro que en f estamos haciendo $x = u+v$, $y = u-v$. Luego, utilizando la regla de la cadena se tendrá que:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^u \cos v + f_x x_u + f_y y_u = e^u \cos v + f_x + f_y$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= e^u \cos v + f_{xx}x_u + f_{xy}y_u + f_{xy}x_u + f_{yy}y_u \\ &= e^u \cos v + f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy} \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -e^u \operatorname{sen} v + f_x x_v + f_y y_v = e^{-u} \operatorname{sen} v + f_x - f_y$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= -e^u \cos v + f_{xx}x_v + f_{yx}y_v - f_{yx}x_v - f_{yy}y_v \\ &= -e^u \cos v + f_{xx} - 2f_{yx} + f_{yy} \end{aligned}$$

Sumando, y notando que como f es $\mathcal{C}^2$ entonces $f_{xy} = f_{yx}$ por el lema de Schwarz. Entonces,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 2\left(f_{xx} + f_{yy}\right)$$

Como por hipótesis estos términos son cero, concluimos que:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0}$$

Finalizamos esta sección con un problema de elevada dificultad dada la comprensión que se requiere

del enunciado:

Problema 1.30 Suponga que $f(x,y,z)$ es una función tal que $\vec{\nabla} f(7,-8,1) = (2,3,1)$ y que $z = z(x,y)$ es la raíz de la ecuación cúbica $z^3 + xz + y = 0$. Existe una única raíz para $x > 0$ en $(x,y) = (7,-8)$, de modo que $z = 1$. Si $g(x,y) = f(x,y,z(x,y))$, encuentre $\vec{\nabla} g$ en $(7,-8)$.

Solución:

Tenemos que $\vec{\nabla} g = (g_x, g_y)$. Calculamos cada una de las derivadas parciales, considerando que $f = f(u,v,w)$ donde $u = u(x)$, $v = v(y)$ y $w = z = z(x,y)$:

$$\begin{aligned} g_x &= f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x = f_u + f_w w_x \\ g_y &= f_u u_y + f_v v_y + f_w w_y = f_v + f_w w_y \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$z^3 + xz + y = 0 \to w^3 + wx = 0$$

Derivando implícitamente en función de x:

$$3w^2 w_x + w_x x + w = 0 \to w_x \left(3w^2 + x\right) + w = 0$$

Es decir,

$$w_x = -\frac{w}{3w^2 + x}$$

Por otra parte, de forma análoga:

$$3w^2 w_y + x w_y + 1 = 0 \to w_y = -\frac{1}{3w^2 + x}$$

Evaluando en $(x,y,z) = (7,-8,1)$:

$$\begin{aligned} w_x(7,-8) &= -\frac{1}{3+7} = -\frac{1}{10} \\ w_y(7,-8) &= -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Y con ello,

$$\begin{aligned} g_x(7,-8) &= 2 - \frac{1}{10} \\ g_y(7,-8) &= 3 - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Es decir, $\boxed{\vec{\nabla} g(7,-8) = \frac{1}{10}(19,29)}$.

Propuesto Una onda unidimensional consiste en una perturbación que se transmite a través de un medio con una velocidad c. Puede modelarse matemáticamente como una función $f(x,t)$ que depende tanto de la posición (x) como del tiempo (t).

El fenómeno físico característico de una perturbación que se transmite en el tiempo consiste en que después de un instante t, la perturbación se desplaza en el espacio ct. Es decir,

$$f(x,t) = f(x-ct,0)$$

A partir de este fenómeno físico demuestre que f satisface la *ecuación de onda*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Y luego generalice su resultado para una función $n+1$ dimensional $f(\mathbf{x},t)$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$:

$$\vec{\nabla}^2 f = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Propuesto Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ que satisface la identidad

$$3x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3f^2(x,y)$$

Considere el cambio de variables:

$$\begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{2y} \end{cases}$$

Definimos la función $g(u,v) = f[x(u,v), y(u,v)]$.

(a) Pruebe que g satisface la ecuación

$$u^2 \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g^2(u,v)$$

(b) Muestre que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$, entonces la función

$$g(u,v) = \frac{u}{1+uh(v)}$$

satisface la ecuación anterior.

Propuesto Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Considere la ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Resolveremos esta problema mediante el Método de d'Alembert:

(a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el cambio de variables definido por $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u = x + vt \\ w = x - vt \end{pmatrix}$.
Interprete geométricamente el cambio de variables propuesto y luego muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u, w) = f(\varphi(u, w))$ está bien definida y es de clase $\mathcal{C}^2$.

(b) Usando el cambio de variable anterior, demuestre que el problema anterior se convierte en la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u, w) = 0 \quad \forall\, (u, w) \in \mathbb{R}^2$$

(c) Determine la solución general de la ecuación anterior y luego deduzca una solución general para $f(x, t)$ a partir de la primera ecuación escrita. Encuentre una solución particular para f que no sea la función nula ni un polinomio.

1.5. Interpretación geométrica del gradiente

Recuerde el lector que ya demostramos anteriormente que si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0) = \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

Ahora bien, el lector puede recordar fácilmente de sus conocimientos de álgebra lineal que el producto punto es la medida de la proyección de un vector en el otro en cuanto que:

$$\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \left\| \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \right\| \|\mathbf{v}\| \cos\alpha \tag{1.13}$$

donde α es el ángulo entre ambos vectores. Es evidente entonces que el producto punto se maximiza cuando $\cos\alpha = 1$ lo cual implica que $\alpha = 0$ (o redundantemente un múltiplo entero de 2π), por lo cual el producto punto se maximiza cuando el vector y el gradiente son colineales. Es decir, **la dirección de máximo crecimiento es la dirección y sentido del gradiente**.

Análogamente, el resultado se minimiza cuando $\cos\alpha = -1 \to \alpha = \pi$, con lo que **la dirección de máximo decrecimiento es la dirección del gradiente y el sentido contrario**. Demás está insistir que este resultado es sólo válido si f es diferenciable en dicho punto.

Análogamente, observe que si $\cos\alpha = 0$, entonces la función no tiene crecimiento ni decrecimiento, i.e. permanece constante. Por lo tanto, cualquier dirección ortogonal al gradiente no cambia alterará el valor de la función.

Recuerde el lector la definición de conjunto de nivel: Un *conjunto de nivel* $\mathcal{C}$ de f es un conjunto de puntos tal que $f(\mathbf{x}) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ fijo. Luego, se sigue que el gradiente de f es ortogonal al conjunto de nivel en $\mathbf{x}$.

En resumen, para una función diferenciable:

- La dirección de máximo crecimiento es $\vec{\nabla} f$.
- La dirección de máximo decrecimiento es $-\vec{\nabla} f$.
- El gradiente en un punto dado es siempre ortogonal al conjunto de nivel que lo contiene.

Usaremos estos importantes desarrollos en los próximos problemas para interpretar correctamente el concepto de gradiente.

Problema 1.34 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva continuamente diferenciable. Si $g(t) = f(\varphi(t))$, entonces demuestre que:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \tag{1.14}$$

Interprete este resultado.

Solución:

Esta pregunta propiamente tal se puede entender como una demostración sencilla de regla de la cadena. Tenemos que si:

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

entonces

$$g(t) = f[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)]$$

Derivando por regla de la cadena,

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

pero $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_i}$ y $\dfrac{\partial x_1}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \dfrac{d\varphi_1}{dt}$ ya que la función es de una sola variable. Es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial n}\frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} \\ &= \vec{\nabla} f\left(\varphi\left(t\right)\right) \cdot \varphi'\left(t\right) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Algebraicamente este es un problema de regla de la cadena. Sin embargo, tiene una interpretación geométrica profunda. Lo que estamos haciendo es tomar una curva en $\mathbb{R}^n$ y recorrer una función escalar con esta curva. Es decir, obtenemos el valor de la función escalar en el punto de la curva, lo cual efectivamente convierte a g en una función exclusiva del tiempo.

Lo que nos estamos preguntando es, ¿cómo varía la función escalar con respecto al tiempo? Ejemplifiquémoslo con la temperatura en un instante dado en un sólido, la cual es evidentemente una función dependiente del espacio, i.e. $T = T\left(x, y, z\right)$. La dirección de máximo crecimiento de la temperatura se encuentra en $\vec{\nabla} T$. Asumiendo que la función es diferenciable, tenemos que $\varphi'\left(t\right)$ es un vector que nos indica hacia dónde está cambiando la dirección de la curva. Por lo tanto, es razonable pensar que el cambio de la temperatura en la dirección $\varphi'\left(t\right)$ viene dado por:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi'} = \vec{\nabla} T \cdot \varphi'\left(t\right)$$

lo cual es un resultado perfectamente entendible a partir de la diferenciabilidad de la función, pues no estamos tratando ante nada más que un caso especial de la derivada direccional.

Observe que si $\nabla f\left(\varphi\left(t\right)\right) \perp \varphi'\left(t\right)$, entonces $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t = 0$. Es decir, la función escalar no varía si es que nos movemos en dirección perpendicular a la dirección de máximo crecimiento, lo cual también es un resultado perfectamente imaginable en $\mathbb{R}^2$. En el contexto de la temperatura: si la temperatura aumenta en una dirección dada en una posición (x, y, z) y seguimos una dirección perpendicular a la dirección de aumento, la temperatura permanecerá constante.

Es por esta razón que aquellas curvas tales que

$$\vec{\nabla} f\left(\varphi\left(t\right)\right) \cdot \varphi'\left(t\right) = 0$$

determinan una función $g\left(t\right)$ constante (pues $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t = 0$) que se denomina *curva de nivel*, y cuya principal característica es que el gradiente es perpendicular a la curva en todo punto. Este es un resultado interesante en cuanto nos permite encontrar una ecuación para determinar curvas de nivel en la función.

Problema 1.35 Sean $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = e^{xy}$. Determine los puntos (x,y) donde la derivada direccional de f en la dirección de máximo crecimiento de g es igual a la derivada direccional de g en la dirección de máximo crecimiento de f.

Solución:

De partida, tenemos garantizado el uso de la expresión rápida para la derivada direccional gracias a la diferenciabilidad de la función, por tratarse de funciones sabidamente diferenciables (una polinomial en el caso f y una exponencial en el caso de g).

Primero determinamos las direcciones de máximo crecimiento de f y de g, que son respectivamente los gradientes:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ xe^{xy} \end{pmatrix}$$

Es decir, las direcciones de máximo crecimiento son:

$$\mathbf{v}_f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_g = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Lo que se está pidiendo en el enunciado es encontrar los puntos (x,y) tales que:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_g}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_f}(x,y)$$

Aplicando la ecuación de derivada direccional para funciones diferenciables, debe cumplirse que:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ xe^{xy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Obviando el caso trivial en que $(x,y) = (0,0)$, deberá cumplirse que:

$$4xy = 2xye^{xy} \rightarrow 2xy\left(2 - e^{xy}\right) = 0$$

Luego, $e^{xy} = 2$. Es decir, esto se cumple para aquellos (x,y) tales que:

$$\boxed{xy = \ln(2)} \quad \text{ó} \quad \boxed{(x,y) = (0,0)}$$

Problema 1.36 Considere los vectores $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ y $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(1,2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(1,2) = -2$$

Calcule $\nabla f(1,2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{w}}}(1,2)$ con $\mathbf{w} = (2,3)$.

Solución:

Este es un clásico problema de rompecabezas. Como tenemos que determinar el gradiante de una función en $\mathbb{R}^2$, entonces podemos escribir:

$$\vec{\nabla} f(1,2) = (a,b)$$

con a y b las constantes reales a determinar. ¿De dónde las podemos obtener? Las podemos obtener de ecuaciones que relacionen gradiente con la información conocida. En particular, recordarmos que para una función diferenciable:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(1,2) = 2 \to \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \hat{\mathbf{u}} = 2 \to (a,b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(1,2) = -2 \to \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \hat{\mathbf{v}} = -2 \to (a,b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = -2$$

De esta forma se generan el sistema:

$$\begin{aligned} a + b &= 2\sqrt{2} \\ a - b &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Sumando:

$$2a = 0 \to \boxed{a = 0} \to \boxed{b = 2\sqrt{2}}$$

Es decir, $\boxed{\vec{\nabla} f(1,2) = \left(0, 2\sqrt{2}\right)}$. Luego, nuevamente como f es una función diferenciable,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(1,2) = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot (2,3) = 6\sqrt{2}}$$

Problema 1.37 Sean las funciones:

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2} \quad \text{y} \quad g(x,y) = x^2 - y^2$$

Determine condiciones sobre a, b reales de modo que las curvas de nivel $f(x,y) = a$ y $g(x,y) = b$ sean ortogonales.

Solución:

Para que dos curvas de nivel sean ortogonales, entonces sus vectores tangentes deben ser ortogonales. Sin embargo, como el vector normal a una curva es perpendicular al vector tangente, entonces el problema es equivalente a encontrar curvas de nivel vectores normales son ortogonales.

Trabajaremos con esto último ya que es el resultado natural con el cual hemos estado trabajando en este apartado: el vector normal a una curva de nivel se obtiene a partir del vector gradiente. Como las curvas de nivel tienen que ser ortogonales, entonces sus vectores normales también y por lo tanto:

$$\vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{\nabla} g(x,y) = 0$$

Sin embargo, se nos escapa un punto importante: esto no debe ocurrir en todo punto, si no en aquellos puntos $(\tilde{x}, \tilde{y})$ en los cuales las curvas de nivel se intersectan, i.e.

$$\begin{aligned} f(\tilde{x},\tilde{y}) &= a \\ g(\tilde{x},\tilde{y}) &= b \end{aligned}$$

Entonces, resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2+y^2} &= a \\ x^2 - y^2 &= b \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado la primera ecuación y sumando,

$$1 + 2x^2 = a^2 + b \to x^2 = \frac{a^2+b-1}{2} \to \tilde{x} = \pm\sqrt{\frac{a^2+b-1}{2}}$$

Luego,

$$y^2 = \frac{a^2+b-1}{2} - b = \frac{a^2-b-1}{2} \to \tilde{y} = \pm\sqrt{\frac{a^2-b-1}{2}}$$

Es decir, $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ deben cumplir que:

$$\vec{\nabla} f(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot \vec{\nabla} g(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$$

Calculamos los respectivos vectores gradiente:

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(x,y) \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} g = (2x, -2y)$$

Deberá cumplirse que:

$$(x, y) \cdot (x, -y) = 0 \to \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 0$$

Recuerde que el sistema de ecuaciones impone que $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = b$, con lo cual inmediatamente $b = 0$. Luego,

$$\tilde{x} = \pm\sqrt{\frac{a^2 - 1}{2}} \quad \text{y} \quad \tilde{y} = \pm\sqrt{\frac{a^2 - 1}{2}}$$

Algo implícito aquí es el hecho de que la raíz no debe indeterminarse, con lo cual:

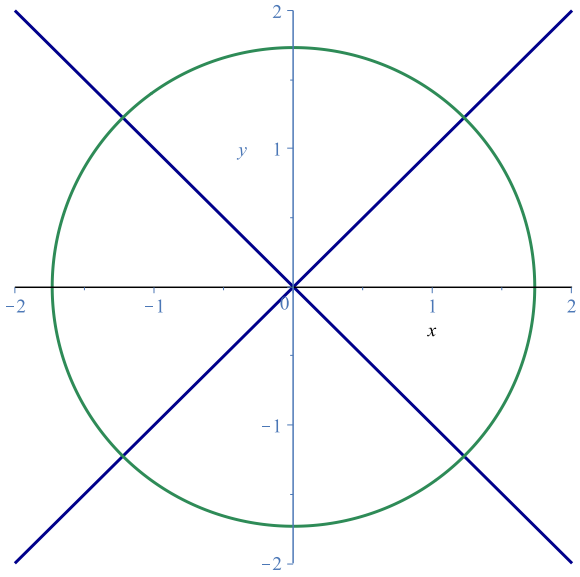
$$\frac{a^2 - 1}{2} \geq 0 \to a^2 \geq 1$$

No debiese complicado notar que la solución de esta ecuación es $a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Sin embargo, note que el sistema de las curvas de nivel exige que $\sqrt{1 + x^2 + y^2} = a$. Como la raiz siempre arroja números positivos, entonces $a > 0$ y por lo tanto $a \geq 1$.

En resumen, las condiciones son:

- $a \geq 1$.
- $b = 0$.

Graficamos para $a = 2$ ($a = 1$ solo consiste en el origen) y $b = 0$:



Problema 1.38 Sea $f(x,y)$ diferenciable. La recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por el punto (x_0,y_0) tiene pendiente 2. Determine el valor de $f_x(x_0,y_0)$ sabiendo que $f_y(x_0,y_0)>0$ y que la derivada direccional máxima en dicho punto es igual a 4.

Solución:

Otro problema tipo puzzle. Debemos ordenar la información y desprender conclusiones de ella. Primero, sabemos que una curva de nivel cumple que:

$$f(x,y)=c \quad \text{y} \quad f(x_0,y_0)=c$$

y además, si $\mathbf{v}$ es un vector tangente a la curva de nivel, entonces:

$$\vec{\nabla} f \cdot \mathbf{v} = 0$$

Es decir, deben ser perpendiculares, con lo cual sus pendientes m_1 y m_2 cumplen que $m_1 m_2 = -1$. Si m_2 es la pendiente de la recta tangente, entonces la pendiente de la recta perpendicular es:

$$m_1 = -\frac{1}{2} = \frac{f_y(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)} \rightarrow f_x(x_0,y_0) = -2f_y(x_0,y_0)$$

Luego utilizamos el hecho de que la derivada direccional máxima en dicho punto vale 4. La derivada direccional, como vimos en problemas anteriores, se obtiene en la dirección del gradiente, de modo que:

$$\text{máx}\left\{\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}\right\} = \vec{\nabla} f \cdot \frac{\vec{\nabla} f}{\left\|\vec{\nabla} f\right\|} = \left\|\vec{\nabla} f\right\|$$

Es decir,

$$\left\|\vec{\nabla} f\right\| = 4 \rightarrow f_x^2(x_0,y_0) + f_y^2(x_0,y_0) = 16$$

Obtenemos así el sistema no lineal:

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) + 2f_y(x_0,y_0) &= 0 \\ f_x^2(x_0,y_0) + f_y^2(x_0,y_0) &= 16 \end{aligned}$$

Despejando para $f_y(x_0,y_0)$:

$$4f_y^2(x_0,y_0) + f_y^2(x_0,y_0) = 16 \rightarrow f_y(x_0,y_0) = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Como el enunciado dice que $f_y(x_0, y_0) > 0$, entonces: $\boxed{f_y(x_0, y_0) = \frac{4}{\sqrt{5}}}$. Con ello,

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = -\frac{8}{\sqrt{5}}}$$

Problema 1.39 Dada la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, determine todos los puntos $\mathbf{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales la derivada direccional de f en $\mathbf{p}$ es nula en todas las direcciones.

Solución:

Partamos por encontrar una expresión general para la derivada direccional en cualquier punto x, y y luego resolvamos. Dado que f es una función polinomial, y por lo tanto evidentemente diferenciable, tenemos que la derivada direccional viene dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}} = \vec{\nabla} f(x, y) \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

donde $\hat{\mathbf{v}}$ es un vector unitario cualquiera. Calculemos entonces el gradiente:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$$

Observe que para la derivada direccional sea nula en toda dirección, requerimos entonces que el gradiente lo sea. Esto se explica en la ecuación de la derivada direccional: para que sea nula en todas direcciones, dado un $\vec{\nabla} f$ fijo, requerimos que este sea ortogonal a toda dirección $\hat{\mathbf{v}}$ posible en $\mathbb{R}^2$. El único vector que efectivamente cumple esto es el vector cero.

Luego, los puntos (x, y) buscados son:

$$\vec{\nabla} f = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos que $x^4 = y^2 = x$. (**¡Ojo con las soluciones!** Al haber elevado al cuadrado pudimos haber generado adicionales). Entonces,

$$x^4 = x \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x\left(x^3 - 1\right) = 0 \rightarrow x = 1 \vee x = 0$$

Si $x = 1 \rightarrow x^2 - y = 0 \rightarrow y = 1$. Si $x = 0 \rightarrow y = 0$. Luego, las soluciones que cumplen lo pedido son:

$$\boxed{\mathbf{p}_1 = (1, 1)} \quad \text{y} \quad \boxed{\mathbf{p}_2 = (0, 0)}$$

Problema 1.40 Hallar los valores de c que hacen que en los puntos de intersección de las esferas

$$(x-c)^2+y^2+z^2=3 \quad \text{y} \quad x^2+(y-1)^2+z^2=1$$

sus planos tangentes sean perpendiculares entre sí.

Solución:

Digamos que $f(x,y,z)=(x-c)^2+y^2+z^2$ y $g(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$. Con ello, estamos trabajando con las superficies de nivel $f(x,y,z)=3$ y $g(x,y,z)=1$.

Para que dos planos sean perpendiculares basta que sus vectores normales lo sean. En este caso, los vectores gradientes de los vectores normales de los tangentes en un punto dado vienen dados por el gradiente de las funciones f y g en dichos puntos.

En otras palabras, debemos encontrar c de modo que para las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned}(x-c)^2+y^2+z^2 &= 3\\ x^2+(y-1)^2+z^2 &= 1\end{aligned}$$

se cumpla que $\vec{\nabla} f(x,y,z)\cdot\vec{\nabla} g(x,y,z)=0$. Derivando,

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2(x-c)\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} g(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\ 2(y-1)\\ 2z\end{pmatrix}$$

Luego, para los (x,y,z) que son solución del sistema anterior deberá cumplirse que

$$x(x-c)+y(y-1)+z^2=0$$

Observe que del sistema de ecuaciones, restando las ecuaciones se tiene que:

$$x^2-2cx+c^2+y^2+z^2=3$$

$$x^2+y^2-2y+1+z^2=1$$

Proceder a continuación puede no ser tan obvio si es que no se tiene claro lo que queremos hacer. Del sistema de ecuaciones aparecerán un conjunto infinito de soluciones, en particular una curva. A partir de la información que aporta la solución de este sistema de ecuaciones, tenemos que realizar una manipulación algebraica de los términos de modo que obtengamos la expresión para el producto de los gradientes. Haciendo esto obtendremos una ecuación similar pero no idéntica producto de términos probablemente dependientes de c que pueden aparecer.

Concentrándonos en el objetivo de manipular algebraicamente el sistema para obtener la expresión del producto de gradientes, podemos notar por ensayo y error que al sumar ambas ecuaciones se tiene que:

$$2x^2-2cx+c^2+2y^2-2y+2z^2=3$$

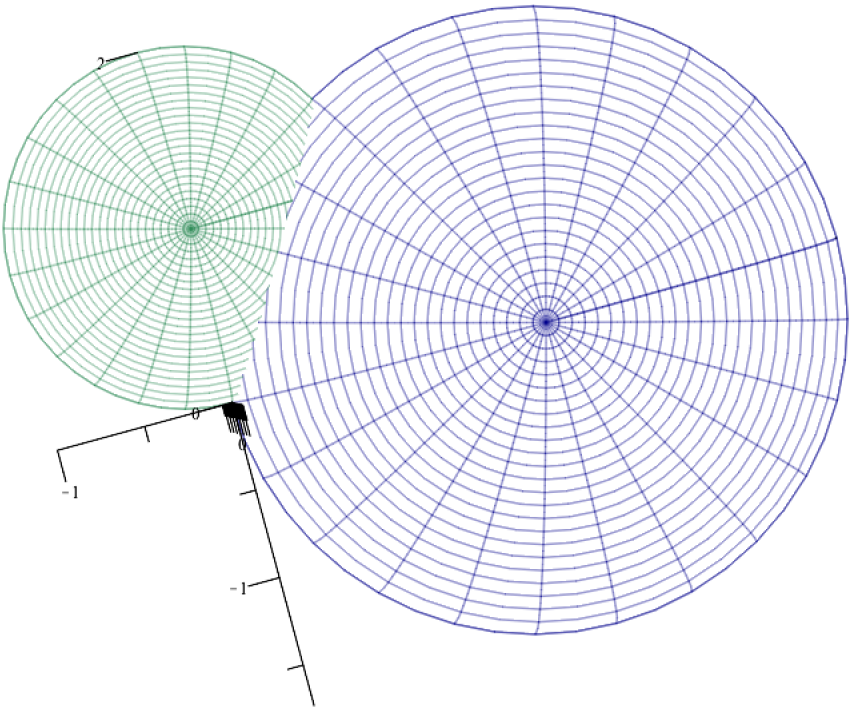
$$\rightarrow x\,(x-c)+y\,(y-1)+z^2=\frac{3-c^2}{2}$$

Observe que solamente jugando con la solución del sistema de ecuaciones llegamos a una expresión exactamente similar a la que buscamos. Esta expresión es casi igual a la buscada, pero requerimos que el lado derecho sea cero para que efectivamente el producto punto de los gradientes lo sea y de esta forma las esferas ortogonales.

De esta forma, imponemos que:

$$\frac{3}{2}-c^2=0\rightarrow \boxed{c=\pm\sqrt{3}}$$

donde cualquiera de los dos es útil para que se cumpla lo pedido. Comprobamos lo obtenido de forma gráfica para $c=\sqrt{3}$, tomando una vista superior:



Es decir, debemos centrar la esfera en $\sqrt{3}$ en el eje x para que se cumpla la condición. Ubicar el centro en cualquier otro punto no cumplirá lo pedido. Observe cómo en el gráfico las esferas se "cortan" perpendicularmente, como consecuencia de sus planos tangentes.

Problema 1.41 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de la cual se conoce la siguiente información en el punto $\mathbf{x}_0 = (0, 4, -1)$:

$f(\mathbf{x}_0)$	$f_x(\mathbf{x}_0)$	$f_y(\mathbf{x}_0)$	$f_z(\mathbf{x}_0)$
25	1	2	-1

(a) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(0, 4, -1)$ en la dirección del vector $(1, -3, 4)$.

(b) Encuentre la dirección para la cual la derivada direccional es máxima y calcule dicha derivada direccional.

(c) Encuentre la derivada direccional de f en el punto $(0, 4, -1)$ en la dirección normal a la superficie

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 25$$

en dicho punto.

(d) Encuentre el plano tangente a la superficie $f(x, y, z) = 25$ en el punto $(0, 4, -1)$.

Solución:

(a) Dado que f es una función diferenciable, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(0, 4, -1) = \vec{\nabla} f(0, 4, -1) \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

No olvidemos que la dirección debe ser unitaria en la definición de derivada direccional. Por esta razón es que

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{(1, -3, 4)}{\sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{(1, -3, 4)}{\sqrt{26}}$$

Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(0, 4, -1) = (1, 2, -1) \cdot \frac{(1, -3, 4)}{\sqrt{26}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(0, 4, -1) = -\frac{9}{\sqrt{26}}}$$

(b) Es sabido que la dirección en la cual la derivada direccional es máxima es la dirección del gradiente. Digamos que esa dirección es $\hat{\mathbf{u}}$. Entonces,

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\nabla} f(0, 4, -1)}{\left\| \vec{\nabla} f(0, 4, -1) \right\|}$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(0,4,-1) = \vec{\nabla} f(0,4,-1) \cdot \frac{\vec{\nabla} f(0,4,-1)}{\left\| \vec{\nabla} f(0,4,-1) \right\|} = \left\| \vec{\nabla} f(0,4,-1) \right\|$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(0,4,-1) = \sqrt{6}}$$

(c) Para la curva de nivel:

$$g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2 = 25$$

ya sabemos que el vector normal en un punto (x,y,z) viene dado por

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \\ 18z \end{pmatrix}$$

Queremos la derivada direccional del vector normal en el punto $(0,4,-1)$. Luego, calculamos

$$\vec{\nabla} g(0,4,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -18 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{w}} = \frac{(0,8,-18)}{\sqrt{8^2+18^2}} = \frac{(0,4,-9)}{\sqrt{97}}$$

donde definimos $\hat{\mathbf{w}}$ como la dirección normal a la superficie. Finalmente,

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{w}}}(0,4,-1) = (1,2,-1) \cdot \frac{(0,4,-9)}{\sqrt{97}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{w}}}(0,4,-1) = \frac{17}{\sqrt{97}}}$$

(d) La ecuación del plano tangente a la curva de nivel es:

$$\Pi \ : \ \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

con $\mathbf{x}_0 = (0,4,-1)$. Con ello, expandimos y obtenemos que la ecuación del plano viene dada por:

$$\boxed{\Pi \ : \ x + 2y - z = 9}$$

Problema 1.42 Demuestre que si $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ es siempre paralelo al vector (x,y,z), entonces para todo número a debe tenerse que $f(0,0,a) = f(0,0,-a)$.

Solución:

Este es un problema que requiere la total comprensión de lo que se está haciendo. El problema

induce a razonar de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \alpha(x,y,z) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

De esta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \alpha z \rightarrow f(x,y,z) = \alpha \frac{z^2}{2} + g(x,y)$$

De modo que es evidente que:

$$f(0,0,a) = \alpha \frac{a^2}{2} + g(0,0) = f(0,0,-a)$$

Sin embargo, se nos escapa un pequeño detalle: α no tiene por qué ser constante. De hecho, $\alpha = \alpha(x,y,z)$ (función escalar) sigue cumpliendo la condición de que (x,y,z) es paralelo a $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ y en ese caso ya no podemos integrar tal como lo hicimos, lo cual a su vez invalida inmediatamente nuestra demostración.. Por lo tanto, ¿cómo solucionamos el problema?

Lo que debemos tener claro es que si el gradiente es siempre paralelo al vector posición, entonces los vectores gradientes son en cierto sentido "radiales" y por lo tanto las superficies de nivel debiesen tener una forma aparentemente esférica.

Consideremos una curva cualquiera φ radial (distancia al origen constante) tal que $\varphi(0) = (0,0,a)$ y $\varphi(t_f) = (0,0,a)$. Antes de seguir, ¿por qué podemos verificar esto para una curva radial, y no una curva cualquiera? A diferencia de otros problemas, donde asumir particularidad es inválido, en este problema si es válido, ya que si demostramos para una curva que $f(0,0,a) = f(0,0,-a)$, entonces para todas las curvas esto debe cumplirse, ya que de no ser así f no sería una función.

Luego, tenemos que demostrar que:

$$f(\varphi(0)) = f(\varphi(t_f))$$

Es decir, trabajaremos con la función $g(t) = f(\varphi(t))$. Sabemos que:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \vec{\nabla} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= \alpha(t)\, \varphi(t) \cdot \varphi'(t) \end{aligned}$$

donde la sustitución se realizó considerando la información del enunciado. Luego,

$$g'(t) = \alpha(t) \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\varphi(t)\|^2$$

Como la curva es radial, entonces su radio (distancia al origen) no varía y por lo tanto $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\varphi(t)\|^2 = 0 \rightarrow g'(t) = 0$. Es decir, la función es constante, con lo cual

$$g(0) = g(t_f) \rightarrow \boxed{f(0,0,a) = f(0,0,-a)}$$

Demostrando así lo pedido. ■

Consideremos una superficie de nivel $\mathcal{S}$ tal que $f(\mathbf{x}) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ fijo. Se puede determinar sin

dificultad que $\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0)$ es ortogonal a la superficie en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$. Luego, $\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0)$ define un vector normal a la superficie que puede determinar un plano tangente (que toca $\mathcal{S}$ en un solo punto) en $\mathbf{x}_0$ a partir de la ecuación:

$$\Pi = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \right\} \tag{1.15}$$

Se sabe además que $z = f(x, y)$ define una superficie en la cual la coordenada z en la altura. ¿Cómo determinar el plano tangente en este caso? Observe que:

$$z = f(x, y) \rightarrow f(x, y) - z = 0$$

Es decir, buscamos un plano tangente para la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$ donde $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. A partir de la definición anterior, el vector normal en este caso viene dado por $\mathbf{n} = (f_x, f_y, -1)$, y empleamos este en la ecuación:

$$(f_x, f_y, -1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \tag{1.16}$$

Problema 1.43 Considere $f(x, y) = \cos(xy) + xy$. Determine el o los planos tangentes al gráfico de f que son paralelos al plano $z + y = 1$.

Solución:

Tenemos la superficie definida por $z = \cos(xy) + xy \rightarrow \cos(xy) + xy - z = 0$. Debemos determinar una expresión general para los planos tangentes, de modo de generar las ecuaciones necesarias. Para ello, obtenemos el vector gradiente de $g(x, y, z) = \cos(xy) + xy - z$ en la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$:

$$\vec{\nabla} g(x, y, z) = [-y \operatorname{sen}(xy) + y]\,\hat{\mathbf{i}} + [-x \operatorname{sen}(xy) + x]\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

Para el plano $z + y = 1$ el vector normal es $(0, 1, 1)$. Para que dos planos sean paralelos debe cumplirse que sus vectores normales lo sean. Es decir,

$$\vec{\nabla} g(x, y, z) \times (0, 1, 1) = 0$$

Calculando el producto cruz:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} g(x, y, z) \times (0, 1, 1) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -y \operatorname{sen}(xy) + y & -x \operatorname{sen}(xy) + x & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [-x \operatorname{sen}(xy) + x + 1]\,\hat{\mathbf{i}} - [-y \operatorname{sen}(xy) + y]\,\hat{\mathbf{j}} + [-y \operatorname{sen}(xy) + y]\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Luego, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} -x \operatorname{sen}(xy) + x + 1 &= 0 \\ -y \operatorname{sen}(xy) + y &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación:

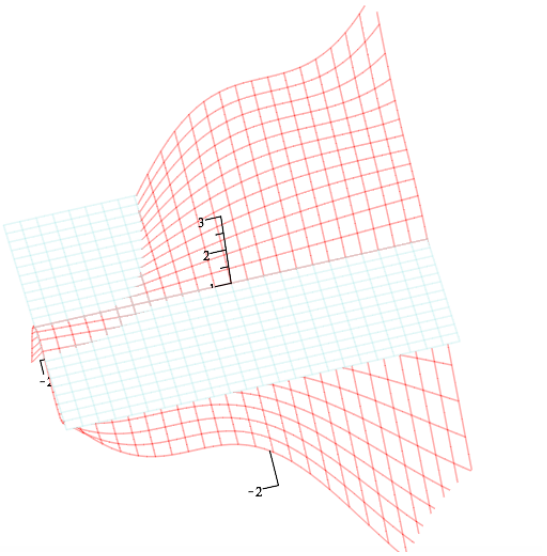
$$y[1 - \operatorname{sen}(xy)] = 0$$

Separamos en dos casos:

i) $y = 0$. Luego, $\operatorname{sen}(xy) = 0$, con lo cual en la primera ecuación obtenemos $x = -1$.

ii) $\operatorname{sen}(xy) = 1$. La primera ecuación queda $1 = 0$, por lo cual es una situación incompatible.

Concluimos entonces que $\boxed{x = -1}$ y $\boxed{y = 0}$. Comprobamos gráficamente:



Problema 1.44 Considere las superficies en $\mathbb{R}^3$ dadas por las ecuaciones $y = f(x)$, $z^2+2xz+y=0$. Determine la función $f(x)$ si se sabe que ambas superficies tienen el mismo plano tangente en todo punto donde se intersectan.

Solución:

Aquellos puntos donde ocurre intersección satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z^2 + 2xz + y &= 0 \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

En estos puntos además debe cumplirse que tienen el mismo plano tangente. Ya que el vector posición será evidentemente el mismo, la única condición que nos falta por imponer es que los vectores normales sean paralelos. Las superficies de nivel son:

$$\begin{aligned} z^2 + 2xz + y &= 0 \leftarrow \mathcal{S}_1 \\ f(x) - y &= 0 \leftarrow \mathcal{S}_2 \end{aligned}$$

Calculamos los vectores gradiente respectivos:

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \begin{pmatrix} 2z \\ 1 \\ 2z+2x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{n}}_2 = \begin{pmatrix} f'(x) \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deberá cumplirse que:

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \alpha \hat{\mathbf{n}}_2$$

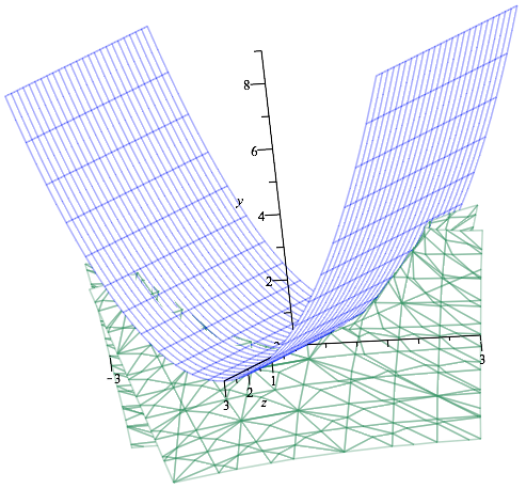
De la segunda componente se observa que $\alpha = -1$. Además, de la tercera componente $z + x = 0 \rightarrow z = -x$. De la primera componente $f'(x) = -2z = 2x$. Es decir,

$$f'(x) = 2x \rightarrow f(x) = x^2 + c$$

En la intersección se cumple entonces que:

$$z^2 + 2xz + x^2 + c = 0 \rightarrow (x+z)^2 + c = 0$$

Pero ya sabemos que $(x+z)^2 = 0$, entonces $c = 0$. Por lo tanto $f(x) = x^2$ es la función buscada. Comprobamos de forma gráfica:



1.6. Aplicaciones

1.6.1. Teorema de Taylor

Estudiaremos ahora los diversos órdenes del Teorema de Taylor. Antes de comenzar el desarrollo, realicemos una breve interpretación de la información con la cual estaremos trabajando. Sabemos de cálculo de una variable que $h(x)$ cumple que:

$$\mathrm{d}h = h(x)\,\mathrm{d}x$$

Es decir, una variación infinitesimal en h corresponde a $h(x)$ por el diferencial en x, lo cual representa un rectángulo diferencial que puede ser integrado. Debido a que para ciertas aplicaciones físicas buscamos extender este concepto a $\mathbb{R}^n$, tenemos que tener en consideración que en más de una variable existen diversas formas de lograr un diferencial df de una función $f(x,y,z)$: este puede producirse por una variación en x, una variación en y, una variación en z o incluso una combinación lineal de ambas. ¿Cómo se expresa entonces un diferencial exacto de f?

Recordamos de uno de los apartados anteriores que para una curva $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, entonces si $g(t) = f[\mathbf{r}(t)]$, al derivar se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla} f \cdot \mathbf{r}' \rightarrow \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \overset{!}{=} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Entonces, multiplicando por $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.17}$$

donde, por ejemplo $\mathrm{d}x = x(t)\,\mathrm{d}t$. Por lo tanto, una variación infinitesimal de f corresponde a una combinación lineal de las derivadas parciales según la curva que tomemos para desplazarnos a lo largo del campo escalar f.

Problema 1.45 Calcule aproximadamente el incremento de la función $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(3x + 2y)$ cuando el punto (x,y) de su dominio pasa de $(2,1)$ a $(2{,}05, 1{,}1)$.

Solución:

Tenemos que:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \to \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\,\Delta y$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3x^2 + 4xy + 3y^2}{(3x+2y)^2} \to \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{23}{64}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2(x^2 + 3xy + y^2)}{(3x+2y)^2} \to \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\frac{11}{32}\end{aligned}$$

Con ello, considerando $\Delta x = 2{,}05 - 2 = 0{,}05$ y $\Delta y = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$, entonces:

$$\boxed{\Delta f = -\frac{21}{1280} \approx -0{,}01641}$$

es el incremento buscado.

De acuerdo a los contenidos vistos en clases, tenemos que los polinomios de Taylor de orden 1 y 2 en torno a $\mathbf{x}_0$ son respectivamente:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} + \mathcal{O}_1(\mathbf{h}) \tag{1.18}$$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^t\mathcal{H}(f)\,\mathbf{h} + \mathcal{O}_2(\mathbf{h}) \tag{1.19}$$

donde $\mathcal{H}(f)$ es la matriz Hessiana y $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ son funciones tales que:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathcal{O}_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathcal{O}_2(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0$$

Esta es la forma directa de calcular aproximaciones de Taylor.

Problema 1.46 Encuentre la expansión de Taylor de orden 2 para $f(x,y,z) = \log\left(x^2+y^2+z^2\right)$ para

$$f(x,y,z) = \log\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

en torno a $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Solución:

Calculamos cada uno de los elementos del polinomio de Taylor paso a paso. Partimos notando que:

$$\boxed{f(\mathbf{x}_0) = \log(1) = 0}$$

Requerimos calcular en primer lugar el gradiente por regla de la cadena:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Ahora calculamos la matriz Hessiana derivando nuevamente (el desarrollo, sencillo pero tedioso, se deja propuesto):

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\begin{bmatrix} -2\left(x^2-y^2-z^2\right) & -4xy & -4xz \\ -4xy & 2\left(x^2-y^2+z^2\right) & -4yz \\ -4xz & -4yz & 2\left(x^2+y^2-z^2\right) \end{bmatrix}$$

Evaluando en $\mathbf{x}_0$:

$$\mathcal{H}(f) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Expandiendo la forma cuadrática, concluimos entonces que el polinomio de Taylor es:

$$\boxed{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(h_1+h_2+h_3) + \frac{1}{3}\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2-4h_1h_2-4h_1h_3-4h_2h_3\right)}$$

Problema 1.47 Calcule el incremento que sufre la función lineal $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^t\mathbf{x}$ cuando su $i-$ésima variable x_i se incrementa en h_i unidades, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Solución:

Este problema es solo una generalización de lo ya visto. Nuevamente,

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \to \Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k$$

Solo aumentamos la i-ésima variable, i.e. $\Delta x_i = h_i$ y todos los demás $\Delta x_k = 0$. Es decir,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_i}h_i$$

Luego, calculamos la derivada parcial en este caso, lo cual resulta tremendamente sencillo:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \to \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$$

Finalizamos entonces:

$$\boxed{\Delta f = a_i h_i}$$

Problema 1.48 Encontrar el polinomio de Taylor hasta el tercer grado de la función $f(x, y) = (x + y)^3$ en $(0, 0)$ y en $(1, 1)$.

Solución:

Debemos partir por notar que la respuesta del polinomio en torno a $(0, 0)$ es directa, pues

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3y^2 + y^3$$

es su propio polinomio de Taylor en torno a $(0, 0)$.

Ahora bien, recordamos que el teorema de Taylor plantea que la expansión de grado 3 en torno a $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ es:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(x_0, y_0) + \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\dagger \mathcal{H}_f (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &\quad \cdots + \frac{1}{6}\Big[f_{xxx}(x - x_0)^3 + 3f_{xxy}(x - x_0)^2(y - y_0) + 3f_{xyy}(x - x_0)(y - y_0)^2 \\ &\quad \cdots + f_{yyy}(y - y_0)^3\Big] \end{aligned}$$

Observe que se agruparon distintos términos pues f es claramente $\mathcal{C}^3$. Nos damos el trabajo de calcular todas las terceras derivads. Se tiene que:

- $f(1,1) = 8$
- $f_x(1,1) = 12.$
- $f_y(1,1) = 12.$
- $f_{xx}(1,1) = 12$.
- $f_{xy}(1,1) = 12.$
- $f_{yy}(1,1) = 12.$
- $f_{xxx}(1,1) = 6.$
- $f_{xxy}(1,1) = 6$.
- $f_{xyy}(1,1) = 6.$
- $f_{yyy}(1,1) = 6.$

Hecho esto, concluimos que:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= 8 + 12(x-1) + 12(y-1) + 6(x-1)^2 + 12(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2 \\ &\quad \cdots + (x-1)^3 + 3(x-1)^2(y-1) + 3(x-1)(y-1)^2 + (y-1)^3 \end{aligned}$$

1.6.2. Máximos y mínimos, matriz Hessiana

A continuación nos centraremos en resolver problemas de optimización irrestrictos de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} \,/\, \text{mín} & f(x) \\ & \text{sin restricciones} \end{array}$$

Por teorema visto en clases, es una condición necesaria (pero no suficiente) que un punto $\mathbf{x}_0$ sea punto critico para que $\mathbf{x}_0$ sea mínimo o máximo. Los puntos críticos de f son por definición aquellos en los cuales f no es diferenciable o bien $\vec{\nabla} f = 0$.

Para clasificar los puntos críticos, recordamos que la función también puede aproximarse mediante una aproximación de orden 2, de modo que:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^t \mathcal{H}(f)\, \mathbf{h} + \mathcal{O}(\mathbf{h})$$

donde $\lim_{h\to 0} \dfrac{\mathcal{O}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0$ y $\mathcal{H}$ corresponde a la matriz hessiana, la cual se escribe como:

$$\mathcal{H}(f) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_{n-1}} & & & \ddots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & & \cdots & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

y es simétrica ($\mathcal{H}^t = \mathcal{H}$) si la función es de clase $\mathcal{C}^2$.

De los primeros cursos de cálculo, el lector debe recodar que un punto crítico ubicado en una región de concavidad negativa corresponde a un máximo local y a un mínimo local en una región de concavidad positiva. Los mismos desarrollos teóricos pueden extenderse a $\mathbb{R}^n$, con las mismas condiciones de concavidad.

Se puede demostrar (no lo haremos) que la concavidad de una función puede determinarse mediante la expresión de Taylor de orden 2, sin importar el valor del residuo, y en particular a partir del comportamiento de la forma cuadrática $\mathbf{h}^t \mathcal{H}(f)\, \mathbf{h}$, de modo que:

- Si la forma cuadrática es definida positiva, entonces f tiene un mínimo local en $\mathbf{x}_0$.
- Si la forma cuadrática es definida negativa, entonces f tiene un máximo local en $\mathbf{x}_0$.

Sin embargo, no debemos quedarnos solo con esto, ya que el hecho central es que toda la información del comportamiento del punto crítico podemos deducirlo de la forma cuadrática mediante la cual se aproxima. Se hace este énfasis pues en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ aparecen los conocidos puntos de ensilladura, que se definen como:

Definición: Dada la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si cualquier bola B con centro en x_0 contiene puntos $x \in B$ tales que $f(x) - f(x_0)$ es positivo y puntos $y \in B$ tales que $f(y) - f(x_0)$ es negativo, se dice que x_0 es un *punto silla* de la función f.

El ejemplo típico en este tipo de puntos es $f(x, y) = x^2 - y^2$ con $(x, y) = (0, 0)$. Observe que si nos movemos en la dirección de x siempre aumentaremos el valor de la función, pero si nos movemos a lo largo del eje y la función siempre disminuirá su valor. En este sentido, si encontramos en un punto tal que $\vec{\nabla} f = 0$ direcciones en las cuales la función aumenta y direcciones en las cuales disminuye, estaremos indiscutiblemente ante un punto de silla. Este argumento puede sernos muy útil cuando no podamos depender de los criterios que el Álgebra Lineal nos entrega a partir del análisis de matrices.

En efecto, salvo estas excepciones, se pueden aplicar los conocimientos de Álgebra Lineal para clasificar las matrices. Sin embargo, estudiaremos en particular por ahora solo el caso $n = 2$, en el cual la matriz Hessiana para una función diferenciable puede expresarse como:

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Con lo cual,

- $b^2 - ac < 0$ y $a > 0 \rightarrow$ la función tiene un mínimo local.
- $b^2 - ac < 0$ y $a < 0 \rightarrow$ la función tiene un máximo local.
- $b^2 - ac > 0 \rightarrow$ la función tiene un punto silla.
- $b^2 - ac = 0 \rightarrow$ no se puede afirmar nada sobre la naturaleza del punto critico. Se requiere otro análisis.

Problema 1.49 Considere la función $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)(2 - x^2 - y^2)$.

(a) Determine todos sus puntos críticos y explique cuáles son puntos extremos.

(b) Calcule, de existir, su máximo global.

Solución:

(a) Calculamos el gradiente y lo igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x(2 - x^2 - y^2) - 2x(x^2 + 3y^2) \\ 6y(2 - x^2 - y^2) - 2y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x - 4x^3 - 8xy^2 \\ 12y - 8x^2y - 8y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x(1 - x^2 - 2y^2) \\ 4y(3 - 2x^2 - 3y^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 4x\left(1 - x^2 - 2y^2\right) &= 0 \\ 4y\left(3 - 2x^2 - 3y^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Se generan tres combinaciones posibles:

i) $x = 0$, $y = 0$. El problema ya está solucionado.

ii) $x = 0$, $3 - 2x^2 - 2y^2 = 0$. La segunda ecuación queda

$$3 - 2y^2 = 0 \rightarrow y = \pm 1$$

iii) $y = 0$, $1 - x^2 - 2y^2 = 0$. Reemplazando,

$$1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

iv) $x^2 + 2y^2 = 1$ y $2x^2 + 3y^2 = 3$. Multiplicando por 2 la primera ecuación y restándole la segunda queda $y^2 = -1$, lo cual es un sistema inconsistente en $\mathbb{R}$.

Es decir, los posibles puntos críticos son:

$$(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$$

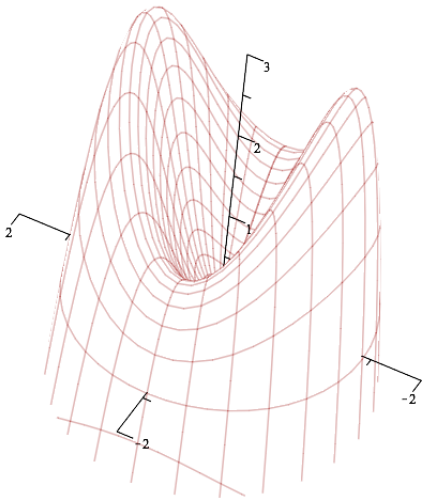
Los clasificamos de acuerdo al criterio del Hessiano, derivando nuevamente (el desarrollo detallado se deja propuesto):

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 4 - 12x^2 - 8y^2 & -16xy \\ -16xy & 12 - 8x^2 - 36y^2 \end{bmatrix}$$

Clasificamos punto a punto:

- $(0,0)$. $\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$. $a > 0$ y $b^2 - ac < 0$. Por lo tanto, es un **mínimo local**.
- $(0,1)$. $\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -24 \end{bmatrix}$. $a < 0$ y $b^2 - ac < 0$. Por lo tanto, es un **máximo local**.
- $(0,-1)$. $\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -24 \end{bmatrix}$. $a < 0$ y $b^2 - ac < 0$. Por lo tanto, es un **máximo local**. Este resultado era esperable pues la función $f(x,y)$ es simétrica en torno al eje x (par para y).
- $(1,0)$. $\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. $a < 0$ y $b^2 - ac > 0$. Por lo tanto, es un **punto de silla**.
- Por simetría en torno al eje y, $(-1,0)$ también es un **punto de silla**.

Para finalizar, comprobamos gráficamente:



(b) Se pueden realizar diversos análisis para concluir el carácter de análisis global. En este problema aplicaremos algunos de los conceptos aprendidos en el curso de Optimización (ICS1113).

En primer lugar, como se trata de un problema de optimización irrestricta, de haber máximos globales estos solo será posible encontrarlos en los puntos críticos, en particular en los máximos locales. Por lo tanto, los únicos candidatos posibles a máximos globales son $\left(0, \pm\sqrt{3/2}\right)$.

Observe además que:

$$\begin{aligned} \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) &= \lim_{r\to\infty} \underbrace{r^2}_{\to\infty} \underbrace{\left(\cos^2\theta + 3\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)}_{\geq 0 \text{ para todo } \theta} \cdot \underbrace{\left(2 - r^2\right)}_{\to -\infty}. \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Es decir, al alejarse del origen la función siempre se hará más y más negativa. Por lo tanto, tal como el gráfico lo sugiere y lo confirma. Los máximos globales de la función se alcanzan en $\left(0, \pm\sqrt{3/2}\right)$.

Otro análisis posible de realizar es observando que cuando para $2 - x^2 - y^2 \leq 0$ la función será siempre negativa, i.e. para todo punto fuera de la bola abierta $B\left(0, \sqrt{2}\right)$ (es en particular una circunferencia en $\mathbb{R}^2$) se tendrá que $f(x,y) \leq 0$. Por lo tanto, como los 5 puntos críticos están contenidos en la bola y ahí la función es positiva, entonces los máximos locales dentro de la bola serán necesariamente los máximos globales.

Problema 1.50 Dada la función

$$h(x,y) = ax^2y + bxy^2 + \frac{a^2y^2}{2} + 2y$$

determine los valores de a y b de modo que la función tenga un punto silla en (1,1).

Solución:

Seguimos la misma metodología para los problemas de parámetros. Asumimos que efectivamente se ubica un punto silla en $(1,1)$ y desprendemos conclusiones. La primera conclusión que se extrae es que este debe corresponder a un punto critico, i.e.

$$\vec{\nabla} h(1,1) = 0$$

Calculamos el gradiente.

$$\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} 2axy + by^2 \\ ax^2 + 2bxy + a^2y + 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\nabla} h(1,1) = \begin{pmatrix} 2a + b \\ a^2 + a + 2b + 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 0 \\ a^2 + a + 2b + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Lo solucionamos inmediatamente, despejando b en la primera ecuación, $b = -2a$ con lo cual:

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow (a-2)(a-1) = 0$$

Con lo cual $a = 2$ y $b = -4$ ó $a = 1$ y $b = -2$. ¿Cuál de los dos puntos corresponde? Eso solo lo podemos determinar a partir del criterio del Hessiano, ya que los valores de a y b deben permitir que ahí se ubique un punto silla. Luego,

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 2ay & 2ax + 2by \\ 2ax + 2by & 2bx + a^2 \end{bmatrix}$$

Evaluando en $x = y = 1$:

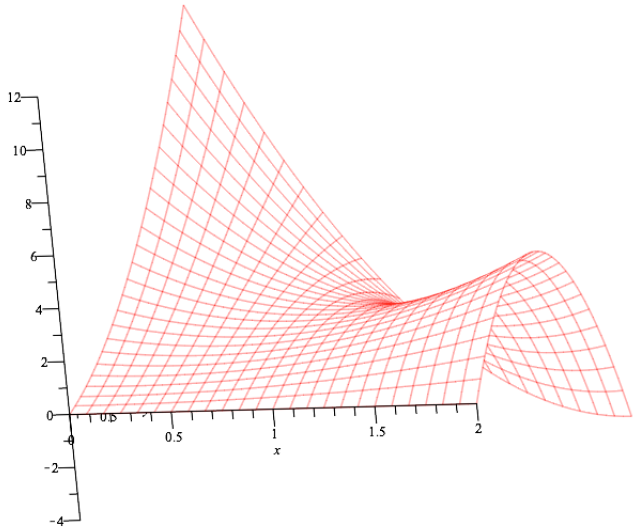
$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 2a & 2a + 2b \\ 2a + 2b & 2b + a^2 \end{bmatrix}$$

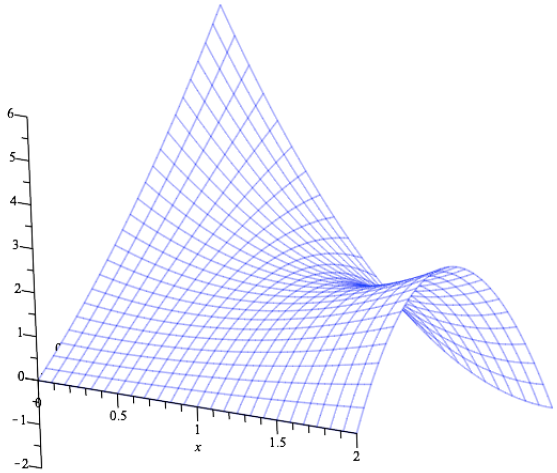
Para que el punto efectivamente sea un punto silla, debe cumplirse que $(2a + 2b)^2 - 2a(2b + a^2) > 0$ (ver condición de punto silla al principio de la sección).

- Si $a = 2$ y $b = -4$, evaluamos $(4-8)^2 - 4(4-8) > 0$, lo cual es cierto. Por lo tanto, si corresponde a un punto silla para estos valores de a y b.

- Si $a = 1$ y $b = -2$, evaluamos $(2-4) - 2(1-4) > 0$, por lo cual también es punto de silla.

Comprobamos gráficamente para estas dos combinaciones valores de a y b:





Problema 1.51 Estudie los puntos críticos y su naturaleza para

$$f(x,y,z) = x^3 - xz + yz - y^3 + 2z^3$$

Solución:

Primero debemos determinar los puntos críticos. Para ello derivamos e igualamos a cero:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 3x^2 - z \\ z - 3y^2 \\ -x + y + 6z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $z = 3x^2 = 3y^2 \to x^2 - y^2 = 0 \to (x+y)(x-y) = 0$. Luego, $x = y$ ó $x = -y$. De la primera se desprende inmediatamente la solución trivial, $z = 0$. En caso contrario, la tercera ecuación implica que:

$$6z^2 = 2x \to 3z^2 = x$$

luego, como $z = 3x^2 \to z^2 = 9x^4 \to \dfrac{x}{3} = 9x^4 \to 27x^4 - x = 0$. Es decir, $x(27x^3 - 1) = 0$.

Se sigue que en este caso $x = 1/3$ y con ello $y = -1/3$ y $z = 1/3$. De esta forma se tiene que:

$$(0,0,0) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Para estudiar su naturaleza utilizaremos el criterio del Hessiano. Para ello, primero debemos calcular la matriz Hessiana, aprovechando que la función es diferenciable y es sencilla de de derivar:

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 6x & 0 & -1 \\ 0 & -6y & 1 \\ -1 & 1 & 12z \end{bmatrix}$$

Ahora no podemos aplicar, por razones evidentes, el criterio aprendido para $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, recordamos el criterio formal de clasificación:

- Si $\mathcal{H}(f)$ es definida positiva en $\mathbf{x}_0$, entonces corresponde a un mínimo local.
- Si $\mathcal{H}(f)$ es definida negativa en $\mathbf{x}_0$, entonces corresponde a un máximo local.

Recordamos dos teoremas vistos en el curso de Álgebra Lineal (MAT1203) utilizado para clasificar las matrices asociadas a formas cuadráticas:

Teorema: Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz de $n \times n$, si Δ_k corresponde al determinante de la matriz $A(1:k, 1:k)$, entonces:

- Si $\Delta_k > 0$ para todo k, entonces la matriz es definida positiva.
- Si $\Delta_k \geq 0$ para todo k, entonces la matriz es semidefinida positiva.
- Si $\Delta_k = 0$ para todo k, entonces estamos ante un punto silla.
- Si $(-1)^k \Delta_k > 0$ para todo k, entonces la matriz es definida negativa.
- Si $(-1)^k \Delta_k \geq 0$ para todo k, entonces la matriz es semidefinida negativa.

Y otro teorema que nos permite clasificar a partir de los valores propios de la matriz, solo si es que esta es simétrica:

Teorema: Sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Sea $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los **valores propios** de A. Entonces A es semidefinida positiva si y solo si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Más aún, A es definida positiva si y solo si $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Si todos los λ_k son no nulos (tanto positivos como negativos), entonces estamos ante un punto silla.

Cualquiera de los dos teoremas puede ser utilizado para la clasificación a conveniencia, comodidad y gusto del lector. En esta solución utiilizaremos el primero.

(a) $(0,0,0)$. Se tiene que:

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$. Por lo tanto, corresponde a un **punto silla**.

(b) $(1/3, -1/3, 1/3)$. Se tiene que:

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se tiene que $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$ y $\Delta_3 = 12 > 0$. Luego, la matriz es definida positiva y estamos ante un **mínimo local**.

Problema 1.52

(a) Encuentre y clasifique los puntos críticos de

$$f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(3x^2+5y^2\right)$$

(b) Muestre que todos los puntos críticos de $f(x,y) = y + x \operatorname{sen} y$ corresponden a puntos silla.

Solución:

(a) Siguiendo el camino directo de desarrollo. Obtenemos el gradiente y lo igualamos a cero:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2xe^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(3x^2+5y^2\right) + 6xe^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ -2ye^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(3x^2+5y^2\right) + 10ye^{-\left(x^2+y^2\right)} \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} -2xe^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(3x^2+5y^2\right) + 6xe^{-\left(x^2+y^2\right)} & = 0 \\ -2ye^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(3x^2+5y^2\right) + 10ye^{-\left(x^2+y^2\right)} & = 0 \end{cases}$$

Siempre una buena práctica para resolver sistemas de ecuaciones es factorizar:

$$\begin{aligned} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(6x - 6x^3 - 10xy^2\right) &= 0 \\ e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(10y - 6x^2y - 10y^3\right) &= 0 \end{aligned}$$

Como las exponenciales nunca se anulan, podemos eliminarlas del sistema. Luego, observamos que el sistema todavía se puede factorizar aún más:

$$\begin{aligned} 2x\left(3-3x^2-5y^2\right) &= 0 \\ y\left(10-6x^2-10y^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

De este sistema distinguimos distintos casos:

i) En la primera ecuación una opción es que $x=0$. Luego, en la segunda se tiene que $y=0$ o bien que

$$10-10y^2=0 \to y^2=1 \to y=\pm 1$$

Es decir, $(0,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$ son posibles soluciones del sistema.

ii) En la segunda ecuación una opción es que $y=0$ y que $x\neq 0$. Con ello,

$$3-3x^2=0 \to x=\pm 1$$

Aparecen $(1,0)$ y $(-1,0)$ como posibles soluciones del sistema.

iii) Los dos segundos términos del producto son cero. Se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} 3x^2+5y^2 &= 3 \\ 6x^2+10y^2 &= 10 \end{aligned}$$

Este evidentemente no tiene solución pues corresponden a elipses paralelas que no se intersectan.

De esta forma, los puntos críticos son:

$$(0,0)\,,(0,1)\,,(0,-1)\,,(1,0) \text{ y } (-1,0)$$

Observando que la función es evidentemente de clase $\mathcal{C}^2$, se cumple el lema de Schwarz y por lo tanto se requieren 3 derivaciones (bastante tediosas, pero sencillas en cuanto a operatoria) para obtener la matriz Hessiana y realizar la clasificación. El desarrollo se deja propuesto al lector, pero la matriz resultante corresponde a:

$$\mathcal{H}_f(x,y)=-2e^{-\left(x^2+y^2\right)}\begin{bmatrix} 15x^2+5y^2-6x^4-10x^2y^2-3 & -2xy\left(3x^2+5y^2-8\right) \\ -2xy\left(3x^2+5y^2-8\right) & 3x^2+25y^2-10y^4-6x^2y^2-5 \end{bmatrix}$$

De esta forma, vamos evaluando punto a punto para hacer la clasificación.

- $\mathcal{H}_f(0,0)=-2\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}$. $b^2-ac=0-6\cdot 10<0$ con $a>0$.
  Corresponde a un **mínimo local**.
- $\mathcal{H}_f(1,0)=-2e^{-1}\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$. $b^2-ac=0+4e^{-2}6\cdot 2>0$.
  Corresponde a un **punto silla**.

- $\mathcal{H}_f(-1,0) = -2e^{-1}\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.
  Corresponde a un **punto silla** dado que $b^2 - ac$ es el mismo.
- $\mathcal{H}_f(0,1) = -2e^{-1}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$. $b^2 - ac = 0 - 4e^{-2}\cdot 2\cdot 10 < 0$ con $a < 0$.
  Corresponde a un **máximo local**.
- $\mathcal{H}_f(0,-1) = -2e^{-1}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$.
  Corresponde a un **máximo local**.

(b) Calculamos el gradiente de f:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix}\operatorname{sen} y\\ 1 + x\cos y\end{pmatrix}$$

Los puntos en los cuales se anula el gradiente corresponderán a los puntos críticos. Estos vienen dados por:

$$\operatorname{sen} y = 0 \to y = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como $\cos k\pi = (-1)^k$, la segunda ecuación queda:

$$1 + (-1)^k x \to x = -\frac{1}{(-1)^k} = (-1)^{k+1}$$

de modo que a priori ya sabemos que tendremos que distinguir el caso k par y el caso k impar. Calculamos la matriz Hessiana:

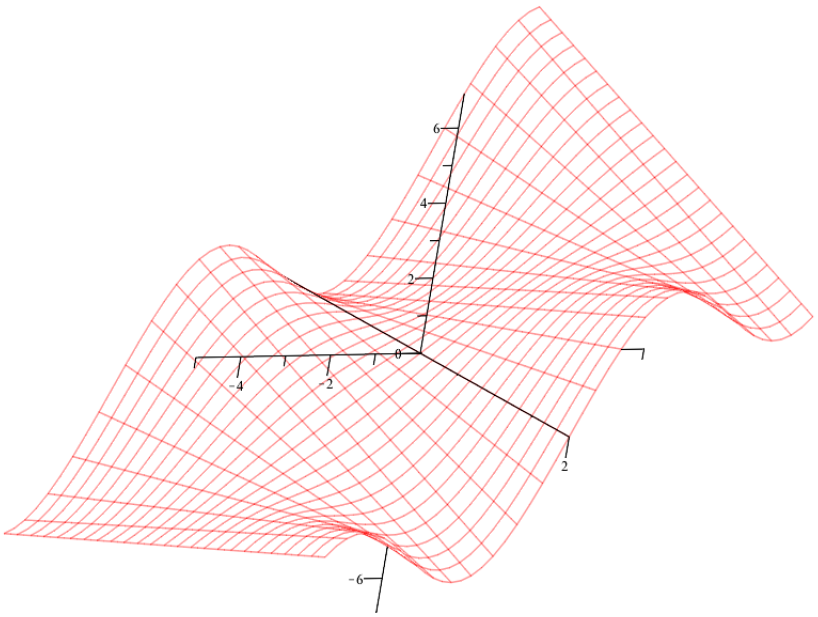
$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix}0 & \cos y\\ \cos y & -x\operatorname{sen} y\end{bmatrix}$$

Luego, reemplazando con $x = (-1)^k$ e $y = k\pi$ se tiene que:

$$\mathcal{H}_f\left[(-1)^{k+1}, k\pi\right] = \begin{bmatrix}0 & (-1)^k\\ (-1)^k & 0\end{bmatrix}$$

Cualquiera sea el caso, tenemos que: $b^2 - ac = (-1)^{2k} = 1 > 0$. Luego, independiente del valor de k, corresponden a puntos silla, demostrando así lo pedido. ■

Se comprueba gráficamente la cantidad de puntos silla que aparecen:



Problema 1.53 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(1) = g(2)$. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por la relación

$$f(x, y) = \int_{xy}^{x+y} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Demuestre que f tiene un punto crítico en $(1, 1)$. Estudie la naturaleza de este punto crítico en cada uno de los siguientes casos:

(a) $g(1) = 0$, $g'(1) = 1$ y $g'(2) = 2$.

(b) $g(1) = 3$, $g'(1) = 3$ y $g'(2) = 4$.

Solución:

No debemos preocuparnos porque aparezca una función "especial" y distinta a las de los demás casos. En el fondo, lo que queremos demostrar nuevamente es lo siguiente:

$$\vec{\nabla} f(1, 1) = 0$$

Por lo tanto, lo único que debemos hacer es derivar, aplicando correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\mathrm{d}t = g[b(x)]\, b'(x) - g[a(x)]\, a'(x)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= g(x+y) - yg(xy) \to f_x(1,1) = g(2) - g(1) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= g(x+y) - xg(xy) \to f_y(1,1) = g(2) - g(1) = 0\end{aligned}$$

donde ya sabemos que $g(2) - g(1) = 0$ a partir del enunciado. Luego, $\vec{\nabla} f(1,1) = 0$ y corresponde por definición a un punto crítico. ■

Para clasificar el punto crítico en cuestión requerimos derivar nuevamente para poder emplear el criterio del Hessiano. De esta forma,

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} g'(x+y) - y^2 g'(xy) & g'(x+y) - g(xy) - xyg'(xy) \\ g'(x+y) - g(xy) - xyg'(xy) & g'(x+y) - x^2 g'(xy) \end{bmatrix}$$

Evaluando en $(1,1)$:

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} g'(2) - g'(1) & g'(2) - g(1) - g'(1) \\ g'(2) - g(1) - g'(1) & g'(2) - g'(1) \end{bmatrix}$$

Según los valores de $g'(2)$, $g(1)$ y $g'(1)$ decidimos la clasificación, lo cual resulta sencillo pues se trata de una función en $\mathbb{R}^2$.

(a) En este caso,

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $b^2 - ac = 1 - 1 = 0$, entonces no se puede decir nada a priori sobre la naturaleza del punto crítico. Como la forma cuadrática define el carácter del punto crítico, estudiamos qué ocurre con ella. En este caso,

$$\mathbf{x}^T \mathcal{H}(f)\, \mathbf{x} = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

La cual es una función que alcanza el valor mínimo en la recta $x = -y$. Luego, podemos hablar de un mínimo local pero no único.

(b) En este caso,

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego $b^2 - ac = 4 - 1 = 3 > 0$, entonces estamos ante un punto silla.

Problema 1.54 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(0) = 0$. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = z^2 + \int_{-x}^{y} g(t)\, \mathrm{d}t$$

tiene un punto crítico en $(0, 0, 0)$. Determine la naturaleza de este punto crítico suponiendo que $g'(0) \neq 0$.

Solución:

Derivando:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} g(-x) \\ g(y) \\ 2z \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\vec{\nabla} f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} g(0) \\ g(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual no es más que la definición de punto crítico. Se demuestra así lo pedido. ■

Derivando nuevamente para aplicar el criterio del Hessiano:

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} -g'(-x) & 0 & 0 \\ 0 & g'(y) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En el orígen tenemos:

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} -g'(0) & 0 & 0 \\ 0 & g'(0) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El resultado dependerá del signo de $g'(0)$ (sabemos que no es cero), de modo que:

- Si $g'(0) < 0$, entonces los valores propios son $\lambda_1 = -g'(0) > 0$, $\lambda_2 = g'(0) < 0$ y $\lambda_3 = 2 > 0$. Como tenemos autovalores todos positivos y negativos, entonces por teorema estamos ante un **punto silla**.
- Si $g'(0) > 0$, entonces los valores propios son $\lambda_1 = -g'(0) < 0$, $\lambda_2 = g'(0) > 0$ y $\lambda_3 = 2 > 0$. Bajo el mismo argumento anterior, estamos ante un **punto silla**.

Problema 1.55 Determinar los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2}$ y precisar su naturaleza.

Solución:

Se tiene que:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\,(1+x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2} \\ 2y\,(1-x^2-y^2)\,e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

Como la exponencial no se anula y $1+x^2+y^2$ nunca se anula por axiomática real, entonces un punto crítico inmediato es $(0,0)$. Debemos precisar su naturaleza, y para ello utilizaremos el criterio del Hessiano.

Se tiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4\left(x^2+y^2\right)x^2 e^{x^2-y^2} + 8x^2 e^{x^2-y^2} + 2\left(x^2+y^2\right)e^{x^2-y^2} + 2e^{x^2-y^2}$$

Entonces, $f_{xx}(0,0) = 2$. Asimismo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4\left(x^2+y^2\right)xy e^{x^2-y^2} \longrightarrow f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$$

De forma análoga,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\left(x^2+y^2\right)y^2 e^{x^2-y^2} - 8y^2 e^{x^2-y^2} - 2\left(x^2+y^2\right)e^{x^2-y^2} + 2e^{x^2-y^2}$$

Es decir, $f_{yy}(0,0) = 2$. Luego, la matriz Hessiana en el origen es:

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

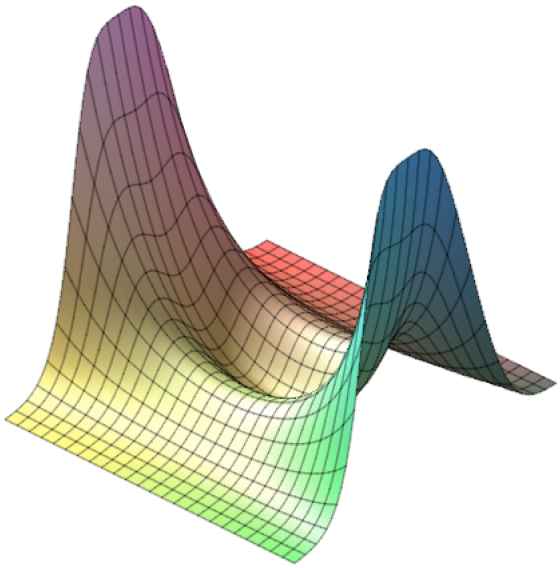
y por lo tanto como la matriz es semidefinida positiva, el punto crítico $(0,0)$ es un mínimo.

Ahora bien, si x =0 y $1-x^2-y^2 = 0 \to y = \pm 1$ también se anula el gradiente. Evaluamos la matriz Hessiana en estos puntos, obteniendo así que:

$$\mathcal{H}_f(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{bmatrix}$$

Como el determinante es negativo y presenta dos valores propios de distinto signo, luego ambos puntos corresponden a puntos silla y con ello se concluye que la función presenta un solo mínimo.

Grafiquemos la función:



Propuesto Demuestre que la función

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

tiene un punto crítico en $(1, 1, \ldots, 1)$ y que este corresponde a un punto de silla.

Indicación: No podrá realizar la clasificación mediante el argumento del Hessiano ya que este no permitirá determinar la naturaleza del punto crítico en cuestión. Dé argumentos sobre por qué $\ln(x)\ln(y)$ tiene punto silla en $(1, 1)$ y luego extienda este resultado a $\mathbb{R}^n$.

1.6.3. Multiplicadores de Lagrange

Ya estudiamos con anterioridad los problemas de optimización en que el espacio factible de soluciones era todo $\mathbb{R}^n$. Centraremos ahora nuestros esfuerzos en extender lo estudiado en $\mathbb{R}$ para generar la optimización de funciones sujetas a restricciones de igualdad, las cuales pueden entenderse como la pertenencia a un conjunto determinado de superficies de nivel.

Se le adelanta al lector que para los siguientes desarrollos se requiere una comprensión perfecta de la geometría del gradiente y su relación con las curvas y superficies de nivel, por lo cual se recomienda repasar dichos conceptos previamente antes de continuar en caso de todavía quedar dudas.

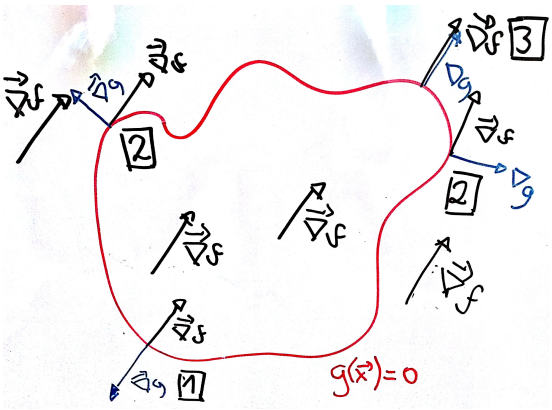
Observación importante: Todas las condiciones presentadas a continuación son condiciones necesarias que se deben cumplir en puntos extremos. De esta forma, si $\mathbf{x}_0$ es un punto extremo, debe cumplir las condiciones que a continuación se cumplen. Sin embargo, esto **no es suficiente** para probar que lo sean, ya que esto requiere un análisis posterior. Es decir, puede satisfacer las condiciones que a continuación se presentan, pero no por ello ser puntos extremos.

Por lo tanto, la metodología de trabajo consiste en la búsqueda de candidatos a puntos extremos por medio de estos teoremas, pero la suficiencia se debe garantizar por medio de otros teoremas y/o análisis. Es de gran uso considerar la definición de máximos y mínimos locales.

Una restricción. Comprenderemos el resultado del Teorema de los Multiplicadores de Lagrange partiendo por estudiar el caso de una restricción. Para comprenderlo, consideremos el problema de optimización

$$\begin{array}{cc} \text{máx} \,/\, \text{mín} & f(x,y,z) \\ \text{s.a.} & g(x,y,z) = 0 \end{array}$$

Asumamos asimismo que el gradiente de f es siempre constante y apunta en la misma dirección. Se puede graficar entonces la situación como se muestra en el siguiente dibujo hecho a mano:



De aquí podemos realizar las siguientes observaciones:

- Podemos movernos solamente a través de la curva en rojo. En 1 podemos es claro que podemos movernos a la izquierda o la derecha y aumentar el valor de la función si es que la deseamos maximizar pues en dicha dirección aumentará el valor de f de acuerdo al sentido del gradiente.
- En 2 podemos seguir se tiene que los gradientes son perpendiculares, y es evidente que todavía podemos movernos en la curva y aumentar el valor de f.
- Cuando llegamos a 3 se tiene que ambos gradientes son paralelos y gráficamente se observa que no es posible seguir aumentado el valor de f. Asimismo, si hubiésemos querido minimizar f, se obtiene el mismo resultado en 1.

En general se deduce entonces que la condición que debe ocurrir es que exista α que garantice que ambos gradientes sean paralelos, en otras palabras, que exista $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que en el óptimo $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) = \alpha \vec{\nabla} g(\mathbf{x}_0) \quad \text{o equivalentemente} \quad \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) + \lambda \vec{\nabla} g(\mathbf{x}_0) = 0$$

donde se hace $\lambda = -\alpha$.

Dos y más restricciones. Consideremos la función $f(x, y, z)$ sujeta a las restricciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$. Es decir, tenemos el problema de optimización:

$$\begin{array}{cc} \text{máx / mín} & f\,(x, y, z) \\ \text{s.a.} & g_1\,(x, y, z) = 0 \\ & g_2\,(x, y, z) = 0 \end{array}$$

Definimos la intersección de ambas restricciones como la curva $\mathcal{C}\,;\, I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$:

$$\vec{\alpha}(t) \in \mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, g_1(x, y, z) = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, g_2(x, y, z) = 0\}$$

Sea $t_0 \in I$ tal que $\vec{\alpha}(t_0) = g_1(x_0, y_0, z_0) = g_2(x_0, y_0, z_0)$. Podemos formar $(f \circ \vec{\alpha})\,(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ y obtener la derivada evaluada en dicho punto:

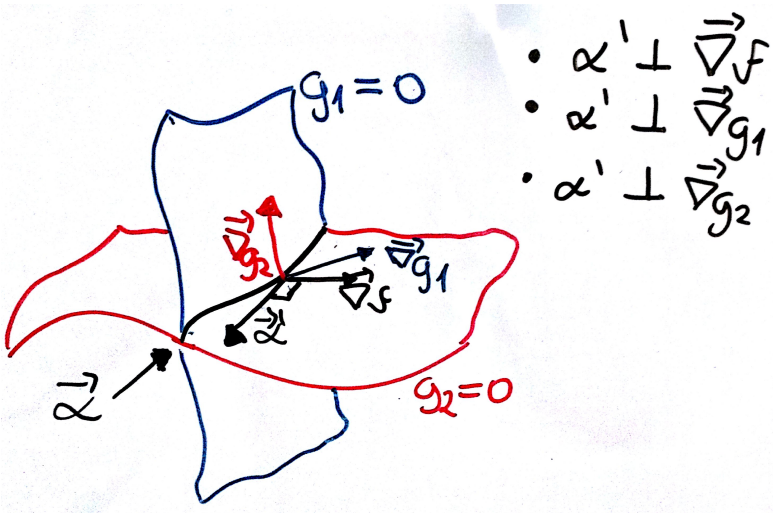
$$\begin{aligned} (f \circ \vec{\alpha})'(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ &= \vec{\nabla} f(\vec{\alpha}(t_0)) \cdot \vec{\alpha}'(t_0) \end{aligned}$$

Una condición necesaria para que esta función **de una variable** alcance un extremo en este punto es que dicha derivada sea cero, es decir:

$$0 = \vec{\nabla} f(\alpha(t_0)) \cdot \vec{\alpha}'(t_0)$$

Como $\vec{\alpha}'(t_0)$ es un vector tangente a la curva $\mathcal{C}$, podemos desprender de aquí que $\vec{\nabla} f(\vec{\alpha}(t_0)) \perp \vec{\alpha}'(t_0)$ y que por lo tanto $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la curva $\mathcal{C}$.

Vale la pena además notar que $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$ son superficies de nivel de las funciones g_1 y g_2 respectivamente. Debido a la definición que dimos de la curva $\mathcal{C}$ se verifica en $\mathbf{p} = \vec{\alpha}\,(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ que $\vec{\nabla} g_1(P)$ y $\vec{\nabla} g_2(P)$ son normales a la curva $\mathcal{C}$. Esto se puede observar en el siguiente diagrama:



Luego, tenemos tres vectores normales a la curva α en $\mathbf{p} = \vec{\alpha}(t_0)$, estos son:

- $\vec{\nabla} g_1(x_0, y_0, z_0)$.
- $\vec{\nabla} g_2(x_0, y_0, z_0)$.
- $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$.

Estos tres vectores deben encontrarse en el mismo plano, ya que son todos normales a la curva (ya que en caso contrario serían una base de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{\alpha}$ nulo para todo t). Luego, estos tres gradientes son *l.d.* y esto implica que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(x_0, y_0, z_0) = 0}$$

El lector activo ya podrá haber imaginado como extender este concepto a más restricciones. En efecto, mediante estas ideas intuitivas puede generalizarse el resultado para funciones en $\mathbb{R}^n$ y m restricciones mediante el Teorema de Lagrange:

Teorema: Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en el abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sean $g_1, \ldots, g_m : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, m funciones de clase C^1 en U con $m < n$. Se define el conjunto

$$\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : \, g_i(x) = 0\}$$

Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$ un punto extremo de f. Si $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)\right) \neq 0$ para m variables, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \vec{\nabla} g_k(\mathbf{x}_0) = 0} \tag{1.21}$$

donde dichos escalares de denomina *multiplicadores de Lagrange.*

Todos los problemas de optimización sujetos a restricciones de igualdad pueden resolverse de forma sistemática mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Sin pérdida de generalidad, todo problema de optimización puede escribirse como:

$$\begin{array}{cc} \text{máx} \,/\, \text{mín} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_1(\mathbf{x}) = 0 \\ & \vdots \\ & g_m(\mathbf{x}) = 0 \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

habitualmente con $m \leq n$. Se puede plantear la *Función Lagrangeana* de $n + m$ variables:

$$\mathcal{L}\{f, \mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\} = F(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(\mathbf{x})$$

Observe luego que, a partir del Teorema de Lagrange se tiene que:

$$\vec{\nabla} \mathcal{L} = \vec{\nabla} f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \vec{\nabla} g_k = 0 \to \text{salen } n \text{ ecuaciones}$$

y que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k} = g_k(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow \text{salen } m \text{ ecuaciones}$$

Considerando ambos sistemas obtenemos exactamente las mismas restricciones que buscamos en un problema con restricciones de igualdad. ¿Cuál es la ventaja? Aplicar el funcional $\mathcal{L}$, derivarlo e igualarlo a cero convierte un problema con restricciones en un problema de optimización **irrestricto** en el cual solo hay que derivar, igualar a cero y resolver un sistema de ecuaciones de $(n+m)\times(n+m)$. Si bien no hay que restarle importancia a la dificultad de resolver un sistema no lineal de varias ecuaciones, observe el lector que mediante este método la optimización se convierte en un problema sistemático en cuanto a planteamiento.

La última pregunta que el lector puede realizarse es: ¿cómo garantizamos que estos puntos encontrados son efectivamente los máximos y/o los mínimos? Podemos recurrir al Teorema de Weierstrass:

Teorema: Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, (K, τ) un espacio topológico y $K \subseteq X$ un conjunto compacto (cerrado y acotado). Si $f : K \rightarrow V$ es una función continua entonces existen $x_1, x_2 \in K$ tales que $\|f(x_1)\| \leq \|f(x)\| \leq \|f(x_2)\|$ y el conjunto $f(K)$ es compacto.

En otras palabras, la imagen de un conjunto compacto (cerrado y acotado) a través de una función continua también es un conjunto compacto, con la existencia garantizada de un máximo y un mínimo en dicho compacto. Dado que la mayoría de problemas prácticos involucran funciones y restricciones de clase $\mathcal{C}^1$ no solo tenemos garantizada la aplicación de este teorema en problemas de optimización con restricciones (asegurando la existencia de máximos y mínimos), si no que además tenemos garantizada por las condiciones necesarias que estos máximos y mínimos se alcanzarán en los puntos que satisfacen las condiciones del Teorema de Lagrange.

Luego, todo el trabajo se reduce a encontrar los puntos extremos y luego evaluarlos en la función objetivo para determinar el carácter de ellos. Eso es lo que haremos en este problema.

Nota importante: Si bien la metodología de los multiplicadores de Lagrange nos convierte un problema de optimización con restricciones en uno del tipo $\vec{\nabla} F = 0$, por ningún motivo deben ser utilizados los criterios del Hessiano para la clasificación de puntos críticos, ya que estos hablarían de la naturaleza del punto crítico en F, y no en la función objetivo real, f. En efecto, pueden no coincidir las naturalezas entre ambas funciones, por lo cual solo se puede utilizar el teorema anterior en los desarrollos y clasificaciones de puntos.

Problema 1.57 Encuentre las ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange para los cuales el punto de la superficie

$$x^4 + y^4 + z^4 + xy + yz + zx = 6$$

en el cual x toma el mayor valor posible. **No** resuelva.

Solución:

En este problema en particular, el problema de optimización es:

$$\begin{array}{lcl} \text{máx} & x & \leftarrow f(x,y,z) \\ \text{s.a.} & x^4+y^4+z^4+xy+yz+zx-6=0 & \leftarrow g_1(x,y,z) \end{array}$$

Definimos la función de Lagrange:

$$\mathcal{L}\{f,x,y,z,\lambda\} = x+\lambda\left(x^4+y^4+z^4+xy+yz+zx-6\right)$$

Derivando e igualando a cero se genera el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= x+4\lambda x^3+\lambda y+\lambda z=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 4\lambda y^3+\lambda x+\lambda z=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 4\lambda z^3+\lambda y+\lambda x=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= x^4+y^4+z^4+xy+yz+zx-6=0 \end{aligned}$$

que es el sistema de 4×4 buscado.

Problema 1.58 Determine los extremos de la función $f(x,y,z)=xyz$ sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{aligned}$$

Interprete geométricamente este resultado.

Solución:

Este problema es aún más explícito en su planteamiento. Basta plantear la función Lagrangeana:

$$\mathcal{L}\{f,x,y,z,\lambda,\mu\} = xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)+\mu\left(x+y+z\right)$$

Derivando e igualando a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= yz + 2\lambda x + \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= xz + 2\lambda y + \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= xy + 2\lambda z + \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= x + y + z = 0
\end{aligned}$$

El problema se reduce a resolver este sistema no lineal de 5×5. Para ello, restemos la segunda a la tercera ecuación, obteniendo:

$$x\,(y - z) + 2\lambda\,(z - y) = 0 \rightarrow (y - z)\,(x - 2\lambda) = 0$$

Distinguimos dos casos posibles:

i) $y = z$. Se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}
x^2 + 2y^2 &= 1 \\
x + 2y &= 0
\end{aligned}$$

Como $x = -2y$, entonces reemplazando en la primera ecuación:

$$6y^2 = 1 \rightarrow \boxed{y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}} \rightarrow \boxed{x = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}}$$

los multiplicadores de Lagrange se dejan propuestos, ya que no es lo que principalmente tratábamos de determinar.

ii) $x = 2\lambda$. Sigamos probando combinaciones de restas: restando la primera a la segunda:

$$z\,(x - y) + 2\lambda\,(y - x) = 0 \rightarrow (x - y)\,(z - 2\lambda) = 0$$

Distinguimos dos casos:

ii-a) $x = y$. Se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}
2y^2 + z^2 &= 1 \\
2y + z &= 0
\end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\boxed{x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}} \rightarrow \boxed{z = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}}$$

ii-b) $z = 2\lambda$. En dicho caso, la última ecuación queda:

$$4\lambda + y = 0 \rightarrow y = -4\lambda$$

Reemplazando en la cuarta ecuación:

$$4\lambda^2 + 16\lambda^2 + 4\lambda^2 = 1 \rightarrow 24\lambda^2 = 1$$

Despejando,

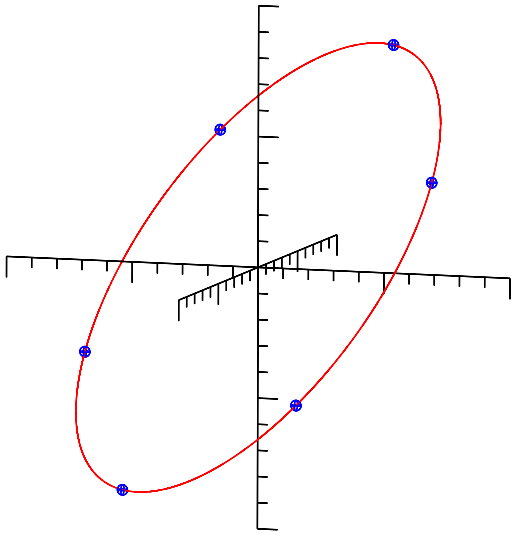
$$\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Es decir,

$$\boxed{x = z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}} \rightarrow \boxed{y = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}}$$

que precisamente por simetría es el caso que faltaba.

La situación gráficamente puede entenderse como encontrar el volumen máximo del paralelepípedo generado tal que uno de sus vértices pasa por la intersección del plano y la esfera. Visto gráficamente:



Problema 1.59 Encuentre el mínimo de la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

Planteamos la función lagrangeana:

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{x}, \vec{\lambda}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \lambda\left(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 4\right) + \mu\left(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 6\right)$$

Haciendo $\nabla\mathcal{L} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda + \mu = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 2x_2 - \lambda + \mu = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} &= 2x_3 + \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_4} &= 2x_4 + \lambda + \mu = 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6 \end{aligned}$$

Resolver este sistema es extremadamente sencillo pues es lineal, y tiene solución única pues es fácil notar que todas las filas son l.i. Sin embargo, para no recurrir a los tediosos trucos de Álgebra Lineal, utilicemos la buena práctica de dejar las variables en función de los multiplicadores de Lagrange:

$$x_1 = -\frac{\lambda + \mu}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{\lambda - \mu}{2} \quad ; \quad x_3 = \frac{-\lambda + \mu}{2} \quad ; \quad x_4 = -\frac{\lambda + \mu}{2}$$

Reemplazando en la quinta ecuación:

$$-\lambda - \mu - \lambda + \mu - \lambda + \mu - \lambda - \mu = 8 \rightarrow -4\lambda = 8 \rightarrow \lambda = -2$$

Análogamente, reemplazando en la sexta:

$$-\lambda - \mu + \lambda - \mu + \lambda - \mu - \lambda - \mu = 12 \rightarrow -4\mu = 12 \rightarrow \mu = -3$$

Con esto podemos despejar todas las variables:

$$\boxed{x_1 = \frac{5}{2}} \quad ; \quad \boxed{x_2 = \frac{1}{2}} \quad ; \quad \boxed{x_3 = -\frac{1}{2}} \quad ; \quad \boxed{x_4 = \frac{5}{2}}$$

Problema 1.60 Determine el valor máximo y mínimo de $\alpha x + \beta y + \gamma z$ si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solución:

El problema de optimización es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \alpha x + \beta y + \gamma z & \leftarrow f(x) \\ \text{s.a.} & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 & \leftarrow g_1(x) \end{array}$$

con α, β, γ, a, b y c parámetros del problema. Escribiendo el problema mediante los multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L}\{f, x, y, z, \lambda\} = \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

Generando el sistema de 4×4 necesario por derivación:

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{2\lambda}{a^2}x &= 0 \\ \beta + \frac{2\lambda}{b^2}y &= 0 \\ \gamma + \frac{2\lambda}{c^2}z &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando de las primeras tres ecuaciones:

$$x = -\frac{\alpha a^2}{2\lambda}, \quad y = -\frac{\beta b^2}{2\lambda} \quad \text{y} \quad z = -\frac{\gamma c^2}{2\lambda}$$

Reemplazando esto en la cuarta ecuación:

$$\frac{\alpha^2 a^2}{4\lambda^2} + \frac{\beta^2 b^2}{4\lambda^2} + \frac{\gamma^2 c^2}{4\lambda^2} = 1$$

Es decir,

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha a)^2 + (\beta b)^2 + (\gamma c)^2}$$

Con lo cual,

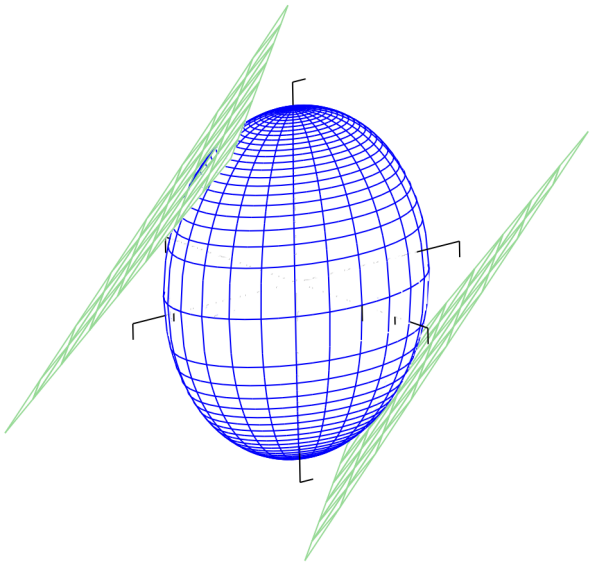
$$\begin{aligned} x_0 &= \mp\frac{\alpha a^2}{\sqrt{(\alpha a)^2 + (\beta b)^2 + (\gamma c)^2}} \\ y_0 &= \mp\frac{\beta b^2}{\sqrt{(\alpha a)^2 + (\beta b)^2 + (\gamma c)^2}} \\ z_0 &= \mp\frac{\gamma c^2}{\sqrt{(\alpha a)^2 + (\beta b)^2 + (\gamma c)^2}} \end{aligned}$$

que no corresponden más que a la distancia de los vértices del elipsoide al plano en cuestión. Notar que con ello,

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \mp\sqrt{(\alpha a)^2 + (\beta b)^2 + (\gamma c)^2}$$

El problema por proporcionalidad se puede entender como calcular la distancia del plano más lejano al orígen que es tangente al elipsoide dado.

Se grafican los resultados con $\alpha = \beta = \gamma = 1$ y $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.



Problema 1.61 Demuestre que el paralelepípedo de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera es un cubo.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es modelar matemáticamente esta situación. Dado que el problema presenta una simetría esférica e intuitivamente podemos observar que el volumen solo puede maximizarse si es que nos encontramos en la frontera de la esfera, entonces podemos escoger el punto $P(x, y, z)$ que describe el vértice del paralelepípedo en el primer octante.

Con las consideraciones anteriores el problema anterior se puede escribir como:

$$\begin{array}{lcl} \text{máx} & xyz & \leftarrow f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & x^2+y^2+z^2-r^2=0 & \leftarrow g_1(\mathbf{x}) \\ & x, y, z \geq 0 & \end{array}$$

con $r \in \mathbb{R}$ fijo. Escribimos la función lagrangeana:

$$\mathcal{L}\{f, \mathbf{x}, \lambda\} = xyz + \lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Calculamos todas las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= yz + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= xz + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= xy + 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= x^2+y^2+z^2-r^2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{yz}{2\lambda} = \frac{z}{2\lambda}\frac{xz}{2\lambda} \\ y &= -\frac{xz}{2\lambda} = \frac{x}{2\lambda}\frac{xy}{2\lambda} \\ z &= -\frac{xy}{2\lambda} = \frac{y}{2\lambda}\frac{yz}{2\lambda} \end{aligned}$$

De la primera ecuación, asumiendo que $x \neq 0$ (no tiene sentido este caso),

$$4\lambda^2 = z^2$$

Análogamente para la segunda y la tercera:

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 &= x^2 \\ 4\lambda^2 &= y^2 \end{aligned}$$

Es decir, sin determinar podemos concluir inmediatamente que dado que tanto x como y y z tienen que ser positivos:

$$x_0 = y_0 = z_0$$

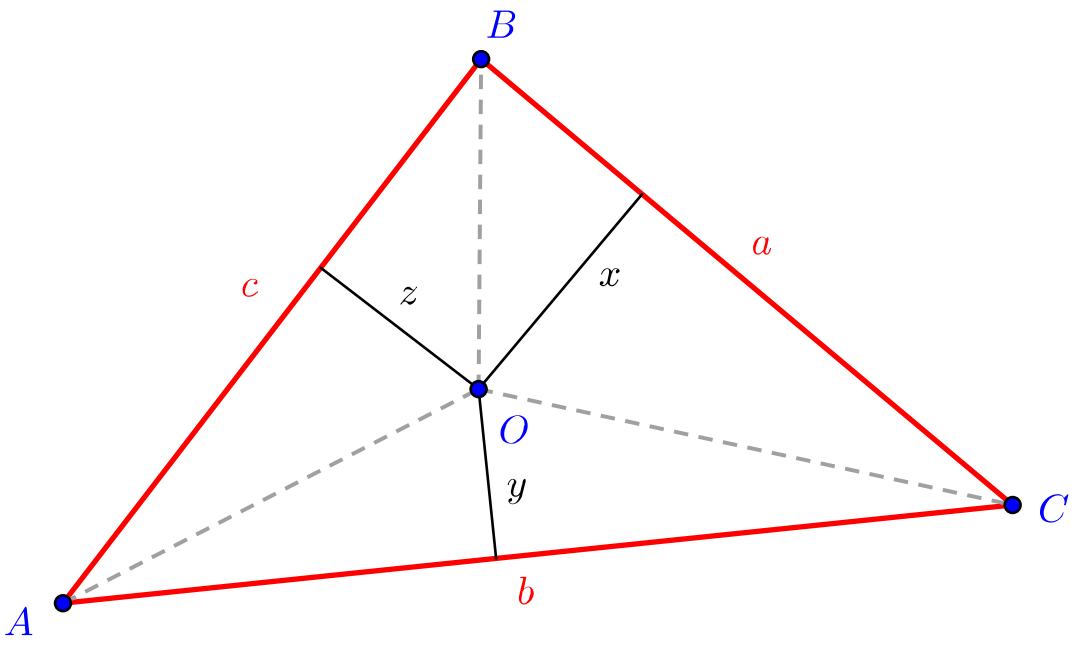
son las dimensiones buscadas, lo cual corresponde específicamente a un cubo y se demuestra así lo pedido. ■

Problema 1.62 Considerar un triángulo de área A fija y lados a, b, c. Dado un punto O al interior del triángulo, se bajan perpendiculares de largos x, y, z hacia los lados respectivos a, b, c.

Si se construye un paralelepípedo recto de aristas x, y, z y volumen V, pruebe que V es máximo cuando las líneas que unen O a los vértices P, Q y R del triángulo lo dividen en tres áreas iguales. Determinar cuál es el máximo de V en este caso.

Solución:

Lo primero que debe hacerse es comprender bien la pregunta, pues si no se logra esto no es mucho lo que se puede hacer. Grafiquemos el triángulo y sus alturas:



Con las medidas x, y, z construimos un paralelepípedo, cuyo volumen claramente es xyz, la función a maximizar en el problema. Sin embargo, requerimos una restricción claramente de carácter geométrico en el triángulo, y esto no es sencillo de notar.

Si trazamos las líneas punteadas, se forman tres nuevos triángulos, y podemos notar que:

$$\mathrm{A}\left(\triangle BOC\right) = \frac{1}{2}xa \quad ; \quad \mathrm{A}\left(\triangle AOC\right) = \frac{1}{2}yb \quad ; \quad \mathrm{A}\left(\triangle AOB\right) = \frac{1}{2}zc$$

Asimismo,

$$\mathrm{A}\left(\triangle BOC\right)+\mathrm{A}\left(\triangle AOC\right)+\mathrm{A}\left(\triangle AOB\right)=\mathrm{A}\left(\triangle ABC\right)=A$$

En otras palabras, deducimos la restricción

$$xa+yb+zc=2A$$

Por lo tanto, el lagrangeano asociado es:

$$\mathcal{L}\left(x,y,z,\lambda\right)=xyz+\lambda\left(xa+yb+zc-2A\right)$$

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=yz+\lambda a=0$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=xz+\lambda b=0$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=xy+\lambda c=0$$
$$xa+yb+zc=2A$$

De aquí podemos despejar lambda en las tres ecuaciones, y por transitividad de la igualdad se deducirá que:

$$\frac{yz}{a}=\frac{xz}{b}=\frac{xy}{c}$$

Entonces, reemplazando en la última ecuación se tiene que $x=2A/3a$, $y=2A/3b$ y $z=2A/3c$. Luego, las áreas de cada triángulo son respectivamente $A/3$ cada una, demostrando así lo pedido, y con esto se concluye que:

$$\boxed{V=\frac{8A^3}{27abc}}\quad\blacksquare$$

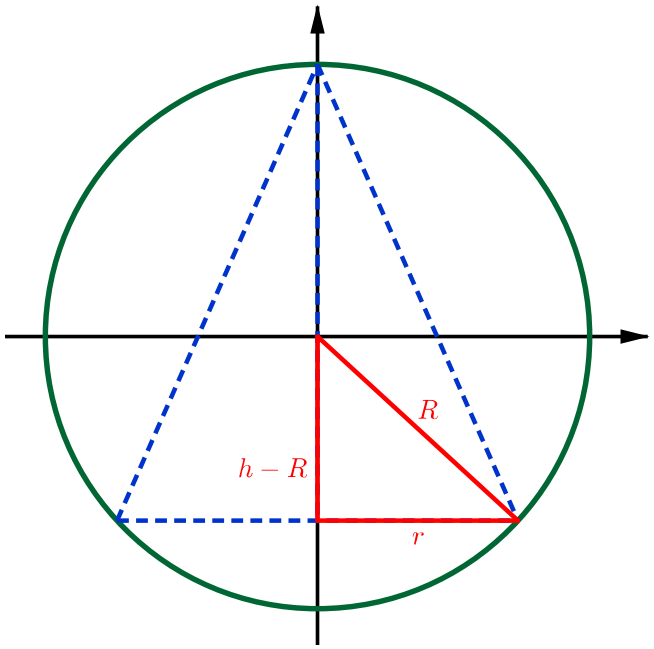
Problema 1.63 Determine las dimensiones del cono de volumen máximo que es posible inscribir en una esfera de radio R.

Solución:

La situación requiere ser modelada matemáticamente para posteriormente aplicar optimización al modelo. El volumen de un cono viene dado por:

$$V\left(r,h\right)=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

Como el cono debe ser inscrito y la simetría del problema es esférica, ubicamos la base del cono paralela al plano xy. Luego, a partir de la figura hacemos un corte tal como se muestra en la siguiente figura:



Notamos a partir del triángulo en rojo que:

$$(h-R)^2 + r^2 = R^2$$

Es decir, el problema de optimización es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \frac{1}{3}\pi r^2 h & \leftarrow f(r,h) \\ \text{s.a.} & (h-R)^2 + r^2 = R^2 & \leftarrow g_1(r,h) \\ & r, h > 0 & \end{array}$$

con R dado y r y h estrictamente positivas dada la naturaleza geométrica de las variables. Escribiendo el sistema a partir de los multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L}\{f, r, h, \lambda\} = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \lambda\left[(h-R)^2 + r^2 - R^2\right]$$

Derivando e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi r h - 2\lambda r &= 0 \\ \frac{1}{3}\pi r^2 - 2\lambda(h-R) &= 0 \\ (h-R)^2 + r^2 - R^2 &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación:

$$2r\left(\frac{\pi}{3}h - \lambda\right) = 0$$

Como $r > 0$ por naturaleza de variables, entonces se tiene que:

$$h = \frac{3\lambda}{\pi}$$

De la tercera ecuación se tiene que:

$$(h-R)^2 + r^2 - R^2 = 0 \rightarrow r^2 = R^2 - (h-R)^2$$

Reemplazando en la segunda

$$\frac{1}{3}\pi\left[R^2 - (h-R)^2\right] - 2\lambda(h-R) = 0$$

Reordenando términos:

$$\frac{1}{3}\pi(h-R)^2 + 2\lambda(h-R) - \frac{1}{3}\pi R^2 = 0$$

Despejando la ecuación cuadrática:

$$h - R = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 + \frac{4}{9}\pi^2 R^2}}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{2\pi}\left(-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 + \frac{4}{9}\pi^2 R^2}\right)$$

Luego,

$$\left(\frac{6\lambda}{\pi} - R\right)^2 = \frac{9}{4\pi^2}\left(4\lambda^2 + \frac{4}{9}\pi^2 R^2\right)$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos que:

$$\lambda = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda = \frac{4}{9}\pi R$$

Como $\lambda = 0 \rightarrow h = 0$, lo cual viola la restricciones de naturaleza geométrica de variables, entonces se descarta esta solución. Es decir, la única solución posible es:

$$\boxed{h = \frac{4}{3}R} \quad \text{y} \quad \boxed{r = \frac{2}{3}\sqrt{2}R}$$

Con ello, el volumen máximo posible es $\boxed{\frac{32}{81}\pi R^3}$.

Problema 1.64 Determine los puntos (x, y) y las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 2y$ alcanza su máximo valor si (x, y) se restringe al círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Solución:

Como f es claramente diferenciable, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \vec{\nabla} f \cdot \mathbf{v}$$

Sabemos de acuerdo a lo aprendido en la interpretación geométrica del gradiente que la derivada direccional se maximiza cuando esta es en el sentido del gradiente. Luego, la derivada direccional máxima es $\left\| \vec{\nabla} f \right\|$. Nos queda solamente por buscar aquellos puntos (x, y) donde efectivamente se maximiza la derivada direccional.

En otras palabras, tenemos que maximizar $\left\| \vec{\nabla} f \right\| = 2\sqrt{9x^2 + (y+1)^2}$ (o equivalentemente $g(x,y) = \left\| \vec{\nabla} f \right\|^2$ por simplicidad) sujeto a $x^2 + y^2 = 1$. Aplicando los multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 9x^2 + (y+1)^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Derivando:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 18x + 2\lambda x = 0 \longrightarrow 2(9+\lambda)x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2(y+1) + 2\lambda y = 0 \longrightarrow y = -\frac{1}{1+\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Aquí distinguimos dos casos de acuerdo a la primera ecuación:

- Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$.
- Si $\lambda = -9$, entonces $y = 1/8$ y por lo tanto $x = \pm 3\sqrt{7}/8$.

Evaluando en cada caso,

$$g(0,1) = 4 \quad ; \quad g(0,-1) = 0 \quad ; \quad g\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}\right) = g\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{81}{4}$$

De aquí es claro que la derivada direccional se maximiza en los puntos $\left(\pm 3\sqrt{7}, 1\right)/8$ en la dirección del gradiente.

Problema 1.65 Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y tal que $f(x,y,z) = x + y + z$ tiene un máximo en $\mathbf{p} = (2,3,4)$ cuando se le restringe a $g(x,y,z) = 0$. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $g(x,y,z) = 0$ en el punto $\mathbf{p}$.

Solución:

La condición de maximalidad de acuerdo a los multiplicadores de Lagrange implicará que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - \lambda^* g(\mathbf{p})$$

cumple con $\vec{\nabla}\mathcal{L}(\mathbf{p}) = 0$. Por otra parte, la ecuación del plano tangente vendrá dada por:

$$\Pi : (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \vec{\nabla} g(\mathbf{p}) = 0$$

De aquí se hace evidente que solo necesitamos calcular $\vec{\nabla} g(\mathbf{p})$ a partir de la información que se nos entrega.

De la primera ecuación se deduce que como en el máximo $\vec{\nabla}\mathcal{L}(\mathbf{p}) = 0$, entonces:

$$\vec{\nabla} f(\mathbf{p}) = \lambda^* \vec{\nabla} g(\mathbf{p})$$

Es decir, basta tomar $\vec{\nabla} f(\mathbf{p})$ como normal al plano tangente (dentro de las infinitas que existen). Como $\vec{\nabla} f = (1, 1, 1)$ en todo punto, concluimos finalmente que el plano tangente es:

$$\boxed{\Pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + y + z = 9\right\}}$$

Problema 1.66 Se considera la curva Γ que resulta de intersectar al paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ con el plano de ecuación $x + y + 2z = 2$. Encuentre el punto que esté a mayor altura y el que esté a menor altura de esta curva.

Solución:

El problema de optimización consiste en maximizar la altura ($f(x, y, z) = z$) sujeta a las restricciones dadas. Esto puede escribirse como:

$$\begin{array}{lcl} \text{máx} \,/\, \text{mín} & z & \leftarrow f(x, y, z) \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 - z = 0 & \leftarrow g_1(x, y, z) \\ & x + y + 2z - 2 = 0 & \leftarrow g_2(x, y, z) \end{array}$$

Escribiendo la función de Lagrange:

$$\mathcal{L}\{f, x, y, z, \lambda, \mu\} = z + \lambda\left(x^2 + y^2 - z\right) + \mu(x + y + 2z - 2)$$

Derivando e igualando a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2\lambda x + \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2\lambda y + \mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 1 - \lambda + 2\mu = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - z = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= x + y + 2z - 2 = 0
\end{aligned}$$

Luego, se desprende que:

$$x = y = -\frac{\mu}{2\lambda}$$

Reemplazando en la cuarta ecuación:

$$z = \frac{\mu^2}{2\lambda^2}$$

Reemplazando estos valores en la quinta ecuación, obtenemos en cojunto a la tercera ecuación el sistema para μ y λ:

$$\begin{aligned}
-\lambda + 2\mu &= -1 \\
-\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} &= 2
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) - 2 = 0 \rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda} - 2\right)\left(\frac{\mu}{\lambda} + 1\right) = 0$$

Tenemos dos opciones:

i) $\mu/\lambda = 2$. Con esto podemos reemplazar directamente en las expresiones de x, y y z:

$$x = y = -1$$

$$z = 2$$

El valor de la función objetivo es 2.

ii) $\mu/\lambda = -1$. Luego,

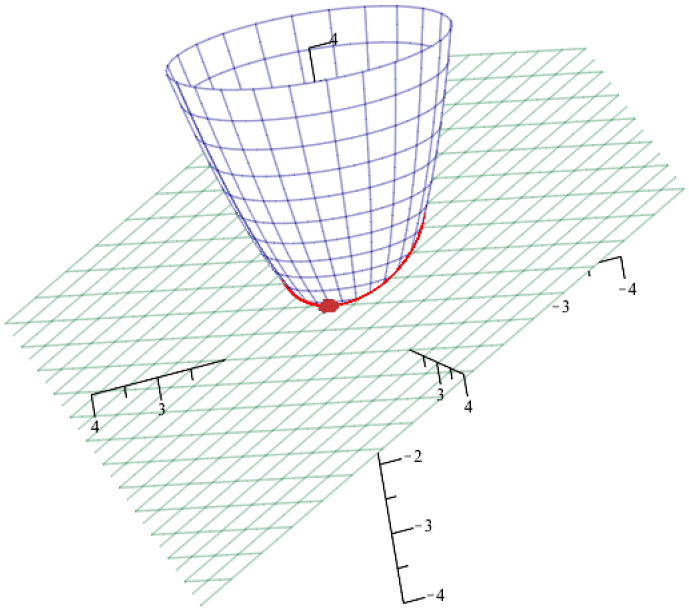
$$x = y = 1/2$$

$$z = 1/2$$

El valor de la función objetivo es 1/2.

Como este es un problema de optimización con restricciones de igualdad, los máximos y mínimos locales solo pueden alcanzarse en los puntos en los cuales $\vec{\nabla}\mathcal{L} = 0$ por la condición necesaria. Luego, el punto que está a mínima altura es $z = 1/2$ y el que está a máxima altura es $z = 2$.

Se comprueba la situación gráficamente:



De forma intuitiva podemos resolver adicionalmente problemas en los cuales se incluyen restricciones de desigualdad no estricta, tal como revisaremos en el siguiente problema:

Problema 1.67 Hallar los valores máximo y mínimos de la función $f(x, y, z) = ze^{xy}$ en la región:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

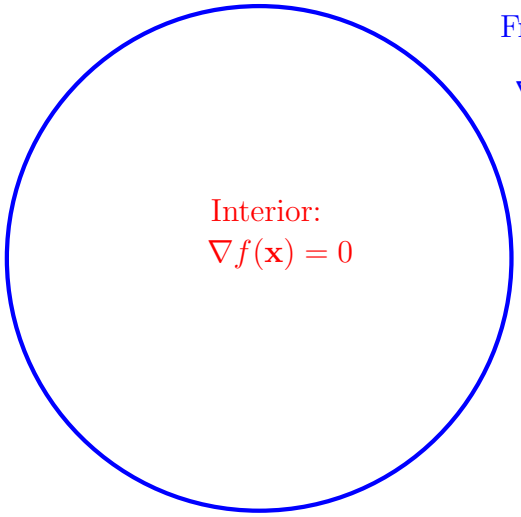
Solución:

En este caso el problema de optimización puede escribirse como

$$\begin{array}{cc} \text{máx} \,/\, \text{mín} & ze^{xy} \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array}$$

donde la nueva dificultad que aparece evidentemente es la restricción de desigualdad. Primero partamos notando que estamos tomando un espacio compacto: la esfera y le estamos aplicando una función continua. Por lo tanto, tenemos garantizado que la función alcanzará un máximo y un mínimo, y como la función es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo el espacio, este necesariamente cumplirá alguna de las condiciones necesarias de valores extremos.

La pregunta subsecuente es: ¿cuál de ellas? En analogía a los problemas de optimización en un intervalo de cálculo en una variable, en este caso tendremos que los máximos y mínimos pueden alcanzarse ya sea al interior del conjunto o bien en su frontera, pero en cualquiera sea el caso deberán cumplir las condiciones necesarias respectivas. Gráficamente las condiciones necesarias pueden resumirse como:



Frontera:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0) = 0$$

Del interior pueden obtenerse los valores extremos tales que $\vec{\nabla} f\left(\mathbf{x}_0\right) = 0$ y en la frontera aquellos que cumplen las condiciones de Lagrange. Por los teoremas anteriormente necesarios sabemos que solo los puntos obtenidos de estas dos formas pueden ser los candidatos a máximos y mínimos. Luego, basta evaluar la función objetivo en cada uno de estos puntos para determinar cuál es el máximo global y cual es el mínimo global.[a]

Partamos calculando los posibles candidatos en el interior. Calculando el gradiente se genera el sistema:

$$\begin{pmatrix} yze^{xy} \\ xze^{xy} \\ e^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inmediatamente, como no existen valores reales para los cuales $e^{xy} = 0$ se tendrá entonces que el sistema es inconsistente. Estudiamos entonces solo los valores en la frontera. Para ello, tomamos la función lagrangeana:

$$F\left(x, y, z, \lambda\right) = ze^{xy} + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$$

Haciendo $\vec{\nabla} F = 0$ se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yze^{xy} + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xze^{xy} + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^{xy} + 2\lambda z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Debemos resolver este sistema. Restando la primera ecuación a la segunda se tiene que:

$$(x-y)\, ze^{xy} + 2\lambda\,(y-x) = 0 \rightarrow (x-y)\,(ze^{xy} - 2\lambda) = 0$$

De aquí se desprenden dos opciones:

1) $x = y$, con lo cual se reemplaza en la segunda ecuación y se tiene que:

$$yze^{xy} + 2\lambda y = 0 \rightarrow y\,(ze^{xy} + 2\lambda) = 0$$

Si $y = 0$, entonces $x = 0$ y por lo tanto, de la última ecuación se tendrá que:

$$z^2 = 1 \rightarrow z = \pm 1$$

Si $ze^{xy} + 2\lambda = 0 \rightarrow e^{xy} = -\dfrac{2\lambda}{z}$ con lo cual se reemplaza en la tercera ecuación y se obtiene:

$$-\frac{2\lambda}{z} + 2\lambda z = 0 \rightarrow 2\lambda\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$$

Si $\lambda = 0$ la tercera ecuación genera un sistema inmediatamente inconsistente. Luego, necesariamente

$$z - \frac{1}{z} = 0 \rightarrow z^2 - 1 = 0 \rightarrow z = \pm 1$$

obteniendo una solución redundante.

2) Si $ze^{xy} = 2\lambda \rightarrow e^{xy} = \dfrac{2\lambda}{z}$, con lo cual la tercera ecuación queda

$$2\lambda\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$$

Como ya vimos que necesariamente $\lambda = 0$, entonces

$$z + \frac{1}{z} = 0 \rightarrow z^2 + 1 = 0$$

lo cual no tiene solución real.

Finalmente, los candidatos a puntos extremos finales son:

(a) $(0, 0, 1) \rightarrow ze^{xy} = 1$. Corresponde al **máximo global**.

(b) $(0, 0, -1) \rightarrow ze^{xy} = -1$. Corresponde al **mínimo global**.

[a] **Nota importante:** Esta es la forma propuesta de resolver los problemas de optimización en regiones con desigualdades para los propósitos de este curso. El lector interesado puede estudiar las Condiciones de Karush - Kühn - Tucker. las cuales generan un sistema de resolución de este tipo de problemas similar al ya planteado por las condiciones de Lagrange.

Más aún, podemos utilizar los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de carácter conceptual.

Problema 1.68 Sea $\mathcal{S}$ una superficie de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $f(x,y,z)=0$ con $f\in\mathcal{C}^1$. Sea $\mathbf{p}$ el punto de $\mathcal{S}$ más lejano al origen. Demuestre que el vector que va del origen a $\mathbf{p}$ es perpendicular a $\mathcal{S}$.

Solución:

Si bien este es un resultado que puede parecer geométricamente intuitivo, no descuide el lector que el vector gradiente a una superficie de nivel puede ser perfectamente no paralelo al vector posición.

Como $\mathbf{p}$ es el punto más lejano de una función de clase $\mathcal{C}^1$, entonces es solución al problema de optimización

$$\begin{array}{cc} \text{máx} & g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \text{s.a.} & f(x,y,z)=0 \end{array}$$

Como la función y las restricciones son de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $\mathbf{p}$ deberá satisfacer las condiciones de Lagrange, de modo que:

$$\vec{\nabla}g(\mathbf{p})+\lambda^*\vec{\nabla}f(\mathbf{p})=0$$

pero $\vec{\nabla}g(\mathbf{p})=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)=\dfrac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$. Es decir,

$$\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}+\lambda^*\vec{\nabla}f(\mathbf{p})=0\rightarrow\mathbf{p}=\underbrace{-\|\mathbf{p}\|\lambda^*}_{\alpha}\vec{\nabla}f(\mathbf{p})$$

Luego, $\mathbf{p}$ es paralelo a $\vec{\nabla}f(\mathbf{p})$. Como $\vec{\nabla}f(\mathbf{p})\perp\mathcal{S}$ en $\mathbf{p}$, entonces concluimos finalmente que $\mathbf{p}\perp\mathcal{S}$ en $\mathbf{p}$, demostrando así lo pedido. ■

Propuesto Demuestre empleando el método de los multiplicadores de Lagrange la conocida *desigualdad de Hölder*: sean $a_1,\ldots,a_n$ y $b_1,\ldots,b_n$ números reales no negativos y números positivos p,q tales que $p>1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{1/q}$$

Esto suele representarse como $\|\mathbf{ab}\|_1\leq\|\mathbf{a}\|_p\|\mathbf{b}\|_q$.

2. Cálculo diferencial de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Estudiaremos ahora el cálculo diferencial de las funciones vectoriales de varias variables. Es decir, estudiaremos funciones del tipo $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Las funciones en el caso particular caso particular $n = m$ se denominan **campos** y son ampliamente utilizadas en la modelación de fenómenos físicos como velocidades en cada punto del espacio de un flujo, campos eléctricos, magnéticos y gravitatorios, teoría de potencial, etc.

2.1. Diferenciabilidad de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y matriz jacobiana

Observe que hasta el momento dominamos el cálculo diferencial de funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (funciones escalares de varias variables) y de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (curvas en $\mathbb{R}^n$). El siguiente estudio busca combinar ambas dos, por lo cual una función vectorial puede entenderse como una "curva" dependiente de varias variables o bien como un *vector* de funciones escalares.

Podemos definir entonces una función vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como la función

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Definición: Se define el límite de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ como:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} F_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} F_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

y $\mathbf{F}$ se dice *continua* en $\mathbf{x}_0$ si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0). \tag{2.3}$$

Es muy sencillo demostrar que se heredan las propiedades de suma, multiplicación y ponderación por escalar para límites de este tipo de funciones vectoriales. Se puede demostrar de forma similar que se cumple la propiedad para e producto punto.

A partir del concepto de límite y continuidad es posible inmediatamente definir el concepto de diferenciabilidad en las funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, extendiéndolo a partir del concepto ya determinado.

Definición: La función $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ si existe una transformación lineal $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{L}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \vec{0} \tag{2.4}$$

Como corolario inmediato se tendrá que $\mathbf{F}$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

Como $\mathbf{L}$ es una transformación lineal, puede ser representada por una matriz $\mathbf{J}_{m\times n}$ que se describe columna a columna. Notar que por condición de diferenciabilidad podemos tomar $\mathbf{h} = |k|\hat{\mathbf{e}}_j$ con $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{|k|\to 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + k\hat{\mathbf{e}_j}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - |k|\mathbf{J}\hat{\mathbf{e}}_j}{|k|} = 0$$

Entonces:

$$\mathbf{J}\hat{e}_j = \lim_{|k|\to 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + k\hat{\mathbf{e}_j}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{|k|}$$

Notando que:

$$\lim_{|k|\to 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + k\hat{\mathbf{e}_j}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{|k|} = \left(\lim_{|k|\to 0} \frac{F_1(\mathbf{x}_0 + k\hat{\mathbf{e}_j}) - F_1(\mathbf{x}_0)}{|k|}, \ldots, \frac{F_m(\mathbf{x}_0 + k\hat{\mathbf{e}_j}) - F_m(\mathbf{x}_0)}{|k|} \right)$$

se puede llegar sin mayor dificultad a que

$$\mathbf{J}\hat{\mathbf{e}}_j = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

Esto es más que suficiente para realizar la siguiente definición:

Definición: Sea $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, se define la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ en el punto $\mathbf{x}_0$ como

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{JF}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{\nabla} F_1(x_0) - \\ \vdots \\ -\vec{\nabla} F_m(x_0) - \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

donde D es el operador diferencial actuando sobre la función. Definimos adicionalmente,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i} \right)^{\dagger} \to \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Para el caso $m = n$ la matriz es cuadrada y su determinante se llama el *jacobiano* de la función. Si $F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces se denota

$$\frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

La pregunta inmediata es: ¿y qué ocurre con la composición de dos funciones diferenciables? Estudiaremos este caso esta situación definiendo las funciones diferenciables en $\mathbf{x}_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{F} : \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Entonces, podemos desarrollar la aproximación lineal de cada expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \mathbf{G}(\mathbf{x}_0) + \mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\| \\ \mathbf{F}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) &= \mathbf{F}(\mathbf{y}_0) + \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{k} + \beta(\mathbf{k}) \|\mathbf{k}\| \end{aligned}$$

Luego, evaluamos la composición:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0) + \mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|) \end{aligned}$$

asumiendo que $\mathbf{y}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0))$ y $\mathbf{k} = \mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|$. Como $\mathbf{F}$ es diferenciable, entonces se tendrá que:

$$(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)) + \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0))\mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \underbrace{\mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0))\alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\| + \beta(\mathbf{k}) \|\mathbf{k}\|}_{\to 0}$$

Con esto, podemos concluir el siguiente teorema evitando los reparos teóricos:

Teorema: Sean $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones diferenciables en $\mathbf{x}_0$, entonces $(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathrm{D}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{x}_0) = \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0))\mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{x}_0) \tag{2.8}$$

Observación: Considere la función $f(x, y, z)$, donde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$. Es decir, podemos considerar la función $\mathbf{g}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ y evaluar la composición $f \circ \mathbf{g}$. Tenemos que:

$$\mathrm{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{D}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\mathrm{D}(f \circ \mathbf{g})(u, v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Podemos extraer directamente y verificar formalmente la regla de la cadena expuesta en un apartado anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \tag{2.9}$$

Es decir, bajo el teorema de diferenciabilidad amplio se puede extraer casi de forma trivial la regla de la cadena anteriormente estudiada.

Problema 2.1 Sean $\mathbf{G}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $\mathbf{F}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$. Calcule la matriz derivada de $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(r, \theta)$ en el punto $\mathbf{p} = (1, 0)$.

Solución:

De acuerdo a lo anteriormente estudiado, tenemos que:

$$\mathrm{D}(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(r, \theta) = \mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{F}(r, \theta))\,\mathrm{D}\mathbf{F}(r, \theta)$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\mathbf{F}(r,\theta) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} & \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} F_1(r,\theta) \\ \vec{\nabla} F_2(r,\theta) \\ \vec{\nabla} F_3(r,\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En $(r,\theta) = (1,0)$ se tiene que:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(r,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Análogamente, dado que $\mathbf{G}$ es una función escalar se tiene que

$$\mathrm{D}\mathbf{G}(x,y,z) = \left(\vec{\nabla} f\right)^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$

Pero $\mathbf{F}(1,0) = (1,0,1)$. Evaluando se tiene que:

$$\mathrm{D}\mathbf{G}(1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ 1)$$

Finalmente,

$$\mathrm{D}(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathrm{D}(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(1,0) = \left(\sqrt{2}\ 0\right)}$$

Problema 2.2 Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}$ diferenciable y $\mathbf{f}$ definida por:

$$\mathbf{f}(x,y) = (ax+by, cx-by)$$

con $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a+c \neq 0$ y $b \neq 0$. Sabiendo que:

$$\mathrm{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,(x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$$

Determine el valor de $\mathbf{g}$.

Solución:

Dada la diferenciabilidad de la función tenemos que:

$$\mathrm{D}\left(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}\right)(x)=\mathrm{D}\mathbf{f}\left[\mathbf{g}\left(x\right)\right]\mathrm{D}\mathbf{g}\left(x\right)$$

donde:

$$\mathrm{D}\mathbf{f}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -b\end{bmatrix}\quad \text{y}\quad \mathrm{D}\mathbf{g}=\begin{bmatrix}g_1'(x)\\ g_2'(x)\end{bmatrix}$$

Observe que $\mathrm{D}\mathbf{f}$ es invertible pues $|\mathrm{D}\mathbf{f}|=-ab-cb=-b\left(a+c\right)\neq 0$ por hipótesis. Luego, es posible despejar inmediatamente de la primera ecuación $\mathrm{D}\mathbf{g}$, lo cual a su vez nos permite determinar $\mathbf{g}$. Tenemos que:

$$\mathrm{D}\mathbf{g}=\mathrm{D}\mathbf{f}^{-1}\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\left(x\right)\\ \cos\left(2x\right)\end{pmatrix}$$

donde $\mathrm{D}\mathbf{f}^{-1}=\dfrac{1}{-b\left(a+c\right)}\begin{bmatrix}-b & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\dfrac{1}{b\left(a+c\right)}\begin{bmatrix}b & b\\ c & -a\end{bmatrix}$. Con ello,

$$\mathrm{D}\mathbf{g}=\frac{1}{b\left(a+c\right)}\begin{bmatrix}b\operatorname{sen}\left(x\right)+b\cos\left(2x\right)\\ c\operatorname{sen}\left(x\right)-a\cos\left(2x\right)\end{bmatrix}$$

Podemos recuperar $\mathbf{g}$ por integración:

$$\rightarrow\boxed{\mathbf{g}\left(x\right)=\frac{1}{b\left(a+c\right)}\begin{bmatrix}-b\cos\left(x\right)+\dfrac{b}{2}\operatorname{sen}\left(2x\right)\\ \\ -c\cos\left(x\right)-\dfrac{a}{2}\operatorname{sen}\left(2x\right)\end{bmatrix}+\mathbf{k}}$$

donde $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^2$ es una constante. Para cualquier valor de $\mathbf{k}$ se cumple lo pedido.

Problema 2.3 Dada la función $(x,y)=\mathbf{F}\left(u,v\right)=\frac{1}{34}\left(5\sqrt{9v+u},3\sqrt{25v-u}\right)$ definida en la región $\mathcal{R}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1\leq u\leq 9,\ 1\leq v\leq 4\}$, encuentre el gráfico de la región imagen $\mathcal{D}$ contenida en el primer cuadrante del plano (X,O,Y), la matriz jacobiana de $\mathbf{F}\left(u,v\right)$ y el jacobiano asociado a la matriz.

Solución:

Tenemos que:

$$\begin{aligned}34x &= 5\sqrt{9v+u}\\ 34y &= 3\sqrt{25v-u}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}34^2x^2 &= 25\left(9v+u\right)\\ 34^2y^2 &= 9\left(25v-u\right)\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por 9 y la segunda por 25:

$$\begin{aligned} 9\cdot 34^2x^2 &= 25\cdot 9\,(9v+u) \\ 25\cdot 34^2y^2 &= 25\cdot 9\,(25v-u) \end{aligned}$$

Sumando,

$$34^3\left(9x^2+25y^2\right)=25\cdot 9\cdot 34v \to v=\frac{34}{25}x^2+\frac{34}{9}y^2$$

Análogamente,

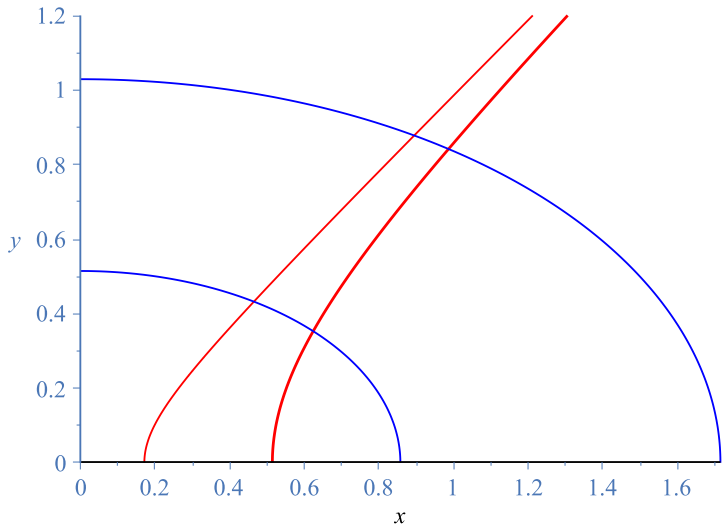
$$u=34x^2-34y^2$$

Luego, de la región se sigue que:

$$1\le u\le 9 \longrightarrow 1\le 34x^2-34y^2\le 9$$

$$1\le v\le 4 \longrightarrow 1\le \frac{34}{25}x^2+\frac{34}{9}y^2\le 4$$

A partir de estas desigualdades puede graficarse la región en el plano:



El cálculo de la matriz jacobiana es directo y se deja propuesto al lector. El resultado a obtener:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}\,(u,v)=\begin{bmatrix} \dfrac{5}{68\sqrt{9v+u}} & \dfrac{45}{68\sqrt{9v+u}} \\ -\dfrac{3}{68\sqrt{25v-u}} & \dfrac{75}{68\sqrt{25v-u}} \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)}=\left|\mathrm{D}\mathbf{F}\,(u,v)\right|=\frac{15}{136\sqrt{9v+u}\sqrt{25v-u}}$$

Problema 2.4 Sean $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con derivadas parciales continuas tales que $\mathbf{H} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$. Si la matriz jacobiana de $\mathbf{H}$ en el punto $\mathbf{P}_0$ es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y la matriz jacobiana de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{P}_0$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ en el punto $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{P}_0)$.

Solución:

Por álgebra de composición de funciones sabemos que:

$$\mathrm{D}\mathbf{H}(\mathbf{P}_0) = \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0)\,\mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{P}_0)$$

Como $\mathbf{G}$ es claramente invertible, entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) &= \mathrm{D}\mathbf{H}(\mathbf{P}_0)\,\mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{P}_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}$$

2.1.1. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas (*)

En esta sección opcional desarrollaremos algunas de las transformaciones más comunes que se realizan mediante funciones vectoriales: el cambio a coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Calcularemos el operador nabla para cada una de los distintos sistemas de coordenadas, lo cual será de especial utilidad en cursos futuros.

Problema 2.5 Sean

$$\mathbf{f}(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v) \qquad \text{para } u>0 \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$$
$$\mathbf{g}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \qquad \text{para } x>0$$

(a) Interpretando adecuadamente la sustitución, conjeture un valor para la matriz jacobiana de $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$.

(b) Calcule la matriz jacobiana de $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ y ratifique el resultado anterior.

Solución:

(a) Observando $\mathbf{f}$, parece ser la conversión a coordenadas cartesianas desde coordenadas polares y $\mathbf{g}$, la transformada a coordenadas polares desde coordenadas cartesianas, por lo cual $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ debiese entregarnos las coordenadas cartesianas originales. En otras palabras, la composición es la función identidad y por lo tanto la matriz jacobiana es la identidad.

(b) Se tiene que:

$$\mathrm{D}\mathbf{g}\circ\mathbf{f} = \mathrm{D}\mathbf{g}\mathrm{D}\mathbf{f}$$

Evaluamos cada una de las matrices derivando:

$$\mathrm{D}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \dfrac{u\cos v}{u} & \dfrac{u\,\mathrm{sen}\, v}{u} \\ -\dfrac{u\,\mathrm{sen}\, v}{u^2} & \dfrac{u\cos v}{u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos v & \mathrm{sen}\, v \\ -\dfrac{\mathrm{sen}\, v}{u} & \dfrac{\cos v}{u} \end{bmatrix}$$

Asimismo,

$$\mathrm{D}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \cos v & -u\,\mathrm{sen}\, v \\ \mathrm{sen}\, v & u\cos v \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\boxed{\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f})\,\mathrm{D}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \cos v & \mathrm{sen}\, v \\ -\dfrac{\mathrm{sen}\, v}{u} & \dfrac{\cos v}{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos v & -u\,\mathrm{sen}\, v \\ \mathrm{sen}\, v & u\cos v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

comprobando así lo conjeturado. ■

Problema 2.6 Considere el operador nabla y el cambio a coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{y} \quad (x, y, z) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z) \tag{2.10}$$

(a) Calcule el operador $\vec{\nabla}$ en coordenadas cilíndricas.

(b) Calcule el gradiente de $f(r, \theta, z) = \log r + \theta^2 z$ en coordenadas cilíndricas.

(c) Calcule $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$.

Solución:

(a) Consideremos una función ϕ. Aplicando la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial r} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}} \\
\frac{\partial\phi}{\partial\theta} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} + \cancel{\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\theta}} \\
\frac{\partial\phi}{\partial z} &= \frac{\partial\phi}{\partial z}
\end{aligned}$$

Asimismo, derivando las relaciones definidas:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \text{sen}\,\theta \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta$$

Entonces, simbólica y matricialmente,

$$\begin{pmatrix}\partial/\partial r \\ \partial/\partial\theta \\ \partial/\partial z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\,\text{sen}\,\theta/r & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta/r & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\partial/\partial r \\ \partial/\partial\theta \\ \partial/\partial z\end{pmatrix}$$

En otras palabras,

$$\begin{pmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\partial/\partial r - \text{sen}\,\theta/r\,\partial/\partial\theta \\ \text{sen}\,\theta\partial/\partial r + \cos\theta/r\partial/\partial\theta \\ \partial/\partial z\end{pmatrix}$$

como $\hat{\mathbf{r}} = r\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\theta} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}$, se observa entonces que:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Concluimos entonces que, en coordenadas cilíndricas:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}}$$

(b) Reemplazamos directamente en la fórmula deducida:

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} + \frac{2\theta z}{r}\hat{\theta} + \theta^2\hat{\mathbf{k}}}$$

(c) Tomamos la matriz obtenida:

$$\boxed{\frac{\partial\,(x,y,z)}{\partial\,(r,\theta,z)} = \left|\begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta/r & 0 \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = r}$$

Problema 2.7 Considere el cambio de coordenadas al sistema de coordenadas esféricas:

$$(x,y,z) = (r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, r\cos\theta) \tag{2.11}$$

(a) Calcule el operador $\vec{\nabla}$ en coordenadas esféricas.

(b) Calcule $\vec{\nabla} f$ en coordenadas esféricas.

(c) Pruebe que $\dfrac{\partial\,(x,y,z)}{\partial\,(r,\theta,\varphi)} = -r^2\,\mathrm{sen}\,\theta$.

(d) [**Propuesto**] Demuestre que para una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ el Laplaciano viene dado por:

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Solución:

(a) Procedemos de forma análoga a la pregunta anterior. En primer lugar, considerando una

función ϕ, escribimos el cambio de coordenadas empleando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\
\frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos cada una de las derivadas parciales de acuerdo a las relaciones:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

Es decir, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_\theta \\ \phi_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -r\operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

Invertimos la matriz:

$$\begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi/r & -\operatorname{sen}\varphi/(r\operatorname{sen}\theta) \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\varphi\cos\theta/r & \cos\varphi/(r\operatorname{sen}\theta) \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta/r & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_\theta \\ \phi_\varphi \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\phi_r + \cos\theta\cos\varphi/r\,\phi_\theta - \operatorname{sen}\varphi/(r\operatorname{sen}\theta)\phi_\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\phi_r + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta/r\,\phi_\theta + \cos\varphi/(r\operatorname{sen}\theta)\phi_\varphi \\ \cos\theta\,\phi_r - \operatorname{sen}\theta/r\,\phi_\theta \end{pmatrix}$$

Consideremos asimismo que:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\theta} &= \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{y}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\varphi} &= -\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Entonces, agrupando términos:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi}}$$

(b) Reemplazar es directo en este caso:

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}}$$

(c) A partir de la matriz ya obtenida en el punto (a), se tiene que:

$$\frac{\partial\,(x,y,z)}{\partial\,(r,\theta,\varphi)} = \left|\begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi & \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}\right|$$

Calculando este determinante mediante el método de los cofactores y simplificando los términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\,(x,y,z)}{\partial\,(r,\theta,\varphi)} &= -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\left(-r\,\mathrm{sen}^2\,\theta - r\cos^2\theta\right) - r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\varphi\left(-r\,\mathrm{sen}^2\,\theta - r\cos^2\theta\right) \\ &= -r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\mathrm{sen}^2\,\varphi + \cos^2\varphi\right) \end{aligned}$$

... Obtenemos finalmente que:

$$\boxed{\frac{\partial\,(x,y,z)}{\partial\,(r,\theta,\varphi)} = -r^2\,\mathrm{sen}\,\theta} \quad \blacksquare$$

Propuesto Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$. Se define el Laplaciano de f como $\vec{\nabla}^2 f = f_{xx} + f_{yy}$. Definimos el cambio de variables en coordenadas polares

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Demuestre que la fórmula del Laplaciano en coordenadas polares viene dado por:

$$\vec{\nabla}^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

2.2. Teorema de la función implícita

Recuerde el lector que para un sistema del tipo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ se tiene que si $m < n$, entonces necesariamente la solución $\mathbf{x}$ se escribirá como combinación lineal de algunos de los x_i del vector. En particular, m variables serán despejadas en función de las $n - m$ variables restantes.

La pregunta subsecuente es: ¿cómo se garantiza esto en un sistema lineal? En otras palabras, si el sistema está subdeterminado, ¿bajo qué condiciones podremos despejar algunas variables en función

de otras? En el caso del sistema lineal, basta con que las m variables despejadas correspondan a columnas linealmente independientes (por esa razón es que aparecen los pivotes).

Extendiéndolo a funciones no lineales: ¿cómo determinamos estas condiciones? La respuesta a estas interrogantes las entrega el Teorema de la Función Implícita, una condición suficiente pero no necesaria para garantizar este tipo de despejes de las funciones, muy útiles en superficies de nivel cuando es necesario determinar una función a partir de otras variables, como en el típico ejemplo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Partamos enunciando del teorema, de modo de recordar y conocer sus hipótesis y conclusiones.

Teorema: Teorema de la Función Implícita. Si se tiene que

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m \tag{2.12}$$

O bien, $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ y además se verifica que

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0 \quad \text{en } (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \tag{2.13}$$

entonces se puede despejar localmente $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ cerca del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. En otras palabras, existen vecindades $\mathcal{V}_1(\mathbf{x}_0)$ y $\mathcal{V}_2(\mathbf{y}_0)$ tales que para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_1$ existe un único $\mathbf{y} \in \mathcal{V}_2$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Sea F_k con $1 \leq k \leq m$. Entonces, se tendrá que

$$F_k = F_k\left[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1\left(x_1, \ldots, x_n\right), \ldots y_m\left(x_1, \ldots x_n\right)\right] = 0$$

Observe que podemos derivar la ecuación implícitamente, aplicando de forma correcta la Regla de la Cadena. De esta forma, si derivamos con respecto a x_j se tendrá que:

$$0 = \frac{\partial F_k}{\partial x_j} + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}$$

O bien,

$$\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = -\frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$

Esto debe cumplirse para todo k, con lo cual se genera el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} &= -\frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} &= -\frac{\partial F_k}{\partial x_j} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} &= -\frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Por inspección cuidadosa, puede notarse rápidamente que este sistema puede ser escrito de forma matricial como:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}\left(\mathbf{y}\right)\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}$$

donde $\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_j} = \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_j}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_j}, \ldots, \dfrac{\partial y_m}{\partial x_j}\right)$.

Dado que $\mathrm{D}\mathbf{F}\left(\mathbf{y}\right)$ debe ser invertible bajo las hipótesis del Teorema de la Función implícita, entonces deberá tenerse que:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_j} = -\mathrm{D}^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{y}\right)\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}$$

Recordando la Regla de Cramer (ver anexo al final), tendremos que para la componente $k-$ésima de $\mathbf{y}$ se tendrá que:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial\left(F_1, \ldots, F_m\right)}{\partial\left(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_j, y_{k+1}, \ldots y_m\right)}}{\dfrac{\partial\left(F_1, \ldots, F_m\right)}{\partial\left(y_1, \ldots, y_m\right)}} \leftarrow \text{posición } k-\text{ésima} \tag{2.14}$$

Es decir, para calcular la derivada parcial de y_k con respecto a x_j, dividimos el jacobiano de $F_1, \ldots, F_m$ con respecto a las variables y_m pero reemplazando en la posición (**¡Ojo aquí con las letras, no confundirse con la notación y el orden!**, fijarse en los colores) $k-$ésima (¡k, no j!) y_k por el x_j (¡j, no k!).

Esta forma de obtener las derivadas parciales resulta tremendamente útil en expresiones implícitas difíciles de manejar, y guarda un gran símil con las derivaciones implícitas en funciones de una variable:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}} \quad \text{pues} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ con } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \neq 0$$

Problema 2.9 Dada la ecuación $3y - 3xz - z^3 = 0$, determine condiciones para que ella defina una función diferenciable $z = f(x, y)$ y demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Solución:

Sea $F\left(x, y, z\right) = 3y - 3xz - z^3$. El Teorema de la Función Implícita plantea que se puede definir $z = f\left(x, y\right)$ para todo punto tal que

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = -3x - 3z^2 \neq 0$$

Es decir, todo punto tal que $x + z^2 \neq 0$ satisface lo pedido. Asumiendo que $z = f(x, y)$, se tiene

entonces que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{-3z}{-3x-3z^2} = -\frac{z}{x+z^2} \to (*)$$

Derivando nuevamente en función de x: (¡Ojo! z es función de x e y, por lo cual hay que derivar aplicando correctamente la regla de la cadena)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z_x\left(x+z^2\right) - z\left(1+2z\cdot z_x\right)}{\left(x+z^2\right)^2} = \underbrace{-\frac{xz_x - z - z^2\cdot z_x}{\left(x+z^2\right)^2}}_{\text{usamos } (*)} = \frac{2zx}{\left(x+z^2\right)^3}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{3}{-3x-3z^2} = \frac{1}{x+z^2}$$

$$\to \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2zz_y}{\left(x+z^2\right)^2} = \frac{-2z}{\left(x+z^2\right)^3}$$

Sumando,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2zx}{\left(x+z^2\right)^3} - \frac{2xz}{\left(x+z^2\right)^3} = 0$$

demostrando así lo pedido. ■

Con las ideas anteriores, la resolución del siguiente problema debiese ser directa.

Problema 2.10 Suponga que la expresión $F(x,y,z) = 0$ determina implícitamente funciones diferenciables $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ y $z = z(x,y)$. Demuestre que:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Solución:

Aplicando Regla de Cramer se tendrá que:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\to \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} \cdot -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \cdot -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -1$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 2.11 El sistema $u-v=x+y$, $u+v=x-y$ define funciones implícitas $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $x=x(u,v)$ e $y=y(u,v)$. Compruebe que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$$

Solución:

Dado el sistema

$$\begin{aligned} u-v &= x+y \\ u+v &= x-y \end{aligned}$$

este es equivalente a

$$\begin{aligned} u-v-x-y &= 0 \leftarrow F \\ u+v-x+y &= 0 \leftarrow G \end{aligned}$$

De acuerdo al Teorema de la Función Implícita, este permitirá despejar u y v en función de x e y si y solo si la siguiente matriz es invertible:

$$\begin{bmatrix} \partial F_1/\partial u & \partial F/\partial v \\ \partial G/\partial u & \partial G/\partial v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual evidentemente lo es dado su determinante. Análogamente, se puede despejar x e y en función de x e y si y solo si la matriz:

$$\begin{bmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible, lo cual también es cierto. Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix}$$

Si bien despejar las variables en este caso es muy evidente y se pueden calcular las derivadas parciales sin grandes dificultades, solo para reforzar los métodos algebraicos más sofisticados lo haremos mediante la regla de Cramer. Se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-2}{2} = 1$$

Análogamente se calcula:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-1$$

Es decir,

$$\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}=-1$$

Procediendo por analogía se llega a que

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=-1$$

lo cual, como veremos más adelante, es un resultado más que esperable. Con esto se concluye que:

$$\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=1$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 2.12 Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{w}\right) &= 0 \\ e^{x+u}-1 &= 0 \\ 2x-u+v-w+1 &= 0 \end{cases}$$

define implícitamente tres funciones $u=u\left(x\right)$, $v=v\left(x\right)$ y $w=w\left(x\right)$ en un entorno del punto $\left(x_0,u_0,v_0,w_0\right)=\left(0,0,0,1\right)$. Obtenga el desarrollo de Taylor de orden dos de $v(x)$ en torno a $x=0$.

Solución:

Observe que tenemos tres ecuaciones y tres funciones despejadas. Sean

$$F\left(x,u,v,w\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{w}\right) \quad ; \quad G\left(x,u,v,w\right)=e^{x+u}-1 \quad ; \quad H\left(x,u,v,w\right)=2x-u+v-w+1$$

entonces se cumplirá lo propuesto por el enunciado si y solo si

$$\frac{\partial\left(F,G,H\right)}{\partial\left(u,v,w\right)}\left(0,0,1\right)\neq 0$$

En efecto,

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\pi}{w^2}\cos\left(\frac{\pi}{w}\right) \\ e^{x+u} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -e^{x+u}\frac{\pi}{w^2}\cos\left(\frac{\pi}{w}\right)$$

Evaluando en los puntos dados,

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(0,0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\pi \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\pi \neq 0$$

demostrando así lo pedido ■

Dado que $v = v(x)$, su polinomio de Taylor de orden 2 viene dado por:

$$v(x) \approx v(0) + v'(0)\,x + \frac{v''(0)}{2}x^2$$

donde $v(0) = 0$ por la información del enunciado. Por Regla de Cramer ya sabemos que:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{\pi}{w^2}\cos\left(\frac{\pi}{w}\right) \\ e^{x+u} & e^{x+u} & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{\pi}{w^2}\cos\left(\frac{\pi}{w}\right) \\ e^{x+u} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{-e^{x+u}\frac{\pi}{w^2}\cos\left(\frac{\pi}{w}\right)(1+2)}{-e^{x+u}\frac{\pi}{w^2}\cos\left(\frac{\pi}{w}\right)}$$

$$\to \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x) = -3 \quad \text{para todo } x.$$

Es inmediato que $v''(0) = 0$ pues la derivada de v es constante. En otras palabras,

$$\boxed{v(x) \approx -3x}$$

No es de extrañar que el polinomio de Taylor de orden 2 resulte ser un polinomio de grado 1. En efecto, observe intuitivamente que cerca de $w = 1$ se tendrá que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{w}\right) = 0 \to \frac{\pi}{w} = k\pi \to w = 1$$

de la segunda ecuación, $x = -u$ con lo cual la tercera ecuación queda $3x + v = 0$, con lo cual efectivamente se verifica el resultado pedido. Esto puede interpretarse solamente como que el coeficiente del grado 2 de la expansión de orden 2 es 0, tal como en cualquier otra función polinomial de grado 2.

Merece atención la siguiente pregunta, donde no se pide solo demostrar que existen los despejes implícitos, si no que piden **encontrarlos**.

Problema 2.13 Si $F(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5$, **encontrar** soluciones de la forma $y = f(x)$ de la ecuación $F(x,y) = 0$, con f función de clase $\mathcal{C}^1$ en una vecindad del punto $(1,0)$ y respectivamente, una vecindad del punto $(1,2)$. ¿Qué puede decir de lo que ocurre en torno a $(0,0)$?

Solución:

La función F es claramente $\mathcal{C}^1$ por tratarse de una combinación de funciones conocidamente $\mathcal{C}^1$. Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -5x^4 + 4x\left(x^2 - y\right) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2x^2 + 2y$$

Por lo tanto, en el punto $(1,0)$ se tiene que $F_y(1,0) = -2 \neq 0$. Por lo tanto, por Teorema de la Función Implícita, se puede hacer el despeje de la función $y = f(x)$ en una vecindad abierta cerca de $x = 1$. Podemos despejarla directamente tomando la raíz negativa (pues es en torno a una vecindad de $y = 0$ y $x = 1$):

$$\left(y - x^2\right)^2 = x^5 \longrightarrow \boxed{y = x^2 - x^{5/2}}$$

En el caso del punto $(1,2)$, se tiene que $F_y(1,2) = 2 \neq 0$ y se puede aplicar nuevamente el Teorema de la Función Implícita, obteniendo vecindades para hacer el despeje, ahora tomando la rama positiva:

$$\boxed{f(x) = x^2 + y^{5/2}}$$

En el punto $(0,0)$ no se puede aplicar el teorema pues $F_y(0,0) = 0$. Ambas soluciones $f(x) = x^2 - x^{5/2}$ ó $f(x) = x^2 + x^{5/2}$ con $x \geq 0$ son de clase $\mathcal{C}^1$ y satisfacen $f(0) = 0$. Se conluye que **existen soluciones, pero no son únicas.** El teorema en este caso no garantiza ni existencia ni unicidad.

Problema 2.14 Dado el sistema

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= g(x,y) \\ w &= h(x,y,z), \end{aligned}$$

para el cual se cumple que $\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)} \neq 0$.

(a) Demuestre que, localmente, se pueden despejar variables y, u yz como funciones de (x,v,w) y que

$$\frac{\partial u}{\partial w} \equiv \frac{\partial y}{\partial w} \equiv 0$$

(b) Demuestre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{g_y h_z}\dfrac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)}$.

Solución:

(a) El sistema presentado es equivalente a:

$$\begin{aligned} u - f(x) &= 0 \leftarrow A(x,y,z,u,v,w) \\ v - g(x.y) &= 0 \leftarrow B(x,y,z,u,v,w) \\ w - h(x,y,z) &= 0 \leftarrow C(x,y,z,u,v,w) \end{aligned}$$

Se podrá realizar el despeje a la luz del Teorema de la Función Implícita si y solo si

$$\frac{\partial(A,B,C)}{\partial(y,u,z)} \neq 0$$

Realizando la derivación,

$$\frac{\partial(A,B,C)}{\partial(y,u,z)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -g_y & 0 & 0 \\ -h_y & 0 & -h_z \end{vmatrix} = -g_y h_z$$

Luego, por Regla de Cramer se tendrá que:

$$\frac{\partial u}{\partial w} = -\frac{\dfrac{\partial(A,B,C)}{\partial(y,w,z)}}{\dfrac{\partial(A,B,C)}{\partial(y,u,z)}} = \frac{1}{g_y h_z}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g_y & 0 & 0 \\ -h_y & 1 & -h_z \end{vmatrix} = 0$$

pues la primera fila de la matriz es cero y por lo tanto esta es singular (no invertible). Análogamente,

$$\frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{\dfrac{\partial(A,B,C)}{\partial(w,u,z)}}{\dfrac{\partial(A,B,C)}{\partial(y,u,z)}} = \frac{1}{g_y h_z}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g_y & 0 & 0 \\ -h_y & 1 & -h_z \end{vmatrix} = \frac{1}{g_y h_z}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -h_z \end{vmatrix} = 0$$

pues la primera columna es claramente linealmente dependiente de la tercera. Con esto se demuestra así todo lo pedido. ■

(b) Tenemos bajo la Regla de Cramer que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(A,B,C)}{\partial(y,u,x)}}{\dfrac{\partial(A,B,C)}{\partial(y,u,z)}} = \frac{1}{g_y h_z}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -f_x \\ -g_y & 0 & -g_x \\ -h_y & 0 & -h_x \end{vmatrix} = \frac{1}{g_y h_z}\left(g_x h_y - g_y h_x\right)$$

Pero,

$$\frac{1}{g_y h_z}\left(g_x h_y - g_y h_x\right) = -\frac{1}{g_y h_z}\left(h_x g_y - g_x h_y\right) = -\frac{1}{g_y h_z}\frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)}$$

por definición de jacobiano. Finalmente, concluimos que:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{g_y h_z}\frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y)}} \quad ■$$

Problema 2.15 Considere el sistema

$$\begin{cases} xy + e^{ux} + 2v &= 3 \\ x + uy - v &= -1 \end{cases}$$

(a) Compruebe que existe una vecindad de $\mathbf{p} = (0,1)$ y funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ tales que $u(0,1) = 0$ y $v(0,1) = 1$ que resuelven el sistema.

(b) Calcule $u_x(0,1)$ y $u_{xy}(0,1)$.

Solución:

(a) Definamos:

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) &= xy + e^{ux} + 2v - 3 \\ G(x,y,u,v) &= x + uy - v + 1 \end{aligned}$$

Se cumplirá lo planteado por el enunciado si y solo si:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} xe^{ux} & 2 \\ y & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

en $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 0, 1)$ (dado por el enunciado). Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

por lo cual a la luz del Teorema de la Función Implícita se cumplirá lo pedido. ■

(b) De acuerdo a la Regla de Cramer se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{1}{xe^{ux}+2y}\begin{vmatrix} y+ue^{ux} & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{(y+ue^{ux}+2)}{xe^{ux}+2y}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(0,1) = -\frac{3}{2}}$$

Adicionalmente, derivando en función de y se tiene que:

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{(y+ue^{ux}+2)}{xe^{ux}+2y} \\ &= -\frac{(1+u_y e^{ux}+uxu_y e^{ux})(xe^{ux}+2y) - (x^2 u_y e^{ux}+2)(y+ue^{ux}+2)}{(xe^{ux}+2y)^2} \end{aligned}$$

Observe que al derivar aparece u_y, razón por la cual requerimos calcularlos:

$$u_y = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{1}{xe^{ux}+2y}\begin{vmatrix} x & 2 \\ u & -1 \end{vmatrix} = -\frac{x+2u}{xe^{ux}+2y}$$

En vez de reemplazar con esta expresión, dado que solo nos la piden en un punto particular evaluamos directamente y solo ahí reemplazamos:

$$u_y(0,1) = 0$$

Finalmente,

$$u_{xy}(0,1) = -\frac{1-6}{2} \rightarrow \boxed{u_{xy}(0,1) = \frac{5}{2}}$$

Problema 2.16 Verifique que el sistema

$$\begin{aligned} 3x^2+2y^2-3xy+4uv &= 6 \\ y^2+v^2-xv+yu &= 0 \end{aligned}$$

define implícitamente $x = h_1(u,v)$, $y = h_2(u,v)$ en algún entorno de $(1,1,1,1)$ y calcule

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(1,1,1,1).$$

Solución:

Definiendo:

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) &= 3x^2+2y^2-3xy+4uv-6 \\ G(x,y,u,v) &= y^2+v^2-xv+yu \end{aligned}$$

De acuerdo al Teorema de la Función Implícita, para que se cumpla lo pedido requerimos que:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

Entonces,

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 6x-3y & 4y-3x \\ -v & 2y+u \end{vmatrix} = (6x-3y)(2y+u)+v(4y-3x)$$

Evaluando en $(1,1,1,1)$ tendremos que:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = 3\cdot 3+1 \neq 0$$

Para calcular la derivada partimos calculando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{(6x-3y)(2y+u)+v(4y-3x)}\begin{vmatrix} 4u & 4y-3x \\ 2v-x & 2y+u \end{vmatrix} \\ &= -\frac{4u(2y+u)-(2v-x)(4y-3x)}{(6x-3y)(2y+u)+v(4y-3x)} \end{aligned}$$

Derivando nuevamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u\partial v} &= -\frac{\partial}{\partial u}\frac{4u\left(2y+u\right)+x\left(4y-3x\right)}{\left(6x-3y\right)\left(2y+u\right)+v\left(4y-3x\right)}\\ &= -\frac{\left[4\left(2y+u\right)+4u\left(2y_u+1\right)+x_u\left(4y-3x\right)+x\left(4y_u-3x_u\right)\right]\left[\left(6x-3y\right)\left(2y+u\right)+v\left(4y-3x\right)\right]\cdots}{\left[\left(6x-3y\right)\left(2y+u\right)+v\left(4y-3x\right)\right]^2}\\ &\quad\cdots\frac{\cdots-\left[4u\left(2y+u\right)+x\left(4y-3x\right)\right]\left[\left(6x_u-3y_u\right)\left(2y+u\right)+\left(6x-3y\right)\left(2y_u+1\right)+v\left(4y_u-3x_u\right)\right]}{\cdots}\end{aligned}$$

Es evidente que requerimos x_u e y_u, razón por la cual las calculamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{\dfrac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(u,y\right)}}{\dfrac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(x,y\right)}} = -\frac{1}{\left(6x-3y\right)\left(2y+u\right)+v\left(4y-3x\right)}\begin{vmatrix}4v & 4y-3x\\ y & 2y+u\end{vmatrix}\\ &= -\frac{4v\left(2y+u\right)-y\left(4y-3x\right)}{\left(6x-3y\right)\left(2y+u\right)+v\left(4y-3x\right)}\end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(1,1\right) = -\frac{12-1}{9+1} = -\frac{11}{10}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\dfrac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(x,u\right)}}{\dfrac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(x,y\right)}} = -\frac{1}{\left(6x-3y\right)\left(2y+u\right)+v\left(4y-3x\right)}\begin{vmatrix}6x-3y & 4v\\ -v & y\end{vmatrix}\\ &= -\frac{\left(6x-3y\right)y+4v^2}{\left(6x-3y\right)\left(2y+u\right)+v\left(4y-3x\right)}\end{aligned}$$

Evaluando,

$$\frac{\partial y}{\partial u}\left(1,1\right) = -\frac{3+4}{9+1} = -\frac{7}{10}$$

Finalmente, reemplazamos:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = -\frac{10\left[12+4\left(-\frac{14}{10}+1\right)-\frac{11}{10}-\frac{28}{10}+\frac{33}{10}\right]-\left(12+1\right)\left[3\left(-\frac{66}{10}+\frac{21}{10}\right)+3\left(1-\frac{14}{10}\right)+\left(-\frac{28}{10}+\frac{33}{10}\right)\right]}{100}$$

obteniendo así,

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\left(1,1,1,1\right) = \frac{433}{50}}$$

Problema 2.17 Sea $G(x,y)$ una función dos veces diferenciable. Considere la función

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + zG(x,y) - z^2$$

(a) Determine las condiciones sobre x, y y $G(x,y)$ de modo que $F(x,y,z) = 0$ permita definir $z = f(x,y)$ implícitamente como función dos veces diferenciable.

(b) Pruebe que en dicho caso se verifica la ecuación

$$(G - 2z)\vec{\nabla}^2 f + 2\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} G - 2\left\|\vec{\nabla} f\right\|^2 + z\vec{\nabla}^2 G = -4$$

Solución:

(a) Aplicando el Teorema de la Función Implícita, deberá cumplirse que:

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

Derivando la relación implícita:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = G(x,y) - 2z \neq 0$$

Entonces como $G(x,y)$ es una función que depende exclusivamente de x e y, entonces basta imponer que $G(x,y) \neq 0$ en todo punto para que siempre se pueda hacer el despeje de la función z (en particular cuando $z = 0$).

(b) Dado que aparecen laplacianos, la sugerencia es derivar dos veces ambas ecuaciones, cruzando los dedos de encontrar una relación. Hagámoslo:

- Derivando en función de x la relación y asumiendo que $z = f(x,y)$, se tendrá que:

$$2x + f_x G + f G_x - 2 f f_x = 0$$

Derivando nuevamente en función de x:

$$2 + f_{xx} G + f_x G_x + f_x G_x + f G_{xx} - 2 f_x^2 - 2 f f_{xx} = 0$$

- Derivando en función de y:

$$2y + f_y G + f G_y - 2 z z_y = 0$$

Derivando nuevamente en función de y:

$$2 + f_{yy} G + f_y G_y + f_y G_y + f G_{yy} - 2 f_y^2 - 2 f f_{yy} = 0$$

Sumando ambas ecuaciones de las dobles derivadas:

$$4 + \underbrace{(f_{xx} + f_{yy})}_{\vec{\nabla}^2 f} G + 2 \underbrace{(f_x G_x + f_y G_y)}_{\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} G} + f \underbrace{(G_{xx} + G_{yy})}_{\vec{\nabla}^2 G} - 2 \underbrace{\left(f_x^2 + f_y^2\right)}_{\left\|\vec{\nabla} f\right\|^2} - 2 f \underbrace{(f_{xx} + f_{yy})}_{\vec{\nabla}^2 f} = 0$$

Concluimos así que:

$$(G - 2z)\, \vec{\nabla}^2 f + 2 \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} G - 2 \left\| \vec{\nabla} f \right\|^2 + z \vec{\nabla}^2 G = -4 \quad \blacksquare$$

Propuesto Suponga que la expresión

$$\int_{xz}^{y+z} g(t) \mathrm{d}t + \int_{3x+y}^{z^2} h\,(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

donde $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, define implícitamente una función diferenciable $z = f\,(x, y)$. Determine sus derivadas parciales.

Anexo: La Regla de Cramer

Teorema: Sea $\mathbf{A}$ de $n \times n$ invertible y sea el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces se tiene que

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}$$

donde $\mathbf{A}_j$ denota la matriz en que la columna $j-$ésima es reemplazada por el vector $\mathbf{b}$.

Demostración:

Para A invertible se tiene que $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Como $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\mathrm{Adj}(\mathbf{A})$ se sigue que

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathrm{Adj}(\mathbf{A})\mathbf{b}$$

La componente $j-$ésima se obtiene premultiplicando por $\hat{\mathbf{e}}_j$, lo que equivale a obtener la fila $j-$ésima de $\text{Adj}(\mathbf{A})\mathbf{b}$. Notemos que

$$\hat{\mathbf{e}}_j^T \text{Adj}(\mathbf{A})\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|\mathbf{b}_j = |\mathbf{A}_j|$$

donde $|\mathbf{A}_{ij}|$ representa la matriz obtenida de eliminar la fila i-ésima y la columna $j-$ *ésima*. Finalmente,

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}$$

2.3. Teorema de la función inversa

Una extensión, o bien consecuencia directa del Teorema de la Función Implícita, es el teorema siguiente:

Teorema: (de la Función Inversa) Dada $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ en una vecindad de $\mathbf{x}_0$. Sea $\mathbf{y}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$. Si $|\mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)| \neq 0$, entonces existe vecindad $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ en la cual $\mathbf{F}$ es $1-1$ y por lo tanto invertible.

Observación: Sea $\mathbf{F}^{-1}(x)$ la función inversa en la vecindad $V(\mathbf{x}_0)$. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F}\right)(\mathbf{x}) &= \mathbb{I}\mathbf{x} \\
\mathrm{D}\left(\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F}\right)(\mathbf{x}) &= \mathbb{I} \\
\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y})\mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbb{I} \\
\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y}) &= \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x})^{-1}
\end{aligned}$$

Tomando el determinante en ambos extremos concluimos que

$$\boxed{\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x})^{-1}} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}}}$$

Estas son las dos fórmulas importantes para esta sección. Partamos resolviendo problemas de carácter básico:

Problema 2.19

(a) Sea $\mathbf{F}(x,y) = (x+y, xy)$. Demuestre que $\mathbf{F}$ es invertible en una vecindad de $(2,1)$ y calcule $\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(3,2)$ sin determinar $\mathbf{F}^{-1}$.

(b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) = 1$. Considere la función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\int_x^y g(t)\mathrm{d}t, \int_y^{x^2} g(t)\mathrm{d}t \right)$$

Demuestre que esta función tiene una inversa $\mathbf{F}^{-1}$ definida en una bola B del origen de coordenadas. Determine $\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(0,0)$.

Solución:

(a) Tenemos que:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix} \to \mathrm{D}\mathbf{F}(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

la cual tiene determinante distinto de cero pues sus columnas son l.i. Luego, la función es localmente invertible a la luz del Teorema de la Función Inversa. Tenemos que:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(3,2) = \mathrm{D}\mathbf{F}(2,1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Aplicando el método de cálculo de funciones inversas tenemos que:

$$\boxed{\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(3,2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

(b) Obtenemos la matriz jacobiana derivando de forma apropiada y aplicando el T.F.C.:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} -g(x) & g(y) \\ 2xg(x^2) & -g(y) \end{bmatrix}$$

En el origen de coordenadas se tiene que:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la cual es claramente invertible. Luego, por el Teorema de la Función Inversa tenemos que la función tiene inversa en una bola centrada en el origen.

Análogamente, tenemos que:

$$\boxed{\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Problema 2.20 Si $(u,v) = \mathbf{F}(x,y)$ es una función invertible con primeras derivadas parciales continuas. ¿Qué condición(es) deben cumplir las derivadas parciales de u y v respecto a x y y para que se cumpla que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\partial u/\partial x}?$$

Solución:

Partamos interpretando la información de la que sí disponemos. Tenemos que como $\mathbf{F}$ es invertible, entonces:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$$

es invertible si y solo si $u_x v_y - u_y v_x \neq 0$ lo cual se asume cierto por hipótesis para todo x, y.

Observe que en el enunciado se habla de las derivada parcial de x con respecto a u, razón por la cual una buena forma de conectar la información es calculando la matriz jacobiana de $\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}$, ya que en ella aparecerá información sobre x_u. Se tiene que:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(u,v) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \overset{\text{teo.}}{=} \frac{1}{u_x v_y - u_y v_x} \begin{bmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$x_u = \frac{v_y}{u_x v_y - u_y v_x}$$

Buscamos entonces que

$$\frac{v_y}{u_x v_y - u_y v_x} = \frac{1}{u_x}$$

Basta que $\boxed{u_y v_x = 0}$ y $\boxed{v_y \neq 0}$ para que se cumpla lo pedido, pues de esta forma se tendrá que:

$$\frac{v_y}{u_x v_y - u_y v_x} = \frac{v_y}{u_x v_y} = \frac{1}{u_x}$$

que es exactamente lo buscado.

Problema 2.21 Pruebe que la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y) = (u,v) = \left(e^{-x} + e^{2y}, e^{2x} + e^{3y}\right)$$

es localmente invertible en todo punto y calcule $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(\mathbf{p}_0)$ donde

$$\mathbf{p}_0 = (x,y,u,v) = (0,0,2,2)\,.$$

Solución:

Tenemos que:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} -e^{-x} & 2e^{2y} \\ 2e^{2x} & 3e^{3y} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\left[3e^{3y-x} + 4e^{2(x+y)}\right]$$

Dado que las exponenciales reales son siempre positivas, tendremos que siempre $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ para todo (x,y).

Luego, se demuestra gracias al Teorema de la Funcion Inversa que la función es localmente invertible en todo punto. Si bien no podemos despejar localmente de forma sencillas las funciones dado que aparecen sumas de logaritmos con distintos coeficientes, podemos aplicar lo ya estudiado:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(u,v) = \mathrm{D}\mathbf{F}(x,y)^{-1} = -\frac{1}{3e^{3y-x} + 4e^{2(x+y)}} \begin{bmatrix} 3e^{3y} & -2e^{2y} \\ -2e^{2x} & -e^{-x} \end{bmatrix}$$

Requerimos calcular x_{vu}, con lo cual identificamos inmediatamente a partir de la matriz que:

$$x_v = \frac{2e^{2y}}{3e^{3y-x} + 4e^{2x+2y}}$$

Derivamos nuevamente, ahora con respecto a u, pero considerando que $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$. Entonces, se tiene que:

$$x_{vu} = \frac{4e^{2y}y_u\left(3e^{3y-x} + 4e^{2x+2y}\right) - 2e^{2y}\left[3e^{3y-x}\left(3y_u - x_u\right) + 8e^{(2x+2y)}\left(x_u + y_u\right)\right]}{\left(3e^{3y-x} + 4e^{2x+2y}\right)^2}$$

Despejando x_u e y_u de la matriz tenemos que en el punto pedido, $(x,y) = (0,0)$ obtenemos:

$$x_u(2,2) = -\frac{3}{7} \quad ; \quad y_u = \frac{2}{7}$$

Finalmente,

$$x_{vu}(2,2) = \frac{4\frac{2}{7}(7) - 2\left[3\left(\frac{6}{7} + \frac{3}{7}\right) - \frac{8}{7}\right]}{7^2} = \frac{8 - 2\left(\frac{19}{7}\right)}{7^2} = \frac{18}{7^3}$$

$$\therefore \boxed{x_{vu}(2,2) = \frac{18}{7^3}}$$

Problema 2.22 Sea $\mathbf{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ una función diferenciable $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Suponga que $\mathbf{F}(0,0) = (0,0)$ y que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(0,0) = -1,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Considere la función $\mathbf{G} = \mathbf{F} \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{F}$. Demuestre que $\mathbf{G}$ es invertible en una vecindad de $(0,0)$ y calcule la matriz jacobiana inversa en $(0,0)$.

Solución:

La información que se nos está entregando es que:

$$D\mathbf{F}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Asimismo, sabemos que como $\mathbf{F}(0,0) = (0,0)$ entonces $\mathbf{G}(0,0) = \mathbf{F}(0,0) = (0,0)^*$ y a su vez:

$$D\mathbf{G}(0,0) = D\mathbf{F}(0,0)\, D\mathbf{F}(0,0)\, D\mathbf{F}(0,0)$$

Es decir,

$$D\mathbf{G}^{-1}(0,0) = D\mathbf{F}(0,0)^{-1}\, D\mathbf{F}(0,0)^{-1}\, D\mathbf{F}(0,0)^{-1}$$

Evaluando:

$$\boxed{D\mathbf{F}(0,0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow D\mathbf{G}^{-1}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

¡Ojo! La observación marcada con (*) **NO** implica (necesariamente) que $D\mathbf{G}(0,0) = D\mathbf{F}(0,0)$. Recuerde Cálculo I: que dos funciones valgan lo mismo en un punto, ¿implica que sus derivadas son necesariamente iguales en dicho punto? ¿por qué en este caso esto sería una excepción?

Problema 2.23 Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{F}(x,y)=(u,v)$ donde$u=x+1$, $v=x+y^3+1$. Determine los puntos en los cuales se puede definir $\mathbf{F}^{-1}$ y calcule

$$\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial y}{\partial v}\quad \text{y}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

Solución:

De acuerdo al Teorema de la Función Inversa, aquellos puntos serán los que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$$

Derivando:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3y^2\end{bmatrix}=3y^2$$

Luego, es posible despejar localmente $\mathbf{F}^{-1}$ en torno a todo punto tal que $\boxed{y\neq 0}$. Observe que las derivadas parciales también es posible despejarlas a partir del sistema, derivando implícitamente de forma adecuada el sistema:

$$\begin{cases}u= & x+1\\ v= & x+y^3+1\end{cases}$$

Derivando con respecto a u:

$$\begin{aligned}1 &= x_u\\ 0 &= x_u+3y^2y_u\end{aligned}$$

Es decir, $x_u=1$ y por lo tanto (aunque no se pide directamente) $y_u=-1/3y^2$. Análogamente, derivando respecto a v:

$$\begin{aligned}0 &= x_v\\ 1 &= x_v+3y^2y_v\end{aligned}$$

Se sigue que $x_v=y_v=0$. Finalmente,

$$y_u=-3^{-1}y^{-2}\to y_{uu}=\frac{2}{3y^3}y_u$$

Reemplazando con y_u:

$$\boxed{y_{uu}=-\frac{2}{9y^5}}$$

Problema 2.24 Las siguientes preguntas son independientes.

(a) Considere la transformación $u = x + x^2 + y$, $v = x^5 + y^2$. Halle, en caso de existir, $y_u\,(3,2)$ sabiendo que $u\,(1,1) = 3$ y $v\,(1,1) = 2$.

(b) Considere el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= u^2 + 2v \\ y &= 2u + v^2 \end{aligned}$$

Usando el Teorema de la Función Inversa, calcule u_x y v_x como funciones de u y v. Haciendo uso de estos cálculos, encuentre f_{xx} para $f = f(u,v)$ una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$.

Solución:

(a) Derivando implícitamente:

$$u = x + x^2 + y \to 1 = x_u + 2x \cdot x_u + y_u$$

$$v = x^5 + y^2 \to 0 = 5x^4 x_u + 2y \cdot y_u$$

Evaluando en el punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 3, 2)$ (de acuerdo al enunciado) tendremos que:

$$\begin{aligned} 1 &= 3x_u + y_u \\ 0 &= 5x_u + 2y_u \end{aligned}$$

Dado que piden despejar y_u, multiplicamos el sistema:

$$\begin{aligned} 5 &= 15x_u + 5y_u \\ 0 &= 15x_u + 6y_u \end{aligned}$$

Restando,

$$\boxed{y_u\,(3,2) = -5}$$

(b) Aplicándolo, tenemos que:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}\,(u,v) = \begin{bmatrix} 2u & 2 \\ 2 & 2v \end{bmatrix}$$

Dado que el determinante es $4\,(uv - 1)$, calculamos la función inversa sin mayores dificultades. De esta forma,

$$\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}\,(x,y) = \frac{1}{4\,(uv-1)} \begin{bmatrix} 2v & -2 \\ -2 & 2u \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$u_x = \frac{v}{2\,(uv-1)} \quad \text{y} \quad v_x = -\frac{1}{2\,(uv-1)}$$

Derivando,

$$f_x = f_u u_x + f_v v_x$$

Derivando nuevamente, aplicando lo ya aprendido sobre la Regla de la Cadena:

$$f_{xx} = f_{uu}u_x^2 + f_{uv}u_x v_x + f_u u_{xx} + f_{vu}u_x v_x + f_{vv}v_x^2 + f_v v_{xx}$$

Calculando,

$$u_{xx} = \frac{2v_x\left(uv-1\right) - 2v\left(u_x v + uv_x\right)}{4\left(uv-1\right)^2} = \frac{v_x\left(uv-1\right) - v\left(u_x v + uv_x\right)}{2\left(uv-1\right)^2}$$

$$v_{xx} = \frac{u_x v + uv_x}{2\left(uv-1\right)^2}$$

Reemplazando, y notando que $f_{uv} = f_{vu}$:

$$\begin{aligned} f_{xx} \;=\; & \frac{v^2}{4\left(uv-1\right)^2} f_{uu} - \frac{v}{2\left(uv-1\right)^2} f_{uv} + \frac{v_x\left(uv-1\right) - v\left(u_x v + uv_x\right)}{2\left(uv-1\right)^2} f_u \\ & \cdots + \frac{u_x v + uv_x}{2\left(uv-1\right)^2} f_v + \frac{1}{4\left(uv-1\right)^2} f_{vv} \end{aligned}$$

donde u_x y v_x ya son conocidos.

Problema 2.25 Sea $\mathbf{G} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$ una función con derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^4$ y tal que satisface $\mathbf{G}(0,0,0,0) = (0,0)$ y

$$\frac{\partial G_1}{\partial z}\frac{\partial G_2}{\partial w} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\frac{\partial G_1}{\partial w} \neq 0 \quad \text{en el punto } (0,0,0,0)$$

Se define $\mathbf{H}(x,y,z,w) = \left(x, y, G_1(x,y,z,w), G_2(x,y,z,w)\right)$.

(a) Pruebe que $\mathbf{H}$ es localmente invertible en el origen.

(b) Suponga que $\vec{\nabla} G_1(\mathbf{0}) = (0,0,2,0)$ y $\vec{\nabla} G_2(\mathbf{0}) = (0,0,0,3)$. Calcule la matriz jacobiana de $\mathbf{K} = \mathbf{G} \circ \mathbf{H}^{-1}$ en el origen.

Solución:

(a) Para probar invertibilidad tenemos que tomar la matriz jacobiana de $\mathbf{H}$, la cual por definición corresponde a:

$$\mathrm{D}\mathbf{H}(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \partial G_1/\partial x & \partial G_1/\partial y & \partial G_1/\partial z & \partial G_2/\partial w \\ \partial G_2/\partial x & \partial G_2/\partial y & \partial G_2/\partial z & \partial G_2/\partial w \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{¡}\nabla G_1\text{!} \\ \leftarrow \text{¡}\nabla G_2\text{!} \end{matrix}$$

Tomando el determinante se tiene que:

$$\frac{\partial\left(H_1,H_2,G_1,G_2\right)}{\partial\left(x,y,z,w\right)}\left(0,0,0,0\right)=\frac{\partial G_1}{\partial z}\frac{\partial G_2}{\partial w}-\frac{\partial G_2}{\partial z}\frac{\partial G_1}{\partial w}\neq 0$$

por hipótesis del enunciado. Luego, la función es invertible en una vecindad del origen. ■

(b) Buscamos calcular D$\mathbf{K}$, la cual es claramente una matriz de 2×4 (dado que $\mathbf{K}$es una función $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$) pero por diferenciabilidad:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\mathbf{K}\left(0,0,0,0\right) &= \mathrm{D}\mathbf{G}\left(\mathbf{H}\left(0,0,0,0\right)\right)\mathrm{D}\mathbf{H}^{-1}\left(0,0,0,0\right)\\ &= \mathrm{D}\mathbf{G}\left(\mathbf{H}\left(0,0,0,0\right)\right)\mathrm{D}\mathbf{H}\left(0,0,0,0\right)^{-1}\end{aligned}$$

Se tiene entonces que dado que conocemos $\vec{\nabla}G_1$ y $\vec{\nabla}G_2$ en estos puntos, podemos entonces reemplazarlos en la definición de matriz jacobiana rápidamente:

$$\mathrm{D}\mathbf{H}\left(0,0,0,0\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}\to\mathrm{D}\mathbf{H}^{-1}\left(0,0,0,0\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&1/3\end{bmatrix}$$

Adicionalmente,

$$\mathrm{D}\mathbf{G}\left(x,y,z,w\right)=\begin{bmatrix}-&\vec{\nabla}G_1^{\dagger}&-\\-&\vec{\nabla}G_2^{\dagger}&-\end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{H}\left(0,0,0,0\right)=\left(0,0,G_1\left(0,0,0,0\right),G_2\left(0,0,0,0\right)\right)=\left(0,0,0,0\right)$, entonces:

$$\mathrm{D}\mathbf{G}\left(0,0,0,0\right)=\begin{bmatrix}\vec{\nabla}G_1\left(0,0,0,0\right)^{\dagger}\\\vec{\nabla}G_1\left(0,0,0,0\right)^{\dagger}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$\mathrm{D}\mathbf{K}\left(0,0,0,0\right)=\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&1/3\end{bmatrix}$$

$$\to\boxed{\mathrm{D}\mathbf{K}\left(0,0,0,0\right)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},}$$

lo cual no es un resultado que deba llamar la atención, si pensamos que en la matriz jacobiana de $\mathbf{H}$ aparecían las derivadas parciales de $\mathbf{G}$ y estas a su vez aparecían en la matriz inversa de $\mathbf{G}$.

Problema 2.26 Considere la transformación $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$u = xy^2 \quad , \quad v = x + 3y \quad , \quad w = z - x$$

Se verifica $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{b}) = (4, 7, -2) = \mathbf{c}$ para los puntos $\mathbf{a} = (4, 1, 2)$ y $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$.

(a) Pruebe que en torno a ambos puntos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ existen inversas locales $(x, y, z) = \mathbf{G}_1(u, v, w)$ y $(x, y, z) = \mathbf{G}_2(u, v, w)$ que satisfacen $\mathbf{G}_1(\mathbf{c}) = \mathbf{a}$, $\mathbf{G}_2(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, en el punto $\mathbf{c}$, para ambas inversas.

Solución:

(a) Tomando el jacobiano:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3y^2 - 2xy$$

En $\mathbf{a} = (4, 1, 2)$ el jacobiano vale $3 - 8 \neq 0$ y en $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$ vale $12 - 4 \neq 0$, por lo cual de acuerdo al Teorema de la Función Inversa sí es posible despejar localmente las inversas $\mathbf{G}_1(\mathbf{c}) = \mathbf{a}$ y $\mathbf{G}_2(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$, demostrando así lo pedido. ■

(b) Para calcular esta matriz podemos

- Derivar implícitamente el sistema de ecuaciones como ya hemos hecho.
- Invertir la matriz jacobiana.

Si bien el segundo procedimiento es bastante más tedioso, garantiza un tratamiento sistemático que no está demás repasar. Recordamos que la matriz inversa puede calcularse como:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathrm{Adj}(\mathbf{A})$$

donde $\mathrm{Adj}(\mathbf{A})$ es la transpuesta de la matriz de cofactores. Es decir,

$$\mathrm{Adj}(\mathrm{D}\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2xy & y^2 & -2xy \\ 0 & 0 & 3y^2 - 2xy \end{bmatrix}^{\dagger} \to \mathrm{Adj}(\mathrm{D}\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 3 & -2xy & 0 \\ -1 & y^2 & 0 \\ 3 & -2xy & 3y^2 - 2xy \end{bmatrix}$$

De esta forma,

$$\mathrm{D}\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{3y^2 - 2xy}\begin{bmatrix} 3 & -2xy & 0 \\ -1 & y^2 & 0 \\ 3 & -2xy & 3y^2 - 2xy \end{bmatrix}$$

Finalmente, de acuerdo a la definición de la matriz jacobiana inversa:

$$x_v = \frac{2xy}{2xy - 3y^2}$$

Evaluando en el punto $\mathbf{c}$ para la primera inversa, entonces $\mathbf{a} = (4, 1, 2)$ con lo cual

$$x_{v_1}(\mathbf{c}) = \frac{8}{8-3} \rightarrow \boxed{x_{v_1}(\mathbf{c}) = \frac{8}{5}}$$

Análogamente, para $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$:

$$x_{v_2}(\mathbf{c}) = \frac{4}{4-12} = -\frac{4}{8} \rightarrow \boxed{x_{v_2}(\mathbf{c}) = -\frac{1}{2}}$$

Nota: Se puede observar que, con la debida práctica, no era necesario tomar toda la matriz adjunta, si no que solamente la componente marcada en azul en la matriz adjunta, y dividirla por el determinante para así obtener x_v.

Comentario: Esto no hace más que comprobar el hecho de que el Teorema de la Función Inversa define inversas locales en torno a cierto punto, no garantiza que la inversa sea la misma para un $\mathbf{c}$ dado en torno a puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, pudiendo incluso generar funciones diferentes, con derivadas diferentes, como se pudo ratificar.

Problema 2.27 Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x,y) = \int_0^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad g(x,y) = \int_0^{xy} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Probar que f y g son de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^2$ y calcular sus diferenciales.

(b) Se define $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\mathbf{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$. Suponiendo que $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$ son no nulos, probar que $\mathbf{F}$ es un $\mathcal{C}^1-$difeomorfismo de una vecindad $(0,1)$ (respectivamente $(1,0)$)[a].

(c) Suponiendo $\varphi(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pruebe que la restricción de $\mathbf{F}$ al dominio $\mathcal{D} = \{(x,y) : x < y\}$ es un $\mathcal{C}^1-$difeomorfismo de $\mathcal{D}$ sobre $\mathbf{F}(\mathcal{D})$.

[a] Esto puede interpretarse como que $\mathbf{F}^{-1}(1,0) = (0,1)$ o bien que hay que hacerlo también para el otro punto.

Solución:

(a) Recordamos que una función es de clase $\mathcal{C}^n$ si todas sus derivadas parciales $n-$ésimas existen y son continuas. Se sigue de inmediato por teorema que si f es de clase $\mathcal{C}^1$ entonces es diferenciable.

Tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi(x+y) \to \text{continua (composición)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi(x+y) \to \text{continua (composición)}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = y\varphi(xy) \to \text{continua (multiplicación)}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = x\varphi(xy) \to \text{continua (multiplicación)}$$

Luego, encontramos lo pedido y demostramos que ambas son de clase $\mathcal{C}^1$ por simple inspección.

(b) Una función es un $\mathcal{C}^1-$difeomorfismo si es invertible y de clase $\mathcal{C}^1$. En este caso, $\mathbf{F}$ es evidentemente de clase $\mathcal{C}^1$ pues tanto f como g lo son. Para demostrar que es invertible, usamos simplemente el Teorema de la Función Inversa. Se tiene que:

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} \varphi(x+y) & \varphi(x+y) \\ y\varphi(xy) & x\varphi(xy) \end{bmatrix} \to \mathrm{D}\mathbf{F}^{-1}(0,1) = \begin{bmatrix} \varphi(1) & \varphi(1) \\ \varphi(0) & 0 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz anterior es $-\varphi(0)\varphi(1)$, claramente no nulo por hipótesis, demostrando así lo pedido. ■

(c) Esto es equivalente a demostrar que si imponemos que $y > x$, entonces $\mathbf{F}$ es invertible en todo punto. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} &= x\varphi(x+y)\varphi(xy) - y\varphi(x+y)\varphi(xy) \\ &= (x-y)\varphi(x+y)\varphi(xy)\end{aligned}$$

Si $\varphi(t) > 0$ para todo $\mathbb{R}$, entonces el segundo y tercer término nunca se anula. Como $x < y \to x - y < 0$ y por lo tanto el determinante nunca se anula. Luego, la función es invertible para todo $x < y$, demostrando así lo pedido. ■

Propuesto Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{p} \in \Omega$ un punto tal que $\vec{\nabla} f(\mathbf{p}) \neq 0$. Considere que la función $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}), x_2, \ldots, x_n)$.

(a) Demuestre que esta función tiene inversa $\mathbf{F}^{-1}$ definida en alguna bola B de $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ en $\mathbb{R}^n$.

(b) Demuestre que existe una infinidad de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(\mathbf{x}) = c$, con c en el rango de f.

(c) ¿Qué puede concluir respecto a la inyectividad de f cualquiera con el resultado anterior?

3. Integrales múltiples

El objetivo del siguiente apartado es calcular el valor de una integral para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un conjunto de puntos $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, con especial énfasis en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ ya que son aquellas presentan el mayor campo de aplicación en cálculo vectorial y en aplicaciones físicas e ingenieriles. De esta forma, se busca calcular:

$$\int_{\mathcal{D}}\cdots\int f\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

En la mayoría de los casos las técnicas de integración son exactamente las mismas que en cálculo de una variable. Sin embargo, se agregan dificultades adicionales que deberemos resolver:

- La región $\mathcal{D}$ requiere establecer claramente los límites para cada una de las variables. De esta forma, se requiere llevar la integral múltiple a la forma de una **integral iterada**, que sí es posible calcular:

$$\int_{\mathcal{D}}\cdots\int f\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_a^b\int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)}\cdots\int_{\psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_2(x_1,\ldots,x_{n-1})}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\mathrm{d}x_1$$

- Muchas veces el cálculo de la integral en un orden de integración dado puede generar expresiones para las cuales determinar la primitiva resulta imposible. Por esta razón es oportuno lograr cambiar el orden de integración, y esto requiere profundo conocimiento del área de integración que se está tratando.

El campo de aplicaciones prácticas de las integrales múltiples puede ser limitado en aplicaciones. Sin embargo, sientan el desarrollo teórico para calcular integrales más complejas: integrales de línea e integrales de superficie. Son estas últimas las cuales nos permiten expresar los más importantes resultados del cálculo vectorial: el Teorema de Green, el Teorema de Stokes y el Teorema de la Divergencia.

Dedicaremos gran parte de los esfuerzos a estudiar integrales dobles y triples. Debido a su carácter poco práctico, estudiaremos solo con fines ilustrativos algunas integrales múltiples.

3.1. Integrales dobles

Comenzaremos con integrales dobles, en las cuales se deben integrar funciones en $\mathbb{R}^2$. Para ello, desarrollaremos en primer lugar la idea básica de integración secuencial en dominios de integración cuadrados para posteriormente extenderlos a dominios de integración de regiones más generales. Hecho esto trabajaremos el teorema de sustitución y un amplio conjunto de diversas aplicaciones para las integrales dobles.

3.1.1. Áreas rectangulares

La idea más básica para calcular integrales dobles consiste en hacerlo en regiones cuadradas. Una vez desarrollado el concepto de integral doble en su forma formal, se puede establecer el siguiente resultado para calcularlas en áreas rectangulares:

Teorema: Sea $f : Q \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función acotada e integrable en el rectángulo $Q = [a,b] \times [c,d]$. Supongamos que para cada $y \in [c,d]$ exista la función $g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Si $g(y)$ es interable en $[c,d]$, entonces

$$\iint_Q f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

En otras palabras, se integra de forma secuencial asumiendo la variable que no está siendo integrada como constante.

Problema 3.1 Calcule

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{R}} ye^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

con $Q = [1,2] \times [2,4]$.

Solución:

Por definición, la integral en cuestión se reduce a la siguiente integral iterada:

$$\mathcal{I} = \int_2^4 \int_1^2 ye^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Evaluando de forma secuencial:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_2^4 e^{xy}\Big|_1^2 \mathrm{d}y = \int_2^4 e^{2y} - e^y \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}e^{2y}\Big|_2^4 - e^y\Big|_2^4 \\
&= \frac{1}{2}e^8 - \frac{1}{2}e^4 - e^4 + e^2
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\mathcal{I} = \frac{1}{2}e^8 - \frac{3}{2}e^4 + e^2}$$

Revisemos ahora un importante desarrollo de esta sección, que es el Teorema de Fubini, el cual nos permite alternar el orden de integración en regiones cuadradas bajo ciertas hipótesis.

Teorema: (de Fubini) Si $f : Q \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ es continua y acotada, entonces es integrable y la integral doble de ella sobre Q se puede calcular como

$$\iint_Q f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

Además, si $f(x, y) = g(x)h(y)$, entonces

$$\iint_Q f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_c^d h(y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right). \tag{3.3}$$

Problema 3.2

(a) Sea $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Calcule:

$$\iint_Q \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}\mathrm{d}A.$$

(b) Sea $Q = [-1, 1] \times [0, 1]$ y sea:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y^3, & \text{si } y \geq x^2, \\ 0, & \text{si } y < x^2. \end{cases}$$

Calcule $\iint_Q f(x, y)\,\mathrm{d}A$.

Solución:

(a) Nuevamente, por definición la integral en cuestión se expresa como:

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Observe que el orden de integración es irrelevante ya que estamos integrando en el producto cartesiano del mismo intervalo ($[-1, 1]$) y para una función en que la participación de x e y es simétrica. Luego, como y es una constante desde la variable de integración x:

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \frac{y}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Es fácil reconocer de esta forma la primitiva:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{-1}^{1} \frac{y}{2} \log\left(1+x^2+y^2\right)\Big|_{-1}^{1} \mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{y}{2} \left[\log\left(2+y^2\right) - \log\left(2+y^2\right)\right] \mathrm{d}y \\ &= 0\end{aligned}$$

lo cual era un resultado esperable dada la simetría de la función. Finalmente,

$$\boxed{\mathcal{I} = 0}$$

(b) Se quiere calcular:

$$\iint_{Q} f\left(x,y\right) \mathrm{d}A$$

Observe que la función **no** es continua en $y = x^2$ ya que:

$$\lim_{y \to x^2} x^2 y^3 = x^8 \neq 0$$

Por esta misma razón no somos indiferentes ante un cambio del orden de integración, i.e. no se cumple necesariamente que:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} f\left(x,y\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Integrando de la primera forma, observe que la función no se anula solamente si $y \geq x^2$, con lo cual no tiene sentido integrar en todo el dominio, en particular solo para aquellos y mayores que x^2, con lo cual:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} f\left(x,y\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x^2 y^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} x^2 \frac{y^4}{4}\Big|_{x^2}^{1} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^2\left(1-x^8\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^2 - x^{10} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^{11}}{11}\Big|_{-1}^{1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right) \\ &= \frac{4}{33}\end{aligned}$$

Por otra parte, al integrar de la segunda forma solo tenemos que considerar los x tales que $x^2 \leq y$. Es decir, los x tales que $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$ (se resolvió la inecuación para y fijo). Con ello,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2y^3 \int_0^{\sqrt{y}} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2y^3 \frac{y^{3/2}}{3} \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 y^{9/2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{11}y^{11/2}\Big|_0^1\right) \\
&= \frac{4}{33}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, comprobamos que sí se cumple que las integrales alternadas entregan el mismo valor, 4/33. Luego, el Teorema de Fubini plantea que la continuidad de la función es una **condición suficiente**, pero no necesaria.

En conclusión,

$$\boxed{\iint_Q f(x,y)\,\mathrm{d}A = \frac{4}{33}}$$

Problema 3.3 Calcule

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x$$

sabiendo que $\displaystyle\int_a^b x^y \mathrm{d}y = \frac{x^b - x^a}{\log x}$.

Solución:

Aplicando la ayuda, tenemos que:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_a^b x^y \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Como la región es cuadrada y x^y es una función evidentemente continua para $x \in [0,1]$, entonces podemos aplicar el Teorema de Fubini y alternar las integrales, lo cual evidentemente simplifica

nuestros cálculos por tratarse de una función potencia. Es decir,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x &= \int_a^b \int_0^1 x^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_0^1 \mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1} \\ &= \left.\log|y+1|\right|_a^b\end{aligned}$$

con lo cual concluimos que:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x = \log\left|\frac{b+1}{a+1}\right|}$$

Problema 3.4 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule ambas integrales y compruebe que:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

¿Contradice en algo este resultado al Teorema de Fubini?

Solución:

Calculamos la primera integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Despreciamos el aporte de la discontinuidad en $(0,0)$ ya que representa un conjunto de medida cero. Calculando la integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \int_0^1 \frac{y^2\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\mathrm{d}x$$

Por una parte,

$$x^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{1}{2x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$$

y por otra[a],

$$\int_0^1 \frac{y^2\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{1}{2x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$$

Es decir,

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1\left[\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^2} - y^2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Observe que nos podemos ahorrar mucho trabajo, ya que como las variables son mudas podemos notar inmediatamente que:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_0^1\left[x^2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \int_0^1 \frac{y^2\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Es decir, se comprueba que:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \neq \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Observe que esto **no** contradice el Teorema de Fubini, ya que este último plantea que una condición suficiente para poder alternar el orden de integración en una integral iterada es que la función sea continua en todo el compacto que se está integrando.

En este caso, la función no es continua en $(0,0)$ (ya que, de hecho, no se puede redefinir de forma continua allí ya que el límite de la función en cuestión no existe), y por lo tanto no se cumplen las hipótesis del teorema. Esto no quiere decir que para toda función que no sea continua no se satisfará el teorema[b], sino que el teorema no puede garantizar esta condición. Esto no contradice en absoluto lo planteado por Fubini.

[a] Estas integrales se resuelven de forma rápida mediante la sustitución $y = x\tan(t)$, lo cual es un problema de cálculo de una variable que se deja propuesto al lector.

[b] De hecho, comprobamos en un ejercicio anterior que esto no era así, efectivamente.

Finalizamos con un problema propuesto en que se realiza una extensión de las regiones cuadradas a todo $\mathbb{R}^2$ y con ello se pueden demostrar algunos resultados interesantes.

Propuesto Se define la *convolución* de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ como:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{3.4}$$

Demuestre que para dos funciones cuya convolución existe para todo x se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) * g(x)\, \mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{d}x\right)$$

3.1.2. Regiones generales

Se puede ampliar el concepto de integral doble a regiones más generales, no necesariamente encerradas sobre rectángulos. Se clasifican en tres tipos:

- Región de tipo I: Sean $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ dos funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y a y b constantes reales tales que $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)\ \forall x \in [a,b]$. Una región de tipo I es de la forma

  $$\mathcal{R}_I = \{(x,y)\ :\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

  Su integración se realiza de una única forma:

  $$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right) dx$$

- Región de tipo II: Sean $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ dos funciones continuas y c y d constantes reales tales que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)\ \forall y \in [c,d]$. Una región de tipo II es de la forma

  $$\mathcal{R}_{II} = \{(x,y)\ :\ c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

  Su integración se realiza como:

  $$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right) dy$$

- Región de tipo III: Son aquellas regiones que se pueden descomponer mediante un número finito de cortes en regiones de tipo I y II. Por lo tanto, la integración requiere un análisis del problema.

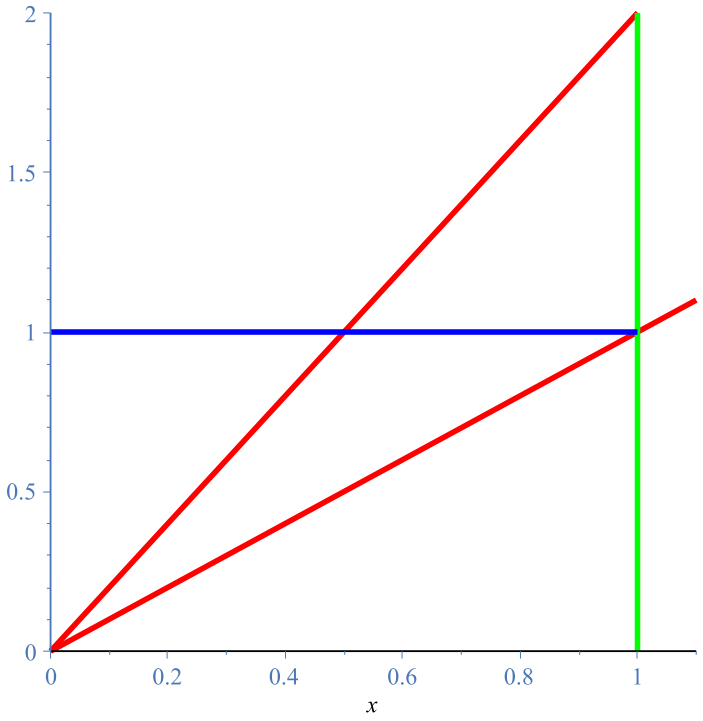
Problema 3.6

(a) Dibuje la región de integración de $\int_0^1 \int_x^{2x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

(b) Cambie el orden de integración para expresar la integral anterior en términos de una o más integrales en términos del orden de integración $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. No calcule.

Solución:

(a) La región queda correctamente dibujada con el siguiente gráfico:



(b) Integrando en y, observe que desde el eje x hasta la línea azul la coordenada x está acotada por las líneas rojas (las inversas de $f(x)$: $y/2$ e y). En cambio, después de la línea roja el extremo izquierdo es una curva roja, y el extremo derecho la horizontal $x = 1$. Con esto ya es notorio que requerimos separar la integral en dos partes al cambiar el orden de integración.

De esta forma, siguiendo el gráfico el cambio de integral se da en $y = 1$, con lo cual la misma integral se escribe como:

$$I = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Problema 3.7

(a) Evalúe la integral $\int_1^2 \int_x^{x^2} 12x \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

(b) Dibuje la región de integración y exprese la integral en el orden $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Integre nuevamente y coteje su resultado.

Solución:

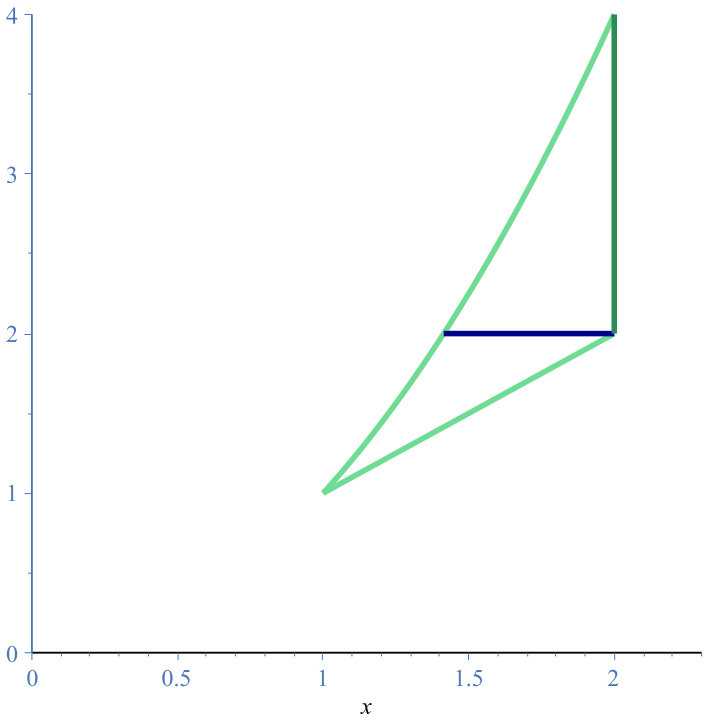
(a) Se puede realizar por integración directa:

$$\int_1^2 \int_x^{x^2} 12x \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^2 12x \left(x^2 - x\right) \mathrm{d}x$$

Integrando directamente una función polinomial,

$$\int_1^2 \int_x^{x^2} 12x \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 17$$

(b) Siempre es recomendable para este tipo de problemas dibujar la región de integración. Dibujándola:



Observe que integrando en y en primer lugar, los extremos de integración en x dependerán de si estamos antes de la línea azul o después. Si estamos antes la línea azul, los extremos en x

vienen dados por la inversa de x^2, $\sqrt{y}$, y la inversa de x, y. Si estamos después de la línea azul, los extremos cambian a $\sqrt{y}$ hasta la línea vertical $x = 2$.

Esta línea azul, $x = 2$, producirá que al integrar en y la integral se separe en dos: una desde $y = 1$ hasta $y = 2$, tal como puede apreciarse en la figura, y otra desde $y = 2$ hasta $y = 4$. De esta forma,

$$\int_1^2 \int_x^{x^2} 12x \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^{y} 12x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} 12x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Esta separación de integrales es el concepto más importante a rescatar de este ejercicio, pues debemos notar que se está integrando efectivamente en toda el área. El cálculo de las integrales sigue siendo igualmente directo, y es fácil notar que:

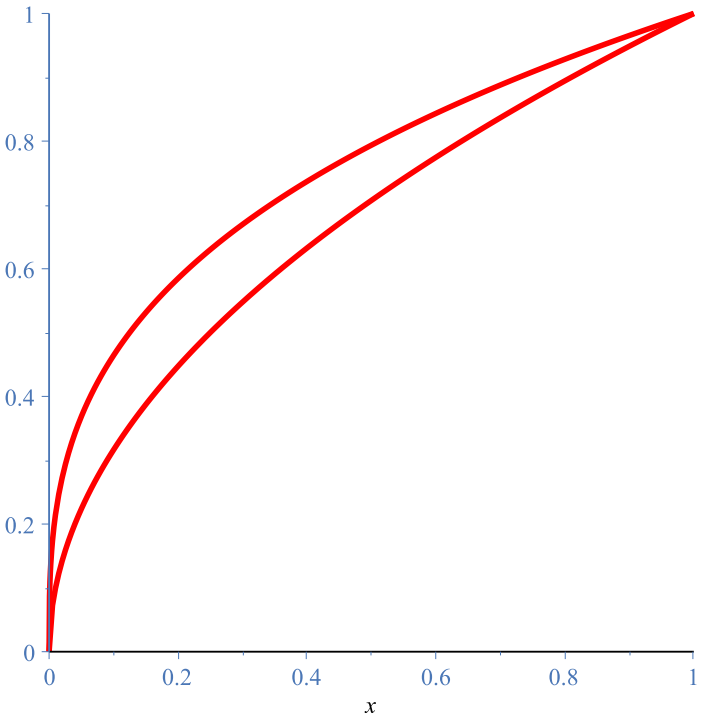
$$\int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^{y} 12x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} 12x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 17$$

comprobando así que en efecto son iguales.

Problema 3.8 Calcule la integral doble $\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} \mathrm{d}A$ donde $\mathcal{R}$ es la región en $\mathbb{R}^2$ encerrada por las gráficas $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt[3]{x}$.

Solución:

Es evidente que las cotas para integrar en el orden de y ya están impuestas. Sin embargo, no tenemos claro cómo integrar en x. Como esto no está explicitado, buscamos intersecciones entre ambas curvas, lo cual es muy sencillo de notar al graficarlas:



Observe que las intersecciones evidentes son $x = 0$ y $x = 1$ (también resulta fácil de determinar de forma analítica). Luego, la forma más sencilla de expresar como integral iterada es evidentemente la siguiente:

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} e^{x/y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Sin embargo, se hace evidente que este problema no es sencillo de resolver de esta forma ya que no podemos determinar una primitiva para $\exp(1/y)$. Es necesario invertir el orden de integración, y esto también resulta sencillo de hacer a partir de la gráfica. Si:

$$\sqrt[3]{x} \leq y \leq \sqrt{x} \quad \text{con } x \in [0, 1]$$

Entonces,

$$y^3 \leq x \quad \text{y} \quad x \leq y^2$$

Por lo tanto, la integral también se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} \mathrm{d}A &= \int_0^1 \int_{y^3}^{y^2} e^{x/y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y \left(e^{y^2/y} - e^{y^3/y} \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 ye^y - ye^{y^2} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 ye^y \mathrm{d}y - \int_0^1 ye^{y^2} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Para la primera integral se aplica integración por partes ($u = y$, $dv = e^y$) y para la segunda la sustitución $u = y^2$, obteniendo así que:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} dA = \frac{1}{2}(e+1)}$$

Problema 3.9 Cambie el orden de integración y calcule cuando sea posible:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2xy}{1-y^4} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{z^2}^{z} ze^{-y^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

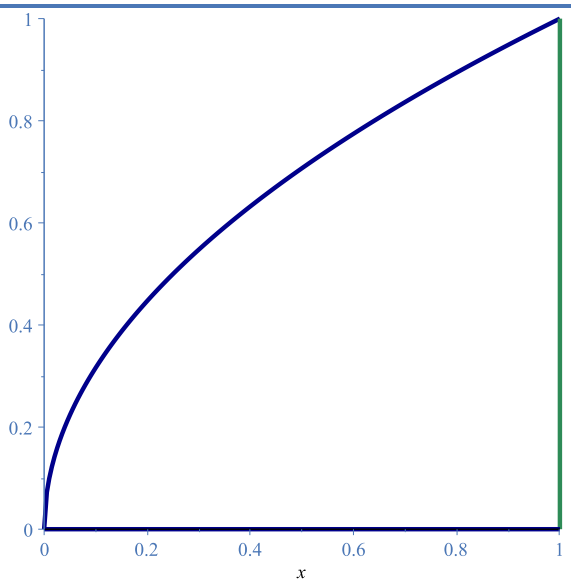
(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen}(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

Solución:

En todos estos problemas la mejor práctica es dibujar adecuadamente la región para comprobar los resultados. En muchos casos una sola integral puede separarse en dos, y esto no es del todo notorio si no se grafica.

(a) Observe que ahora integraremos primero en x, por lo cual debemos notar de dónde a dónde puede moverse esta coordenada. Se grafica la región como sigue a continuación:



Observamos que se puede mover entre la curva azul $x = y^2$) y la curva verde ($x = 1$). Después, la coordenada y puede moverse desde 0 a 1.

Con esto en mente, podemos escribir la integral:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2xy}{1-y^4} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{y^2}^1 \frac{2xy}{1-y^4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

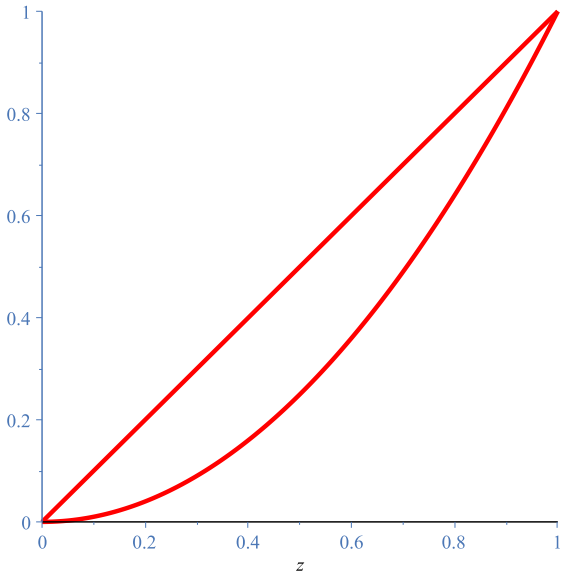
Observe que esta integral sí es posible evaluarla:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{y^2}^1 \frac{2xy}{1-y^4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{y}{1-y^4} \left(\int_{y^2}^1 2x \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{y}{1-y^4} x^2 \Big|_{y^2}^1 \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{y}{1-y^4} \left(1-y^4\right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Observe que gracias a la simplificación, la integral es tremendamente sencilla de evaluar:

$$\boxed{\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2xy}{1-y^4} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}}$$

(b) Graficamos la región:



En este caso el gráfico no requiere grandes consideraciones al invertir el orden de integración. Ahora tenemos que integrar en z primero, y notamos que z puede moverse entre y y $\sqrt{y}$ (la inversa de $y = z^2$). La coordenada y puede moverse entre 0 y 1 por simple inspección del gráfico.

De esta forma,

$$\int_0^1 \int_{z^2}^{z} ze^{-y^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} ze^{-y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

Evaluando esta integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} ze^{-y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y &= \int_0^1 e^{-y^2} \left(\int_{y}^{\sqrt{y}} z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y^2} \left(y - y^2 \right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Separando,

$$\int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} ze^{-y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y = \frac{1}{4} \int_0^1 2ye^{-y^2} \mathrm{d}y - \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

Para la primera integral simplemente hacemos $u = y^2$ y se obtiene el resultado deseado. Para la segunda integral, tal como probamos en cálculo de una variable, esta se puede calcular recursivamente haciendo:

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2}y & \to \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = -2ye^{-y^2}\mathrm{d}y & \to v = e^{-y^2}\mathrm{d}y \end{cases}$$

De esta forma,

$$\int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} ze^{-y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-u} \mathrm{d}u - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} ye^{-y^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y^2} \mathrm{d}y \right)$$

Finalmente,

$$I = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-1}\right) + \frac{1}{4}e^{-1} - \frac{1}{4}\int_0^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

Es decir,

$$I = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

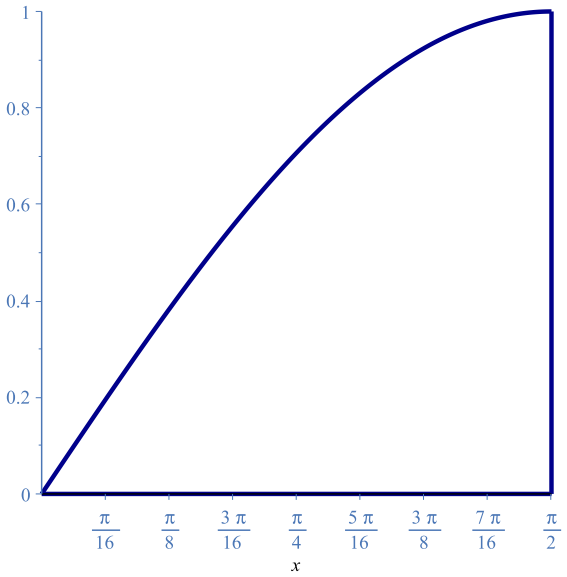
Se define la función error como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

la cual, como varias funciones, se computa numéricamente. De esta forma, concluimos que:

$$\boxed{I = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{\pi}}{8}\operatorname{erf}(1)}$$

(c) Partimos graficando la región: x se mueve entre $x = \pi/2$ y $x = \operatorname{arcsen}(y) \to y = \operatorname{sen}(x)$. Luego, se tiene que el gráfico viene dado por:



Ahora tenemos que integrar en y en primer lugar. ¿Cómo se mueve la coordenada y? Puede moverse entre 0 y $\operatorname{sen}(x)$. Análogamente, x puede moverse entre 0 y $\pi/2$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen}(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\left(\int_0^{\operatorname{sen}x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Para calcular esta última integral hacemos, por ejemplo:

$$u = \cos^2(x) \to \mathrm{d}u = -2\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x$$

Es decir,

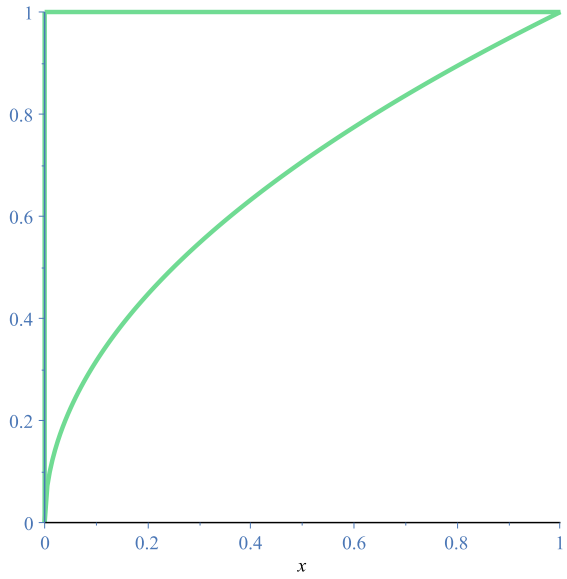
$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u}\mathrm{d}u$$

Finalmente,

$$\int_0^1 \int_{\mathrm{arcsen}(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+u)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$\to \boxed{\int_0^1 \int_{\mathrm{arcsen}(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1\right)}$$

(d) Graficamos la región:



De esta forma, al integrar primero en x, notamos que x puede moverse entre la recta $x = 0$ hasta la curva $\sqrt{x} = y \to x = y^2$. De esta forma,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

La integración resulta ahora mucho más sencilla, pues podemos hacer $u = x^2$. De esta forma,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{y^2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{y^4}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+y^2}}\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\sqrt{u+y^2}\Big|_0^{y^4}\mathrm{d}y = \int_0^1\sqrt{y^4+y^2}-|y|\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Reordenando, como el intervalo de integración es positivo, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 y\sqrt{y^2+1}-y\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{u+1}\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Simplificando, concluimos finalmente que:

$$\boxed{\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{6}}$$

Problema 3.10 Calcule la integral de la función $f(x,y) = (\operatorname{sen} x)/x$ sobre el triángulo $\triangle$ en el plano xy delimitado por el eje x y las rectas $y = x$, $x = 1$.

Solución:

El triángulo de la región de integración no debiese ser complicado reconocerlo. Observe que no es conveniente integrar primero en x, pues desconocemos la primitiva de $(\operatorname{sen} x)/x$ (y de hecho, no es posible calcularla. Integrando primero en y:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\int_0^x\frac{\operatorname{sen} x}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{I = 1-\cos(1)}$$

Propuesto Juguemos un poco con regiones generales:

(a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Considere $f : (a,b) \times (a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que:

$$I = \int_a^b \int_a^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \int_y^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(b) Deduzca que si $f(x,y) = f(y,x)$ en el rectángulo $B = [a,b] \times [a,b]$ entonces:

$$I = \frac{1}{2}\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(c) Pruebe que si $a > 0$, entonces:

$$\int_0^a \int_x^a \frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.1.3. Cambios de variables en integrales dobles

Ahora utilizaremos el Teorema de Sustitución, el cual se puede demostrar ya sea mediante argumentos formales o bien geométricos. Este plantea lo siguiente:

Teorema: Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua de variables x, y definida en la región Ω y sea $(x,y) = \mathbf{F}(u,v)$ una función inyectiva en Ω. Si $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

para todo (u,v) en la región $\Omega' = \mathbf{F}(\Omega)$ o bien lo es solo para un número finito de puntos, entonces:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega'} f[x(u,v), y(u,v)] \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.5}$$

Al respecto podemos hacer algunos comentarios:

- Haciendo el abuso de notación habitual, notamos entonces que:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad \text{, o bien} \quad \mathrm{d}A = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}A'$$

- El lector puede preguntarse: ¿por qué el módulo? La respuesta sería directa dados los argumentos geométricos de la demostración. Sin embargo, siendo aún más suspicaces, este teorema en particular debiese cumplirse para $y = f(x)$, lo cual implicaría que:

$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y^{-1}(a)}^{y^{-1}(b)} f(y(x))\,|y'(x)|\,\mathrm{d}x$$

que diverge en el valor absoluto respecto a la fórmula ya estudiada. Sin embargo, notamos que si y es decreciente en todo el intervalo, entonces $y^{-1}(b) < y^{-1}(a)$. Se pueden alterar los extremos de integración anteponiendo un signo $-$, el cual hará que la integral completa conserve el signo. He aquí la explicación del módulo, que incluso es válida en problemas de cálculo de una variable.

- Un error muy común, asociado con la notación, es olvidar este módulo en la integral doble. Es muy importante no hacerlo, ya que puede conducir a resultados completamente erróneos.

Problema 3.12 Utilice la sustitución $u = x^2/y$, $v = xy$ para encontrar el área de la región Ω en el plano xy dada por:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2/y \leq 2\,,\, 0 \leq xy \leq 1\right\}$$

Solución:

Partimos notando que intentar resolver la integral en $x - y$ puede ser bastante complicado, más aún considerando el hecho de que la región es complicada de graficar, y por lo tanto de deducir los extremos.

Sin embargo, utilizando el teorema de sustitución se tendrá que:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Dada la transformación, tenemos que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{2x^2}{y} + \frac{x^2}{y} = \frac{3x^2}{y}$$

Es decir,

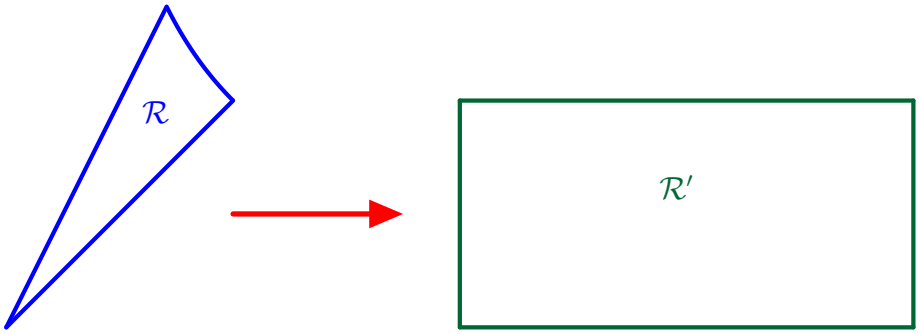
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{y}{3x^2}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3\,|u|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Al preguntarnos cuáles deben ser los extremos de integración se hace evidente la ventaja de haber realizado esta sustitución. Si

$$1 \leq \frac{x^2}{y} \leq 2 \rightarrow 1 \leq u \leq 2$$

$$0 \leq xy \leq 1 \rightarrow 0 \leq v \leq 1$$

Mediante esta sustitución convertimos una región no lineal en una cuadrada, por lo cual la integración es en extremo sencilla. En la práctica, realizamos una conversión de regiones del tipo:



En efecto,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \mathrm{d}A &= \int_1^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}u}{3u} = \frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{d}v \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \frac{1}{3}\ln(2) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\iint_{\Omega} \mathrm{d}A = \frac{\ln(2)}{3}}$$

Un tipo común de sustituciones en este tipo de problemas son las de tipo polar en $\mathbb{R}^2$ y cilíndrica y esférica en $\mathbb{R}^3$ (como veremos más adelante). La sustitución consiste en realizar:

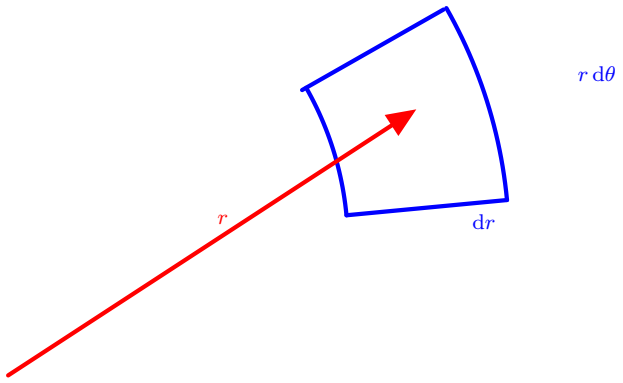
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

pues habitualmente $r > 0$ para describir el sistema polar. Se recomienda memorizar esta sustitución por su uso recurrente. En efecto, se puede notar este resultado incluso de forma geométrica:



El diferencial de área es la multiplicación del alto, aproximadamente $\mathrm{d}r$, por el ancho: el perímetro de esta sección de circunferencia, $\approx r\Delta\theta \to r\mathrm{d}\theta$. Es decir,

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Problema 3.13 Utilizando coordenadas polares, calcule:

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

siendo $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

Solución:

Utilizando lo anterior tendremos que la nueva región viene dada por:

$$1 < x^2 + y^2 < 2 \to 1 < r^2 < 2 \to 1 < r < \sqrt{2}$$

y $\theta \in [0, 2\pi]$ para cubrir completamente el anillo. De esta forma,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{r^4} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} r\underbrace{\left[\cos\theta\cdot\mathrm{sen}\,\theta\right]^2}_{\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right)^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

dado que la función es separable, tendremos que:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{4}\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\mathrm{d}\theta\right)\frac{1}{2}\\ &= \frac{2\pi}{16}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8}}$$

Problema 3.14 Una aplicación del plano xy en el plano uv se define por

$$u = \frac{x}{1-x-y} \quad ; \quad v = \frac{y}{1-x-y}$$

(a) Encuentre la matriz $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

(b) Encuentre la transformación inversa y la matriz $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

(c) Encuentre la región $\mathcal{R}$ del plano xy que corresponde al cuadrado Q en el plano uv definido por las líneas $u = -1/2$, $u = -1$, $v = -1$, $v = -3/2$.

(d) Calcule el área de $\mathcal{R}$.

Solución:

(a) Derivando,

$$u_x = \frac{1-y}{(1-x-y)^2} \quad ; \quad u_y = \frac{x}{(1-x-y)^2}$$

$$v_x = \frac{y}{(1-x-y)^2} \quad ; \quad v_y = \frac{1-x}{(1-x-y)^2}$$

Si bien esta no es la notación que hemos convenido para la matriz jacobiana, cumplamos con lo que se pide utilizándola:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{(1-x-y)^2}\begin{bmatrix} 1-y & x \\ y & 1-x \end{bmatrix}$$

(b) Despejando las inversas:

$$u\left(1-x-y\right)=x\rightarrow u=\left(u+1\right)x+uy$$

$$v\left(1-x-y\right)=y\rightarrow v=vx+\left(v+1\right)y$$

con $\left(1-x-y\right)\neq 0$ para que exista la inversa. Luego, invirtiendo la matriz asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\left(u+1\right)\left(v+1\right)-uv}\begin{bmatrix}\left(v+1\right) & -u\\ -v & \left(u+1\right)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$x=\frac{u}{v+u+1}\quad ;\quad y=\frac{v}{v+u+1}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\left[\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}\right]^{-1}\rightarrow\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\frac{\left(1-x-y\right)^{2}}{\left(1-y\right)\left(1-x\right)-xy}\begin{bmatrix}1-x & -x\\ -y & 1-y\end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\left(1-x-y\right)\begin{bmatrix}1-x & -x\\ -y & 1-y\end{bmatrix}$$

Escribiendo en términos de u y v:

$$\boxed{\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\frac{1}{\left(u+v+1\right)^{2}}\begin{bmatrix}v+1 & -u\\ -v & u+1\end{bmatrix}}$$

(c) Dada la región cuadrada, tenemos que:

$$-1\leq u\leq -1/2$$

$$-3/2\leq v\leq -1$$

Reemplazando con los valores de u y v para llevar las desigualdades a expresiones en términos de u y v:

$$-1\leq\frac{x}{1-x-y}\leq-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}\leq\frac{y}{1-x-y}\leq-1$$

Si bien podemos resolver estas inecuaciones de la forma convencional aprendida en los cursos de precálculo, podemos hacerlo de forma inteligente, separando por tramos.

Suponiendo que $1-x-y>0\rightarrow x+y<1$, tenemos que:

$$-1\left(1-x-y\right)\leq x\leq-\frac{1}{2}\left(1-x-y\right)$$

$$\rightarrow x+y-1\leq x\leq\frac{1}{2}\left(x+y-1\right)$$

$$\rightarrow y-1\leq 0\leq\frac{1}{2}\left(y-x-1\right)$$

A partir de la segunda inecuación:

$$-\frac{3}{2}(1-x-y) \leq y \leq -1(1-x-y)$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}(x+y-1) \leq y \leq (x+y-1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(3x+y-3) \leq 0 \leq x-1$$

Entonces, deben cumplirse las siguientes condiciones en este caso:

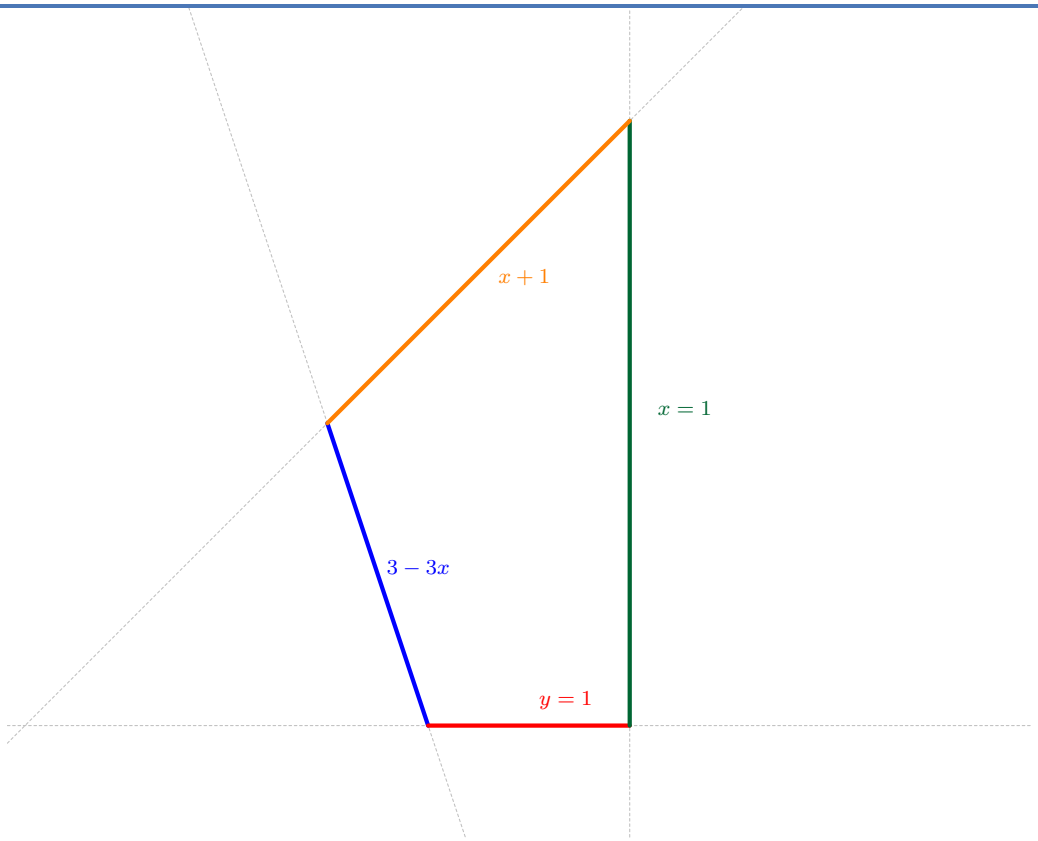
- $x+y<1 \rightarrow y<1-x$.
- $y \leq 1$.
- $y \geq x+1$.
- $x \geq 1$.
- $y-3+3x \leq 0 \rightarrow y \leq 3-3x$.

Esta región corresponde al conjunto vacío, puesto que si $x \geq 1$, entonces entonces es imposible cumplir con que $y<1-x$ y que $y \geq x+1$ simultáneamente.

Supongamos ahora que $1-x-y<0 \rightarrow x+y>1 \rightarrow y>1-x$. Luego, las mismas inecuaciones generan las mismas desigualdades, solo que con el sentido invertido.

- $y>1-x \rightarrow$ redundante pues $y \geq 1$.
- $y \geq 1$.
- $y \leq x+1$
- $x \leq 1$
- $y \geq 3-3x$.

Estas regiones sí son compatibles y generan la siguiente región en el espacio tras haberlas graficado adecuadamente:



(d) Integramos directamente en xy observando la región y sus extremos:

$$A(\mathcal{R}) = \int_{1/2}^{2/3} \int_{3-3x}^{x+1} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{2/3}^{1} \int_{1}^{x+1} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Dado que estas integrales son polinomiales, muy fáciles de calcular, se deja el desarrollo propuesto al lector. Concluimos que:

$$A(\mathcal{R}) = \frac{1}{3}$$

Observación: El área de esta región no tiene por qué ser la misma a pesar de que los extremos de integración son los mismos. En efecto, de acuerdo al teorema de sustitución,

$$\text{área en } xy \leftarrow \iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\left[-\frac{1}{2},-1\right]\times\left[-\frac{3}{2},-1\right]} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

esta última integral es claramente distinta en general al área en uv. Es decir, en general:

$$\iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \iint_{\left[-\frac{1}{2},-1\right]\times\left[-\frac{3}{2},-1\right]} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Problema 3.15 Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, $\varphi : (u, v) \longrightarrow (x, y)$, definida por:

$$x = \left(\frac{u+v}{2}\right)^{1/2} \quad ; \quad y = \left(\frac{v-u}{2}\right)^{1/2}$$

encontrar la imagen $\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{R})$ por esta aplicación (en el plano xy) del rectángulo R en el plano uv limitado por $u = 1$, $u = 4$, $v = 9$, $v = 16$ y calcular

$$\iint_{\mathcal{D}} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Solución:

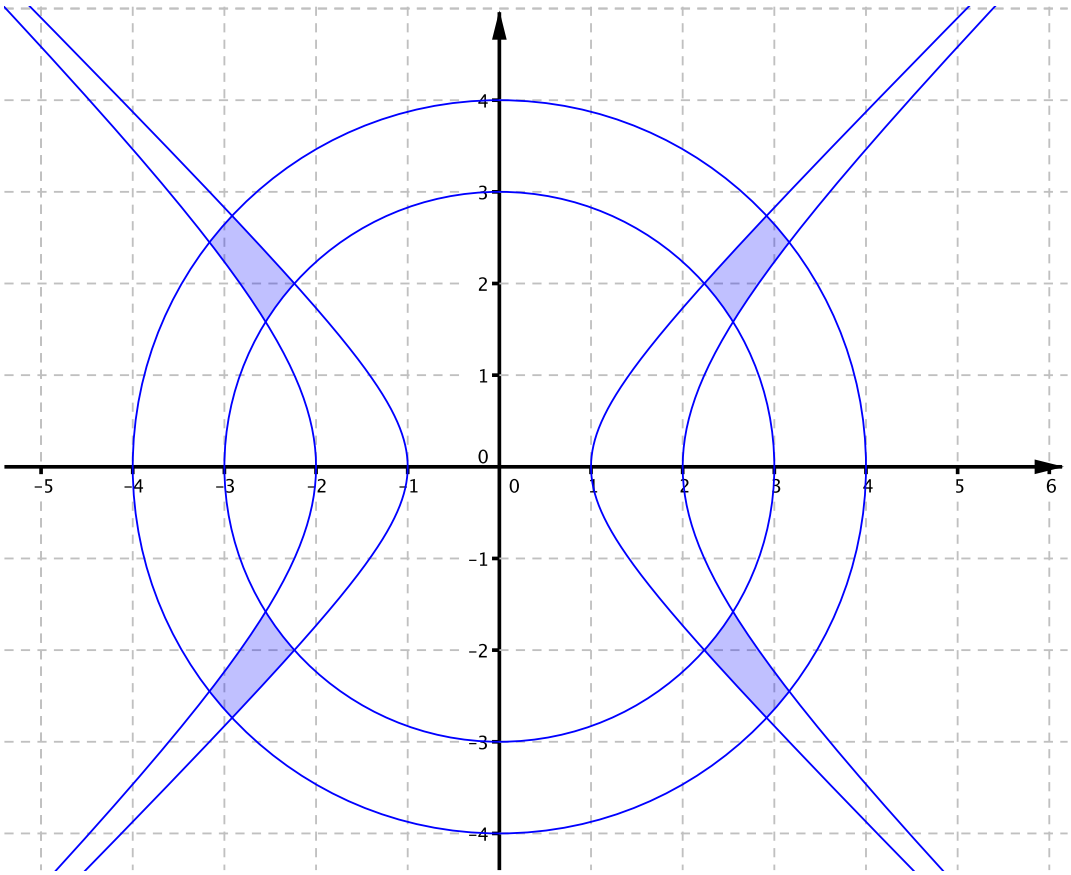
Despejando, se obtiene que:

$$\begin{aligned} v &= x^2 + y^2 \\ y &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4 \quad , \quad 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\right\}$$

Notando que las primeras relaciones son hipérbolas, podemos graficar la región $\mathcal{D}$ en el plano xy (achurada en azul):



Es claro que integrar la región en el plano xy es complicado, razón por la cual lo realizaremos en el plano u, v. La matriz jacobiana de la transformación es:

$$\mathrm{D}\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{-1/2} & \frac{1}{4}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{-1/2} \\ -\frac{1}{4}\left(\frac{v-u}{2}\right)^{-1/2} & \frac{1}{4}\left(\frac{v-u}{2}\right)^{-1/2} \end{bmatrix}$$

El Jacobiano es:

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)} = \frac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}}$$

Como el jacobiano es estrictamente positivo en $\mathcal{R}$, luego φ es una biyección y su inversa también es $\mathcal{C}^1$.

Haciendo el cambio de variables, concluimos que:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{D}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \int_9^{16} \frac{\sqrt{v^2-u^2}}{8\sqrt{v^2-u^2}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int_1^4 \int_9^{16} \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{21}{8}}$$

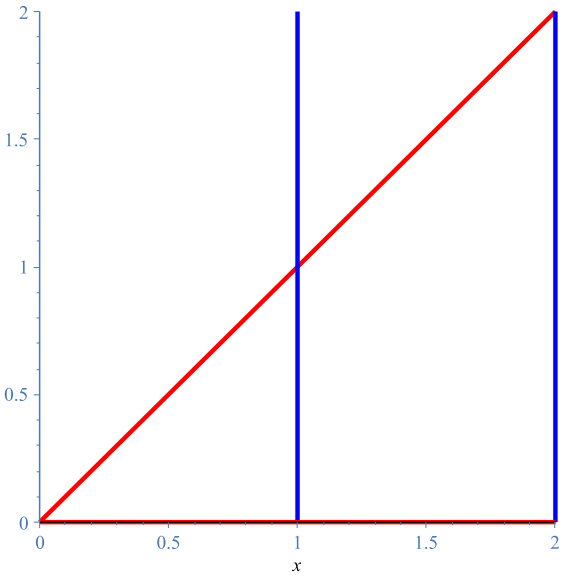
Problema 3.16 Utilice coordenadas polares para calcular

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}A,$$

siendo $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq x\}$.

Solución:

Observe que ahora la situación se complica no por la sustitución, pero sí por la región. Graficándola:



Es intuitivo del gráfico que esta región en coordenadas polares produce que $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (la línea $y = x$ se representa por $\theta = \pi/4$). Sin embargo, ¿qué hacemos con r? La respuesta a esta pregunta viene de la desigualdad

$$1 \leq r\cos\theta \leq 2$$

Dado que $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, el coseno no se anulará ni será negativo, razón por la cual deberá cumplirse que:

$$\frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta}$$

¿Es esto de extrañar? No del todo, la única diferencia con el problema anterior radica en que ahora no tenemos una región de integración cuadrada en coordenadas polares. Luego, como

$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ tendremos que:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/4}\int_{1/\cos\theta}^{2/\cos\theta} \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r\cos\theta} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\int_{1/\cos\theta}^{2/\cos\theta} r^2\tan\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{7}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{\tan\theta}{\cos^3\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

¿Cómo calculamos la integral en θ? Notamos que:

$$\frac{\tan\theta}{\cos^3\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}u}{u^4} \quad \text{con } u = \cos\theta$$

Finalmente,

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}A = \frac{7}{3}\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{u^4}$$

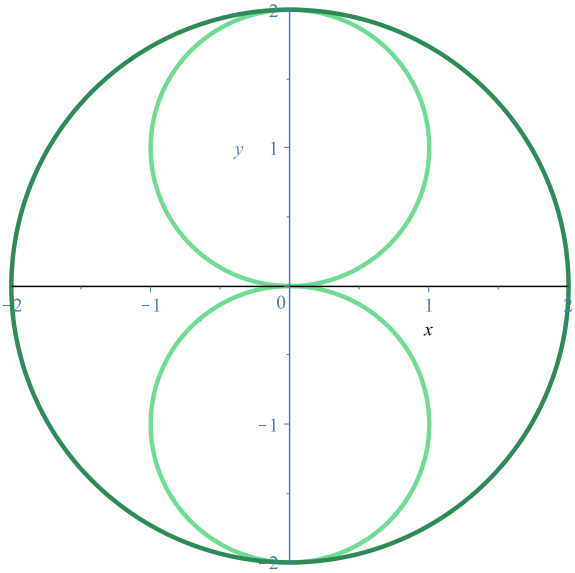
$$\rightarrow \boxed{\iint_{\mathcal{R}} \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}A = \frac{7}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$$

Problema 3.17 Sea $f(x,y) = x^2|y|$ y $\mathcal{R}$ la región del plano interior al círculo $x^2+y^2=4$ y exterior a los círculos $x^2+(y-1)^2$, $x^2+(y+1)^2=1$. Calcule:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Solución:

Partamos graficando la región para comprender adecuadamente lo que estamos haciendo:



Digamos que $\mathcal{C}_1$ corresponde al a región que encierra la primera circunferencia mencionada, $\mathcal{C}_2$ la segunda y $\mathcal{C}_3$ la tercera. Entonces, por superposición de las integrales, y haciendo abuso de notación, deberá cumplirse que:

$$\iint_{\mathcal{R}} = \iint_{\mathcal{C}_1} - \iint_{\mathcal{C}_2} - \iint_{\mathcal{C}_3}$$

Se puede observar que calcular las integrales por separado resulta mucho más sencillo que tratar de resolver la integral como un todo. Partamos por $\mathcal{C}_1$. En este caso, dada la simetría, es evidente que se requiere la sutitución polar habitual. De esta forma,

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \to 0 \leq r^2 \leq 4 \xrightarrow{r \geq 0} 0 \leq r \leq 2$$

Adicionalmente, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, con lo cual

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta\,|r \operatorname{sen}\theta|\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

como $r > 0 \to |r| = r$, entonces:

$$\cdots = \int_0^2 r^4 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,|\operatorname{sen}\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

Toda la dificultad de esta integral radica en calcular la segunda integral. Como $\operatorname{sen}\theta \leq 0$ para

$\theta \in [\pi, 2\pi]$ en este intervalo de integración, entonces tendremos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,|\operatorname{sen}\theta|\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\theta - \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\theta}_{\text{coseno es creciente}} \leftarrow u = \cos\theta \\ &= \int_0^1 u^2\mathrm{d}u + \int_0^1 u^2\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Calculando la integral en r concluimos que:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{C}_1} f\,(x,y)\,\mathrm{d}A = \frac{2^5}{15}} \rightarrow (1)$$

Calculemos ahora la integral de $\mathcal{C}_2$. Para ello notamos que la región polar ahora no es tan fácil de deducir. Una opción válida es parametrizar la circunferencia en polares desde el origen, pero esto no es del todo práctico si pensamos en cómo se podía escribir esta curva en paramétricas: aprovechándonos de la simetría hacemos:

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta \\ y-1 &= r\operatorname{sen}\theta \rightarrow y = r\operatorname{sen}\theta + 1\end{aligned}$$

Calculando este jacobiano nuevamente tendremos que $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ ya que el $+1$ desaparece en la derivación. De esta forma, y considerando que $r \in [0,1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces se tendrá que:

$$\iint_{\mathcal{C}_2} x^2\,|y|\,\mathrm{d}A = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta\,|r\operatorname{sen}\theta + 1|\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Observe que como $r \in [0,1]$ entonces $-1 \leq r\operatorname{sen}\theta \leq 1 \rightarrow 0 \leq r\operatorname{sen}\theta + 1 \leq 2$. Es decir,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{C}_2} x^2\,|y|\,\mathrm{d}A &= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\,(r\operatorname{sen}\theta + 1)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 r^4\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Este truco es habitual: observe que:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\operatorname{sen}2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Tal como demostramos el Cálculo I, esta última integral es cero pues corresponde a la integración de funciones trigonométricas de distinta frecuencia. Se puede verificar esto de forma muy sencilla mediante prostaféresis. Para la segunda integral, hacemos:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Notando que entre 0 y 2π la función $\cos 2\theta$ (grafique la función en el intervalo y vea como las áreas se cancelan), tendremos entonces que:

$$\iint_{\mathcal{C}_2} x^2 \, |y| \, \mathrm{d}A = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{\iint_{\mathcal{C}_2} x^2 \, |y| \, \mathrm{d}A = \frac{\pi}{4}} \to (2)$$

Finalmente tenemos que calcular la integral en $\mathcal{C}_3$. Para ello hacemos ahora

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y+1 &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

bajo el mismo jacobiano y extremos de integración que la integral anterior. Luego,

$$\iint_{\mathcal{C}_3} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta\,|r\operatorname{sen}\theta - 1|\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Bajo el mismo argumento anterior tendremos ahora que $|r\operatorname{sen}\theta - 1| = 1 - r\operatorname{sen}\theta$, con lo cual

$$\cdots = \int_0^1 r^3\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_0^1 r^4\mathrm{d}r \cancel{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta}$$

$$\boxed{\iint_{\mathcal{C}_3} x^2 \, |y| \, \mathrm{d}A = \frac{\pi}{4}} \to (3)$$

Finalmente, combinando (1), (2) y (3) concluimos que:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2^5}{15} - \frac{\pi}{2}}$$

Problema 3.18 Usando el cambio de variables $x = u + v$, $y = -2u + v$ calcule

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

siendo $\mathcal{R}$ la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 5x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 1\}$.

Solución:

Siguiendo las indicaciones, partimos reescribiendo el jacobiano. Tendremos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= 3\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned}$$

De la misma forma, haciendo el trabajo algebraico con la sutitución, se tendrá que:

$$5x^2 + 2xy + 2y^2 = 9\left(u^2 + v^2\right)$$

Como la región se caracteriza por

$$5x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 1$$

entonces se sigue que $u^2 + v^2 \leq \dfrac{1}{9}$. Notar que mediante esta sutitución hemos convertido una región elíptica rotada en una circunferencia de radio $1/3$. Luego, tendremos que:

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_{\mathcal{R}'} 3\sqrt{u^2 + v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Haciendo la sustitución polar evidente dada la aparición de $u^2 + v^2$, se sigue que:

$$\cdots = 9\int_0^{1/3}\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 18\pi\int_0^{1/3} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

con lo cual,

$$\boxed{\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\pi}{9}}$$

Es interesante la tipología de problemas en los cuales no se entrega la sustitución y es necesario identificar esta. Veamos algunos ejemplos, partiendo con unos básico:

Problema 3.19 Realizando una sustitución pertinente, calcule:

$$\int_0^3\int_{x-2}^{x+1} (x+y)\,e^{y-x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Solución:

Observe que calcular esta integral de forma iterativa puede resultar en extremo tedioso. Sin embargo, observando la forma en que aparecen los términos de la función, puede resultar interesante

realizar la sustitución

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= y-x \end{aligned}$$

que simplifica los términos y puede dejar una integral mucho más directa de trabajar, ue^v. Bajo esta sustitución tendremos que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$$

Luego, se sigue que:

$$x = \frac{u-v}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{u+v}{2}$$

Es decir, la región de integración es tal que:

$$x-2 \leq y \leq x+1 \rightarrow \frac{u-v-4}{2} \leq \frac{u+v}{2} \leq \frac{u-v+2}{2}$$

$$\text{reordenando términos} \rightarrow -2 \leq v \leq 1$$

Adicionalmente,

$$0 \leq x \leq 3 \rightarrow 0 \leq u-v \leq 6 \rightarrow v \leq u \leq 6+v$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{x-2}^{x+1} (x+y)\, e^{y-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{1} \int_{v}^{v+6} ue^v \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{4} \int_{-2}^{1} \left[(v+6)^2 - v^2\right] e^v \mathrm{d}v \end{aligned}$$

La integración en este caso se hace casi directa por partes, con lo cual:

$$\boxed{\int_0^3 \int_{x-2}^{x+1} (x+y)\, e^{y-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 9e}$$

Problema 3.20 Evalúe la integral

$$\iint\limits_{4x^2-8x+y^2 \leq 0} \sqrt{4x^2-8x+y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Solución:

Partamos identificando la región de integración inicial. ¿A qué lugar geométrico corresponde?

Completando cuadrados como se acostumbra en problemas de secciones cónicas:

$$4x^2 - 8x + y^2 = 4\left(x-1\right)^2 + y^2 - 4 \to 4\left(x-1\right)^2 + y^2 \leq 4$$

Es decir, se trata de una elipse desplazada en una unidad hacia la derecha. Aprovechándonos de la simetría del problema podemos hacer de inmediato la sustitución

$$\begin{aligned} 2\left(x-1\right) &= r\cos\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}$$

Derivando para obtener el jacobiano de la sustitución:

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)} = \begin{vmatrix} \cos\theta/2 & -r\,\text{sen}\,\theta/2 \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{2}$$

Es decir, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{r}{4}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. De esta forma la integral se reescribe como:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{4x^2-8x+y^2\leq 0} \sqrt{4x^2-8x+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{r^2\leq 4} \frac{r^2}{2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{2\cdot 3}2\cdot\pi \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\iint\limits_{4x^2-8x+y^2\leq 0} \sqrt{4x^2-8x+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8\pi}{3}}$$

Problema 3.21 Sea $\mathcal{R}$ la región del plano en el cuarto cuadrante acotada por las rectas

$$x+y=0 \quad , \quad x-y=1 \quad \text{y} \quad y=0$$

Calcule $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left[\left(x+y\right)\left(x-y\right)\right]^{2/5}}$.

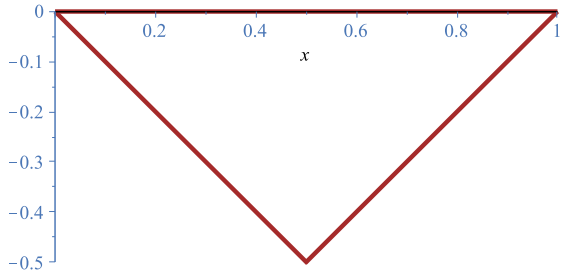
Solución:

Grafiquemos la región acotada en cuestión, considerando que las líneas son:

$$x+y=0 \to y=-x$$

$$x-y=1 \to y=x-1$$

Entonces, el gráfico corresponde a:



Observe que las funciones de la regiones aparecen repetidas en la integral, razón por la cual es en extremo sugerente la sustitución:

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= x-y \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{2}$$

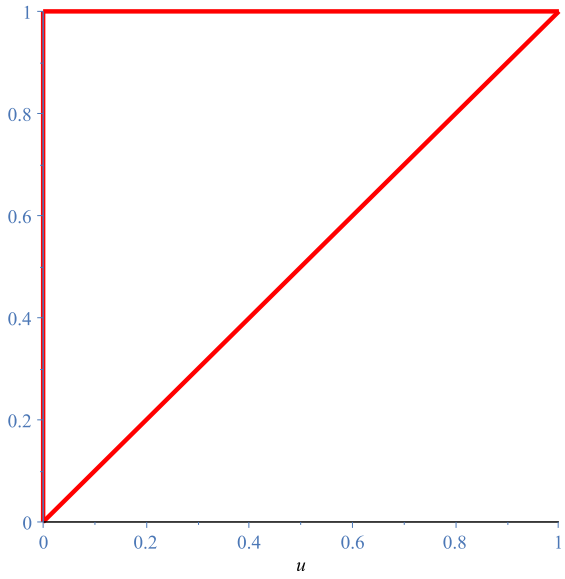
Además del gráfico se desprende que las restricciones corresponden a:

$$y \geq -x \rightarrow x+y \geq 0 \rightarrow u \geq 0$$

$$y \geq x-1 \rightarrow 1 \geq x-y \rightarrow v \leq 1$$

$$y \leq 0 \rightarrow \frac{u-v}{2} \leq 0 \rightarrow u \leq v$$

De esta forma, podemos graficar la nueva región:



... y escribir la nueva integral a partir del gráfico:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left[(x+y)(x-y)\right]^{5/2}} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_u^1 \frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}u}{(uv)^{5/2}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\int_0^1 \frac{1}{u^{2/5}}\left(1-u^{3/5}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{5}{6}\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{6}\right)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\iint_{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left[(x+y)(x-y)\right]^{5/2}} = \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

Problema 3.22 Calcule la integral doble

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(y^2-x^2\right)^{xy}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

siendo $\mathcal{R}$ el conjunto de puntos tales que $x, y > 0$, $a \leq xy \leq b$, $0 \leq y - x$ e $y^2 - x^2 \leq 1$ con $0 < a < b$.

Solución:

Nuevamente, observando la región de integración y la expresión involucrada, se puede determinar por ensayo y error que una sustitución conveniente corresponde a:

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= y^2 - x^2 \end{aligned}$$

De esta forma:

$$a \leq xy \leq b \rightarrow a \leq u \leq b$$

$$y^2 - x^2 \leq 1 \rightarrow v \leq 1$$

Como $(y^2 - x^2) = (y - x)(y + x)$ y $x, y \geq 0$ y $y - x \geq 0$, entonces se sigue implícitamente que $y^2 - x^2 \geq 0 \rightarrow v \geq 0$. Nuevamente, observe cómo la sustitución convierte una región no lineal en una cuadrada.

Determinamos ahora el jacobiano de la sustitución. Requerimos calcular $\partial(x, y)/\partial(u, v)$. Para evitar hacer el despeje de variables, utilizamos los corolarios del Teorema de la Función Inversa:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2\left(y^2+x^2\right) \rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$$

Observe otra ventaja de realizar esta sustitución:

$$\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{2}$$

mediante esta sustitución también eliminamos el (x^2+y^2) de la función original. Con todo esto, obtenemos que:

$$\iint_{\mathcal{R}}\left(y^2-x^2\right)^{xy}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^1 v^u\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

Integramos primero en v ya que se trata de integrar una polinomial de esta forma, lo cual resulta directo. Finalmente,

$$\cdots=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u$$

$$\rightarrow\boxed{\iint_{\mathcal{R}}\left(y^2-x^2\right)^{xy}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\log\left|\frac{b+1}{a+1}\right|}$$

Problema 3.23 Calcule la integral

$$\iint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^3}$$

donde Ω es la región delimitada por las curvas $y=\operatorname{sen}(x)$, $y=2\operatorname{sen}(x)$, $y=\cos(x)$, $y=2\cos(x)$ tal que $0\leq x\leq\pi/2$. Para ello, utilice el cambio de variables:

$$u=\frac{\operatorname{sen}(x)}{y},\quad v=\frac{\cos(x)}{y}$$

Solución:

Se tiene que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\cos(x)/y & -\operatorname{sen}(x)/y^2\\ -\operatorname{sen}(x)/y & -\cos(x)/y^2\end{vmatrix}=-\frac{1}{y^3}$$

Asimismo, las restricciones se convierten en:

$$y=\operatorname{sen}(x)\longrightarrow u=1$$

$$y=2\operatorname{sen}(x)\longrightarrow u=1/2$$

$$y=\cos(x)\longrightarrow v=1$$

$$y=2\cos(x)\longrightarrow v=1/2$$

Entonces, aplicando la sustitución:

$$\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^3} = \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{4}$$

Problema 3.24 Calcular la doble integral

$$\iint_{\mathcal{R}} 2a^2 + 2a\left(x-y\right) - \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

sobre la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2-2ax+2ay-2a^2 = 0\}$.

Solución:

La complejidad de la expresión suele confundir sobre cuál es el camino correcto a seguir para calcular la integral. Partamos identificando la región de integración, la cual si analizamos con calma nos daremos cuenta que es sencilla. La región es equivalente a:

$$(x-a)^2 + (y+a)^2 = 4a^2$$

lo cual es una circunferencia de radio $2a$ y centro en $(a,-a)$. Hagamos por lo tanto la sustitución polar:

$$\begin{aligned} x-a &= 2ar\cos\theta \\ y+a &= 2ar\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

con $r \in [0,1]$ y $\theta \in [0,2\pi]$. Luego, calculando el jacobiano de la transformación:

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)} = 2ar\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

En otras palabras,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} 2a^2 + 2a\left(x-y\right) - \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4a^2 - 4a^2r^2\right) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= -4\pi a^2 \int_0^1 1-u\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

donde se aplicó la sustitución $u = r^2$. Finalmente,

$$\iint_{\mathcal{R}} 2a^2 + 2a\,(x-y) - \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi a^2$$

Propuesto Calcule:

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

3.1.4. Aplicaciones de la integral doble

Revisemos ahora algunas aplicaciones de la integral doble, particularmente para el cálculo de áreas, momentos, masas y centros de masa. Teniendo claro el significado físico de cada variable, estos problemas siempre se terminan reduciendo al correcto cálculo de una integral doble.

Problema 3.26 Considere el semianillo $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 < 9,\ y \geq 0\}$ con densidad

$$\sigma(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

(a) Determine la masa M de $\mathcal{R}$.

(b) Escriba la coordenada x del centro de masa, $\bar{x}$, como una integral doble, indicando el integrando y los límites de integración.

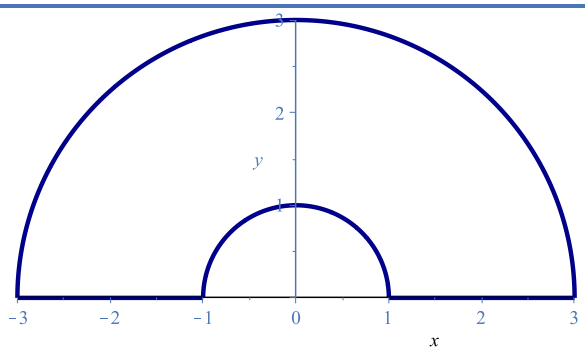
(c) Sin calcular, explique por qué $\bar{x} = 0$.

Solución:

(a) De la definición de la región y la función empleada que se recomienda el uso de coordenadas polares. La masa viene dada por

$$M = \iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}m$$

Graficando la región de integración:



Se sigue que $r \in [1,3]$ de acuerdo a la región y $\theta \in [0,\pi]$ para lograr que $y \geq 0$. Tenemos que por tratarse de una figura plana, entonces $\mathrm{d}m = \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, con lo cual

$$\begin{aligned} M &= \int_1^3 \int_0^\pi \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_1^3 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{d}\theta \\ &= -2\cos\theta\Big|_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{M = 4}$$

(b) De acuerdo a lo estudiado en Cálculo II, recordamos que:

$$\dot{x} = \frac{M_y}{M}$$

siendo M_y el momento de la figura con respecto al eje y. Recordamos adicionalmente que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M_y &= x\mathrm{d}m = x\sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= r\cos\theta \cdot \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Entonces, dado que los extremos de integración son los mismos:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_1^3 \int_0^\pi r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\mathrm{d}\theta$$

(c) Analíticamente: La integral es cero porque es separable en la integral de r y θ. Además $\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta$ y la estamos integrando en un período, por lo que dará cero y por lo tanto toda la integral cero.

Intuitivamente: Tanto la región como la densidad,

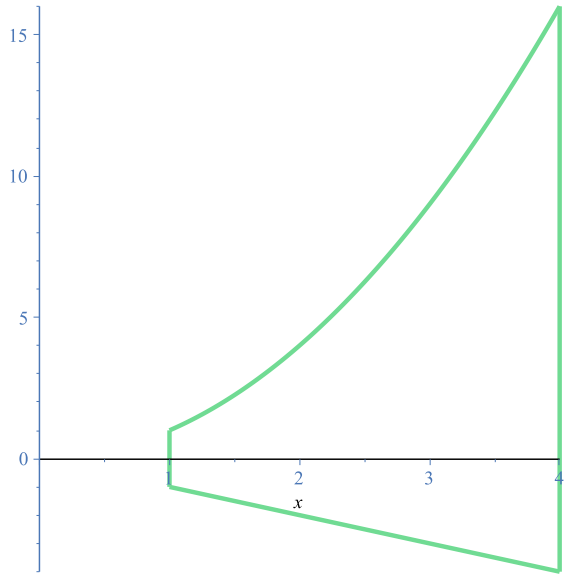
$$\frac{y}{x^2+y^2}$$

son simétricas con respecto al eje y (en efecto, $\sigma(x,y) = \sigma(-x,y)$). Luego, $\bar{x} = 0$ ya que la masa se distribuirá de forma simétrica en torno al eje, tal como estudiamos en varios casos en Cálculo II.

Problema 3.27 Considere la región $\mathcal{R}$ del plano xy delimitada por las curvas $x = 1$, $x = 4$, $y = x^2$, $y = -x$. Calcule las coordenadas de su centroide.

Solución:

Nuevamente no resulta complejo determinar la región:



Asumiendo densidad constante,

$$A = \iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}A = \int_1^4 \int_{-x}^{x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{57}{2}$$

Ahora calculamos los momentos:

$$M_y = \iint_{\mathcal{R}} x\,\mathrm{d}A = \int_1^4 \int_{-x}^{x^2} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{339}{4}$$

$$M_x = \iint_{\mathcal{R}} y\,\mathrm{d}A = \int_1^4 \int_{-x}^{x^2} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{459}{5}$$

Se deja propuesto el detalle de los cálculos al lector ya que solo consisten en integrar adecuadamente regiones polinomiales.

De esta forma,

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{113}{38}} \quad ; \quad \boxed{\bar{y} = \frac{306}{95}}$$

El resultado es razonable, pensando que $\bar{x}$ es más cercano a 4 pues ahí se concentra la mayoría de la masa, e y cercano a 3,5 dado que también ahí se concentra la mayoría de la masa / área de la región.

Problema 3.28 Calcule el momento de inercia con respecto al eje x de la figura plana con densidad $\sigma(x,y) = y\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}$ limitada por las restricciones $1/2 \leq y \leq 1$ y $x^2+y^2 \leq 1$.

Solución:

Sea $\mathcal{R}$ la región de integración, recordamos que por definición el momento de inercia es

$$\mathrm{d}I = d^2 \mathrm{d}m$$

donde d es la distancia al eje de giro y $\mathrm{d}m$ el diferencial de masa. En este caso, dado que trabajamos con una figura plana girando en torno al eje x, entonces se cumplirá que $\mathrm{d}m = \sigma(x,y)\,\mathrm{d}A$ y la distancia al eje x viene dada por y **(¡no x!).**

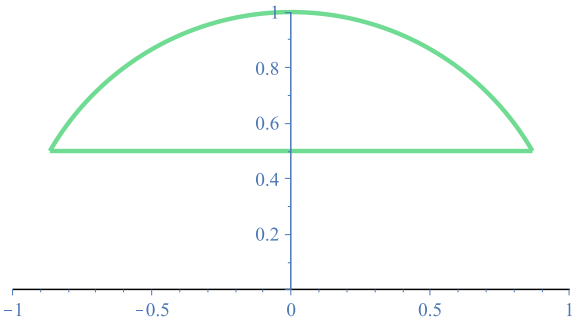
De esta forma, integrando se obtiene la expresión para el momento de inercia:

$$I_{xx} = \iint_{\mathcal{R}} \frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}A$$

Dada la expresión de la función y que aparece $x^2+y^2 \leq 1$ en la región, es evidente la sustitución recomendada: polares. Ya sabemos que:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Partamos graficando al región de integración para poder hacer la transformación:



Observamos que ahora no es del todo sencillo determinar la región, pues no será lineal. Para r tenemos una cota por arriba dada por una circunferencia de radio 1 y por abajo por la línea

vertical $y = 1/2$. θ se encontrará en un intervalo cuyos extremos están dados por la intersección de ambas curvas. Notemos que se debe cumplir que:

$$x^2 + y^2 \leq 1 \rightarrow r \leq 1$$

Adicionalmente,

$$y \geq \frac{1}{2} \rightarrow r \operatorname{sen}\theta \geq \frac{1}{2}$$

Como estamos integrando para θs donde $\operatorname{sen}\theta > 0$, entonces.

$$r \geq \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta}$$

Determinamos θ a partir de la intersección de ambas curvas. Tenemos que:

$$1 = \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta} \rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

Para el intervalo de interés la solución de esta ecuación es $\theta_1 = \pi/6$ y $\theta_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Luego,

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{1/2\operatorname{sen}\theta}^{1} \frac{r^3 \operatorname{sen}^3\theta}{r^3} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{sen}^3\theta \cdot \left(1 - \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{sen}^3\theta \,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{8}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

El cálculo de la segunda integral es directo. Para la primera notamos que:

$$\operatorname{sen}^3\theta = \left(1 - \cos^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta$$

con lo cual hacemos $u = \cos\theta \rightarrow \mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta$ para realizar la integración. De esta forma concluimos que:

$$\boxed{I_{xx} = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Problema 3.29 En este problema demostraremos que el valor de la integral gaussiana viene dado por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

el cual es un importante resultado en el campo de teoría de probabilidades. Proceda como se sugiere a continuación:

(a) Demuestre que:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

(b) Calcule la integral doble del apartado anterior y concluya.

(c) *Propuesto:* Una función de densidad probabilística se define como una función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo x e integra 1 en todo el espacio. Dado σ, ¿qué valores deben tomar μ y α de modo que la siguiente función sea una función de densidad probabilística?

$$f(x) = \alpha \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Solución:

Este problema integra perfectamente todo lo aprendido, apareciendo como única dificultad nueva los extremos de integración no acotado, generando integrales impropias de primera especie.

Se puede demostrar de forma muy sencilla que esta integral converge. En particular, basta notar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-|x|}} = 0$$

con lo cual notamos que como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 2$$

evidentemente converge, entonces la integral de e^{-x^2} en todo $\mathbb{R}$ converge. Nos basta solamente usar este argumento y los ya estudiados para calcular su valor, no perdiendo el tiempo tratando de determinar la primitiva.

(a) Notemos que:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Notamos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ es una constante al interior de la integral exterior. Luego,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$$

Como la variable de integración es muda,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}} \quad \square$$

(b) Observe que la aparición de x^2+y^2 sugiere de inmediato una sustitución del tipo polar para simplificar los cálculos. En efecto, hagamos:

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\end{aligned}$$

Aplicando esta sustitución, tendremos evidentemente que de acuerdo al teorema de sustitución:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Para cubrir todo $\mathbb{R}^2$, notamos que $\theta \in [0, 2\pi]$ cubre todos los signos posibles. Por lo tanto, basta hacer $r \in [0, \infty)$. De esta forma,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r\right) \\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u}\mathrm{d}u \\ &= \pi\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando con este valor en la demostración anterior,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}} \quad \blacksquare$$

Problema 3.30 El Problema de Basilea[a] es un problema famoso de teoría de números resuelto por Leonhard Euler en 1735, y cuya resolución motivó muchos trabajos posteriores en teoría de números, en particular uno de Riemann. El problema consiste en determinar el valor exacto de la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Por medio de la aproximación por polinomios de Taylor, Euler pudo resolver este problema obteniendo el valor de $\pi^2/6$. En este apartado resolveremos este problema por una (de varias) vías alternativas: asociando la serie con una integral doble y calculando finalmente el valor de esta mediante las técnicas ya conocidas.

(a) Sea Ω la región cuadrada definida por $[0,1]\times[0,1]$ y sea $f(r)$ la función:

$$f(r) = \frac{1}{1-r}$$

Suponiendo $r = xy$, realice una expansión en serie de potencias de $f(r)$ para demostrar que:

$$\mathcal{I} = \iint_{\Omega} \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(b) Aplique una sustitución del tipo rotación, i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{con } \mathcal{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Reescriba $\mathcal{I}$ con el diferencial $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ aplicando el teorema de sustitución. Comente sobre la ventaja de utilizar la sustitución.

(c) Mediante la integración de $\mathcal{I}$ con la expresión obtenida en (b), calcule la integral y demuestre entonces que:

$$\mathcal{I} = S = \frac{\pi^2}{6}$$

[a] Más información aquí.

Solución:

(a) Sabemos que la serie de potencias

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

converge uniformemente para todo $|r| < 1$ y es integrable, integrando término a término la serie de potencias (i.e. los operadores serie e integral conmutan). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^1 1 + xy + x^2y^2 + \ldots \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \ldots \mathrm{d}x \\
&= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(b) Evaluando la sustitución se tendrá que:

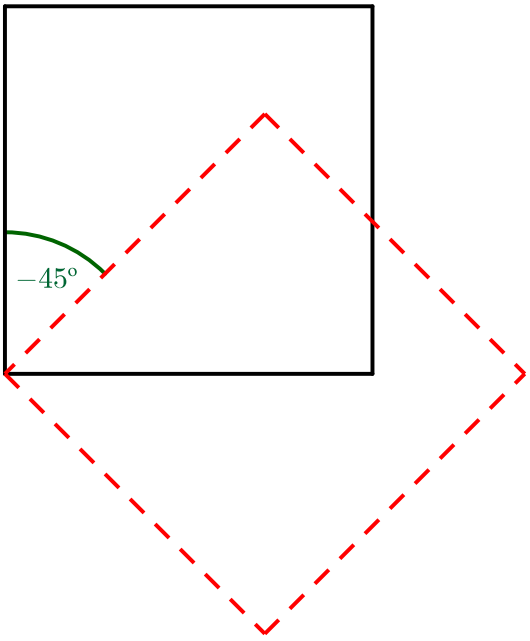
$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v) \\
y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)
\end{aligned}$$

Luego, $u = \dfrac{\sqrt{2}(x+y)}{2}$ y $v = \dfrac{\sqrt{2}(y-x)}{2}$. Esto se traduce en que:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v) \leq 1 \rightarrow 0 \leq u - v \leq \sqrt{2}$$

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v) \leq 1 \rightarrow 0 \leq u + v \leq \sqrt{2}$$

Gráficamente esta transformación se ve como se muestra a continuación:



Con esto, notamos que la nueva región (un cuadrado rotado en 45° en sentido horario) se puede subdividir en dos de tipo I, las cuales son:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\leq u\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{y}\, -u\leq v\leq u\right\}\\ \mathcal{R}_2 &= \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \frac{\sqrt{2}}{2}\leq u\leq \sqrt{2}\,\text{y}\,\sqrt{2}-u\leq v\leq u-\sqrt{2}\right\}\end{aligned}$$

de modo que $\Omega = \mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$. Además,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1$$

De esta forma, la integral se reescribe como:

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{R}_1}\frac{1}{1-x(u,v)y(u,v)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \iint\limits_{\mathcal{R}_2}\frac{1}{1-x(u,v)y(u,v)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

con los valores ya calculados. Hagamos los reemplazos pertinentes. En primer lugar,

$$\begin{aligned}x(u,v)y(u,v) &= \frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\\ \frac{1}{1-xy} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)} = \frac{2}{2-u^2+v^2}\end{aligned}$$

Además, la nueva función es par tanto para u como para v, razón por la cual podemos tomar solo el eje y positivo en ambas integrales, de esta forma:

$$I = 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^u \frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}u}{2-u^2+v^2} + 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{2-u^2+v^2}$$

Observe que mediante estas sustituciones hemos obtenido integrales que sí es posible estudiar mediante la obtención de primitivas. Adicionalmente, notamos que esto elimina la complicación en el comportamiento de las integrales como integrales impropias $1/(1-xy)$ tenía problemas en $(x,y)=(1,1)$.

(c) Calculemos la primera integral:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^u \frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}u}{2-u^2+v^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right)\right]\Bigg|_{v=0}^{v=u} \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) \mathrm{d}u \end{aligned}$$

Hacemos $u = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t) \to \mathrm{d}u = \sqrt{2}\cos(t)\mathrm{d}t$. Es decir,

$$\begin{aligned} 4I_1 &= 4\int_0^{\pi/6} \arctan\left(\tan(t)\right) \mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/6} t\,\mathrm{d}t \\ &= 4\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\pi/6} = 4\frac{\pi^2}{72} = \frac{\pi^2}{18} \end{aligned}$$

Ahora calcularemos I_2. Procedemos análogamente:

$$\begin{aligned} 4I_2 &= 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}u}{2-u^2+v^2} = 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right)\Bigg|_{v=0}^{v=\sqrt{2}-u} \mathrm{d}u \\ &= 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u}}\right) \mathrm{d}u \end{aligned}$$

Observamos que la expresión dentro del arcotangente asemeja a la fórmula:

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

Precisamente, haremos la sustitución $u = \sqrt{2}\cos t \to \mathrm{d}u = -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{d}t$. La integral queda

reescrita como:

$$\begin{aligned} 4I_2 &= -4\int_{\pi/3}^{0} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\right) \mathrm{d}t \\ &= 4\int_{0}^{\pi/3} \arctan\left(\tan\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = t^2\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi^2}{9} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$I = 4I_1 + 4I_2 = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}$$

Esto es,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{6}} \quad \blacksquare$$

Para finalizar la revisión de integrales dobles, aprovechamos de estudiar las funciones Beta y Gamma, debido a que ahora disponemos de todas las herramientas matemáticas para un estudio básico de ellas. Asimismo, se aconseja revisar estas preguntas ya que al conocer sus propiedades cierta familia de integrales puede resolver de forma sencilla.

Problema 3.31 **Un estudio de las funciones Gamma y Beta (1).** Se define la función $\Gamma(x)$ como la integral impropia:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \tag{3.6}$$

convergente para todo $\mathrm{Re}\{x\} \geq 1$. Comenzaremos demostrando algunas propiedades:

(a) Calcule $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ y $\Gamma(1/2)$.

(b) Usando integración por partes demuestre que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Luego utilice esto para concluir que $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$[a].

(c) Demuestre las siguientes propiedades:

a) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}p^x \int_0^{\infty} e^{-ps} s^{x-1} \mathrm{d}s.$

b) Si $p > 0$, $\Gamma(x) =$

[a] Es decir, la función gamma es una extensión a dominio continuo de la función factorial.

Solución:

(a) No queda más opción que hacer esto por definición. Sin embargo, esto puede no ser del todo complicado.

$$\boxed{\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1}$$

Análogamente,

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Hacemos integración por partes:

$$\begin{cases} u = t & \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t & \to v = -e^{-t} \end{cases}$$

con lo cual

$$\boxed{\Gamma(2) = \cancelto{0}{-te^{-t}\Big|_0^\infty} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t}_{\Gamma(1)} = 1}$$

Finalmente,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Si bien no es tan evidente, podemos notar que aparece una función y su derivada:

$$u = t^{1/2} \to \mathrm{d}u = \frac{1}{2}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

con lo cual notando que los extremos de integración no cambian:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

la cual es la mitad de la integral Gaussiana, por lo cual su valor es $\sqrt{\pi}/2$. Concluimos entonces que:

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

Estos los valores básicos de la función básicos de la función Gamma y a partir de los cuales pueden calcularse los valores más relevantes. Otros valores, como por ejemplo $1/3$, suelen calcularse mediante aproximaciones numéricas.

(b) Tenemos que:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Haciendo la integración por partes, notamos que es conveniente derivar la función polinomial para obtener el $\Gamma(x)$ del lado derecho de la identidad que se desea demostrar. Entonces,

$$\begin{cases} u = t^x & \to \mathrm{d}u = xt^{x-1}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t & \to v = -e^{-t}\mathrm{d}t \end{cases}$$

con lo cual

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t}t^x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Para el límite de integración del primer término notamos que:

- Demostramos que la integral converge absolutamente para $x > 0$ para Cálculo II.
- Por Regla de L'Hôpital o bien por el comportamiento absorbente de la exponencial se puede notar con relativa facilidad que los límites de ambos extremos se anularán.

Agregando el hecho de que x no depende de t y se puede sacar de la integral, entonces:

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)} \quad \blacksquare$$

Haciendo $x = n \in \mathbb{N}$, entonces aplicando la propiedad anterior, tendremos que:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1)$$

lo cual coincide exactamente con la definición de factorial. Es decir, $\Gamma(n+1) = n!$.

(c) Para la primera propiedad procedemos de forma análoga a como hicimos anteriormente:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

Iterando muchas veces:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{2j-1}{2}\right)\cdots\underbrace{\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Dado que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ sumamos fracciones y reescribimos:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

En el denominador podemos notar que aparecen n veces el número 2, con lo cual:

$$\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}} \quad \blacksquare$$

Para la segunda propiedad primero escribimos la integral que se quiere igualar a $\Gamma(x)$:

$$p^x\int_0^\infty e^{-ps}s^{x-1}\mathrm{d}s=\int_0^\infty e^{-ps}p^x s^{x-1}\mathrm{d}s$$

Podemos agrupar los términos polinomiales notando que $p^x=p^{x-1}p$, con lo cual

$$p^x\int_0^\infty e^{-ps}s^{x-1}\mathrm{d}s=\int_0^\infty e^{-ps}\left(ps\right)^{x-1}p\,\mathrm{d}s$$

Dado que $p>0$, hagamos $t=ps\rightarrow \mathrm{d}t=p\,\mathrm{d}s$. Es decir,

$$\boxed{p^x\int_0^\infty e^{-ps}s^{x-1}\mathrm{d}s=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t=\Gamma(x)}$$

demostrando así lo pedido. $\blacksquare$

Problema 3.32 **Un estudio de las funciones Gamma y Beta (2).** Ahora definimos la función beta de dos variables $\mathrm{B}(m,n)$ como la integral impropia:

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x, \tag{3.7}$$

la cual converge para m, n positivos no nulos.

(a) Demuestre que $\mathrm{B}(m,n) = \mathrm{B}(n,m)$ y que $\mathrm{B}(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

(b) Haciendo la sustitución $u(x) = \dfrac{x}{1-x}$, demuestre que:

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}\mathrm{d}u$$

(c) Demuestre que:

$$\frac{1}{(1+u)^{m+n}} = \frac{1}{\Gamma(m+n)}\int_0^\infty e^{-(1+u)s}s^{m+n-1}\mathrm{d}s$$

(d) Aplicando propiedades de integrales dobles, demuestre que:

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \tag{3.8}$$

Solución:

(a) Partiremos primero demostrando la propiedad de conmutatividad en los argumentos. Para ello, notamos que:

$$\mathrm{B}(n,m) = \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1}\,\mathrm{d}u$$

Hagamos $u = 1-x \to \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ y $x = 1-u$, con lo cual

$$\mathrm{B}(n,m) = -\int_1^0 (1-x)^{n-1}x^{m-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{B}(m,n)$$

demostrando así lo pedido. ■

Para demostrar la segunda propiedad notemos que:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-2}\theta\,\cos^{2n-2}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

pero $\cos^{2m-2}\theta = (\cos^2\theta)^{m-1} = (1-\operatorname{sen}^2\theta)^{m-1}$, con lo cual:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^2\theta\right)^{m-1}\left(1-\cos^2\theta\right)^{n-1}\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Aquí ya se hace patente esta manipulación algebraica: nos permite hacer la sustitución $u = \operatorname{sen}^2\theta \to \mathrm{d}u = 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. Entonces,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

Finalmente,

$$\boxed{2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \mathrm{B}(m,n)} \quad \blacksquare$$

(b) Tomemos la integral en función de u:

$$\int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}\mathrm{d}u$$

Dada la sustitución de u, partimos notando que:

$$u = \frac{x}{1-x} = -\frac{x}{x-1} = -\left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)$$

Entonces,

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

Adicionalmente,

$$\frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} = \frac{\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{m-1}}{\left(1+\dfrac{x}{1-x}\right)^{m+n}} = \frac{\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{m-1}}{\left(\dfrac{1-x+x}{1-x}\right)^{m+n}}$$

$$\to \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} = x^{m-1}(1-x)^{m+n+1-m} = x^{m-1}(1-x)^{n+1}$$

Despejando x en función de u, entonces:

$$u - ux = x \to x = \frac{u}{u+1}$$

De esta forma $x(\infty) = 1$ y $x(0) = 0$, con lo cual la integral se reescribe como:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}\mathrm{d}u &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}(1-x)^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}\mathrm{d}u = \int_0^1 x^{m-1}\left(1-x\right)^{n-1}\mathrm{d}x = \mathrm{B}\left(m,n\right)} \quad \blacksquare$$

(c) Para esta propiedad utilizamos la propiedad demostrada en (c):

$$\Gamma\left(x\right) = p^x \int_0^\infty e^{-ps}s^{x-1}\mathrm{d}s.$$

Hagamos $x = m+n$ y $p = 1+u$, con lo cual:

$$\Gamma\left(m+n\right) = \left(1+u\right)^{m+n} \int_0^\infty e^{-(1+u)s}s^{(m+n)-1}\mathrm{d}s.$$

Reordenando términos:

$$\boxed{\frac{1}{(1+u)^{m+n}} = \frac{1}{\Gamma\left(m+n\right)} \int_0^\infty e^{-(1+u)s}s^{(m+n)-1}\mathrm{d}s.} \quad \blacksquare$$

(d) Tenemos que:

$$\mathrm{B}\left(m,n\right) = \int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} = \int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{\Gamma\left(m+n\right)} \left(\int_0^\infty e^{-(1+u)s}s^{(m+n)-1}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u.$$

Dado que $\Gamma\left(m+n\right)$ no depende de las variables de integración, lo sacamos de las integrales, obteniendo de inmediato el denominador de la expresión deseada. Luego,

$$\mathrm{B}\left(m,n\right) = \frac{1}{\Gamma\left(m+n\right)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty u^{m-1}e^{-(1+u)s}s^{(m+n)-1}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u$$

Dada la complejidad de integrar directamente, la región cuadrada y las funciones continuas podemos aplicar el Teorema de Fubini:

$$\rightarrow \mathrm{B}\left(m,n\right) = \frac{1}{\Gamma\left(m+n\right)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty u^{m-1}e^{-(1+u)s}s^{(m+n)-1}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$

Eliminamos al interior todo lo que no depende de s:

$$\mathrm{B}\left(m,n\right) = \frac{1}{\Gamma\left(m+n\right)} \int_0^\infty s^{(m+n)-1}e^{-s} \left(\int_0^\infty u^{m-1}e^{-us}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$

De la propiedad notada en (c), podemos separar inteligentemente $s^{(m+n)-1}$:

$$\mathrm{B}\left(m,n\right) = \frac{1}{\Gamma\left(m,n\right)} \int_0^\infty s^{n-1}e^{-s} \underbrace{s^m \int_0^\infty u^{m-1}e^{-us}\mathrm{d}u}_{\Gamma(m)}\,\mathrm{d}s$$

Dado que $\Gamma(m)$ no depende de las variables de integración, entonces:

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} \underbrace{\int_0^\infty s^{n-1} e^{-s} \mathrm{d}s}_{\Gamma(n)}$$

con lo cual finalmente,

$$\boxed{\mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}} \quad \blacksquare$$

En la práctica muchas integrales son de la forma

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{2m-1}\theta\, \cos^{2n-1}\theta\, \mathrm{d}\theta$$

o bien

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, \mathrm{d}x$$

En el curso de Cálculo I se descubrieron metodologías recursivas para calcular cada una de estas integrales. Sin embargo, con las deducciones anteriores basta identificar m y n en las expresiones de estas integrales para reducirlas a la función Beta. Luego, se deja la función en términos de Gamma y se calcula haciendo uso de la relación de bajada ($\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$) y los valores básicos necesarios: $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

3.2. Integrales triples y aplicaciones

Nota: La mayoría de problemas incluyen figuras, los cuales se encuentran disponibles en la hoja de cálculo Maple asociada a la sección. Si se presentan dificultades para comprender una figura, se recomienda revisar y ejecutar los códigos para observar los sólidos desde la perspectiva adecuada.

Trabajaremos ahora con integrales triples, las cuales desde el punto de vista teórico presentan similitudes con las integrales dobles, tanto en su cálculo iterativo como en los procedimientos de sustitución.

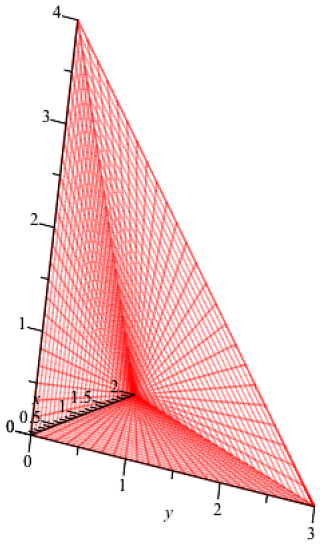
Partiremos evaluando integrales triples de forma iterada. La principal dificultad que aparece en este tipo de problemas es identificar e imaginar adecuadamente el sólido, para establecer correctamente los extremos de integración en cada intervalo.

Problema 3.33 Considere el tetraedro $\mathcal{T}$ definido en $\mathbb{R}^3$ por los vértices $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ y $(0,0,4)$. Calcule:

$$\iiint_{\mathcal{T}} x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Solución:

Imaginándonos los puntos, podemos notar intuitivamente que el tetraedro corresponde a uno delimitado por los planos coordenados (xy, yz y xz) y un plano a determinar. Graficando los puntos, obtenemos un sólido como el siguiente:



Tenemos que determinar este plano, que pasa por los puntos $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ y $(0,0,4)$ (ojo: no por el origen, este genera los otros planos mencionados). Sea el plano dado por la ecuación:

$$ax + by + cz = d$$

con a, b, c y d puntos a determinar. Como pasa por el punto $(2,0,0)$, entonces reemplazando:

$$2a = d \to a = \frac{d}{2}$$

Análogamente para los demás puntos:

$$3b = d \to b = \frac{d}{3}$$

$$4c = d \to c = \frac{d}{4}$$

Luego, la ecuación se reescribe como:

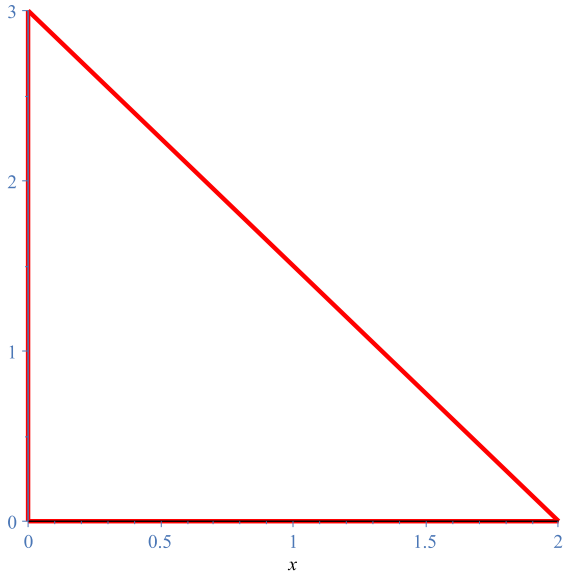
$$\frac{d}{2}x + \frac{d}{3}y + \frac{d}{4}z = d$$

Como el plano no pasa por el origen, $d \neq 0$ y se pueden simplificar las d. Multiplicando a ambos lados por 12 obtenemos que:

$$6x + 4y + 3z = 12$$

Hecho esto, podemos escribir la integral. Podemos partir integrando en z pensando en la figura. Para ello, notamos que z está acotado inferiormente por el plano xy con ecuación $z = 0$ y superiormente por el plano ya calculado.

La pregunta siguiente sería, ¿cómo integramos en el plano xy? Solo graficando los puntos que están en este plano obtenemos una región como la siguiente:



donde la línea diagonal consiste en la intersección del plano $6x + 4y + 3z = 12$ con el plano xy de ecuación $z = 0$, i.e. $6x + 4y = 12$ es la ecuación de esta recta.

Luego, escribir la integral se puede hacer de forma directa:

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{12-6x}{4}} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} x \, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Esta expresión se puede calcular de forma directa pues integración polinomial. De esta forma,

$$\boxed{I = 2}$$

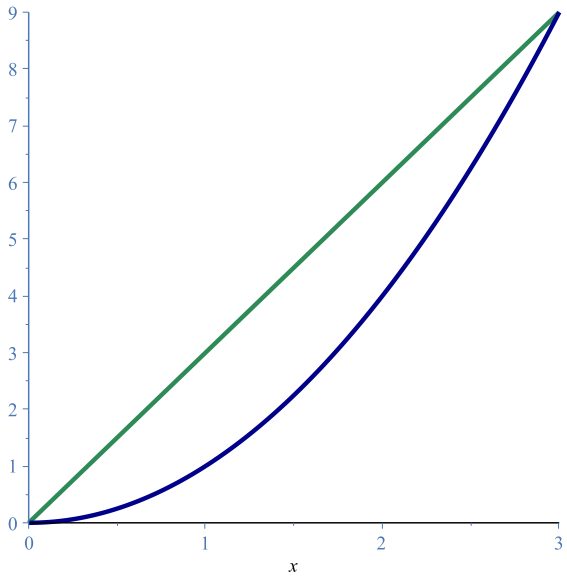
Problema 3.34 Calcular $\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ donde $\mathcal{D}$ es la región limitada por:

$$z = x^2 + y^2 \quad , \quad z = 4x^2 + 4y^2 \quad , \quad y = x^2 \quad , \quad y = 3x$$

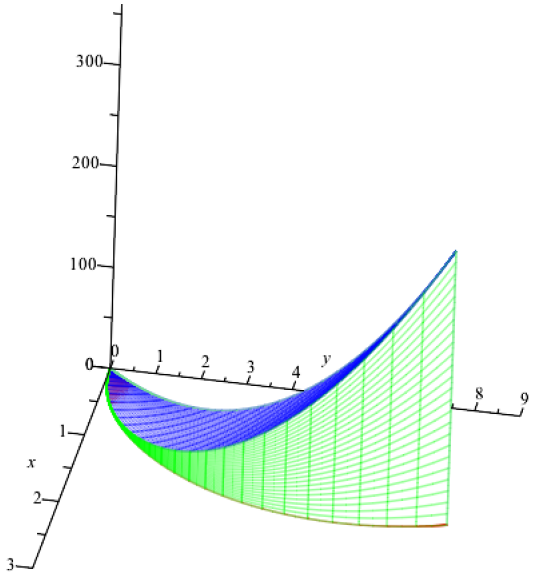
Solución:

La principal dificultad de este problema radica en escribir la integral iterada, y para ello se requiere conocer la región sobre la cual se está integrando. Las primeras dos superficies corresponen a paraboloides y las segundas dos a funciones en el plano XY que se extienden en todo z pues no imponen restricciones sobre esta variable.

En el plano xy se observa algo como lo siguiente:



Considerando la coordenada z, esta puede moverse entre ambos paraboloides, donde evidentemente ubicaremos el segundo paraboloide sobre el primero. Se puede entender mejor la situación con el siguiente gráfico:



Luego, notamos que la coordenada z solo puede moverse entre ambos paraboloides, y luego las coordenadas x e y las integramos de acuerdo a lo ya aprendido sobre integrales dobles. En particular, podemos hacer que y se mueva entre x^2 y $3x$ de acuerdo a la primera figura y x entre 0 y 3. De esta forma, la integral se escribe como:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3 \int_{x^2}^{3x} \int_{x^2+y^2}^{4x^2+4y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Observe que la integración es directa en este caso, pues solo estamos calculando polinomiales. Este es un procedimiento sencillo, pero en extremo tedioso.

Finalmente,

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{9477}{35}}$$

Nuevamente, puede resultar imposible evaluar integrales en cierto orden iterado ya que no es posible determinar las primitivas. Sin embargo, cambiando el orden de integración a veces sí puede ser posible evaluar la integral. El problema es que al realizar el cambio de orden de integración en tres dimensiones, pueden aparecer diversas consideraciones adicionales que pueden realmente complicar el proceso.

En los siguientes problemas revisamos exclusivamente el proceso de cambio de orden de integración.

Problema 3.35 Cambie los órdenes de integración:

(a) $\displaystyle\int_0^{1/2}\int_0^{1-2x}\int_0^{2-4x-2y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

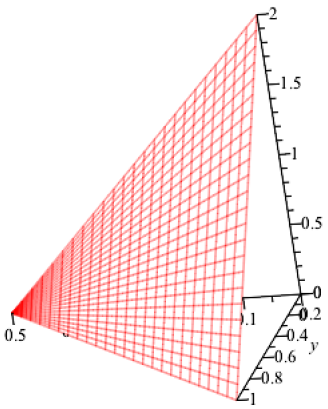
(c) $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{y^2}\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$.

(d) $\displaystyle\int_0^{1}\int_x^{2x}\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Solución:

Para todos estos problemas, siempre la mejor práctica es tratar de graficar la región de integración a partir de la información que la integral entrega. Luego, se trata de realizar el cambio de orden de integración a partir del gráfico generado/imaginado.

(a) Tenemos que la coordenada z se mueve entre el origen y el plano $4x+2y+z=2$. La coordenada y se moverá entre 0 y la recta $y=1-2x$ y la coordenada x entre 0 y $1/2$. Agregando la coordenada z como una proyección, obtenemos el gráfico de un evidente tetraedro entre los planos coordenados y el plano $z=2-4x-2y$:



Ahora bien, queremos integrar en primer lugar en x. Notamos que entonces la coordenada x se moverá entre 0 y $x=\frac{1}{4}(2-z-2y)$. Luego, la coordenada y se puede mover entre 0 y la recta de intersección del plano dado con el plano yz ($x=0$). Es decir, y varía entre 0 y $1-z/2$. Finalmente, la coordenada z varía entre 0 y la intersección de esta recta con el eje z, en $z=2$.

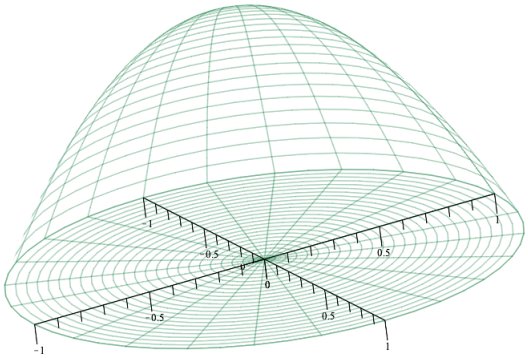
Es decir,

$$\int_0^{1/2}\int_0^{1-2x}\int_0^{2-4x-2y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{2}\int_0^{1-z/2}\int_0^{\frac{1}{4}(2-2y-z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

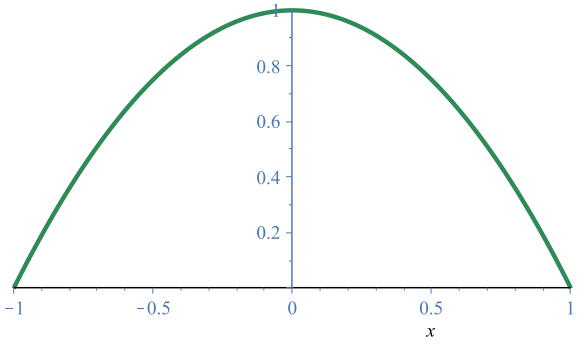
(b) Nuevamente, partimos imaginándonos el gráfico obtenido a partir de la región que entrega la integral iterada.

La coordenada z se mueve entre 0 y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ (¡**ojo**, es muy tentador pensar que esto era una esfera, pero en dicho caso hubiese sido $\sqrt{1-x^2-y^2}$). La coordenada y se mueve entre las semicircunferencias $-\sqrt{1-x^2}$ y $\sqrt{1-x^2}$ y la coordenada x se mueve entre -1 y 1.

No resulta del todo complicado notar que la región buscada corresponde a:



Ahora queremos integrar en primer lugar en la coordenada y, luego en la coordenada z y finalmente en la coordenada x. Esto puede entenderse como que en el corte del sólido en el plano xz ($y = 0$) se mapea a cada punto de la región una integral que se mueve entre ciertos y dados. El corte en el plano xz viene dado por la siguiente figura:



este corte viene representado por $z = 1 - x^2 - y^2$ haciendo $y = 0$, i.e. $z = 1 - x^2$. La primera pregunta entonces es: ¿entre dónde y dónde se mueve la coordenada y? Esta vendrá dada por

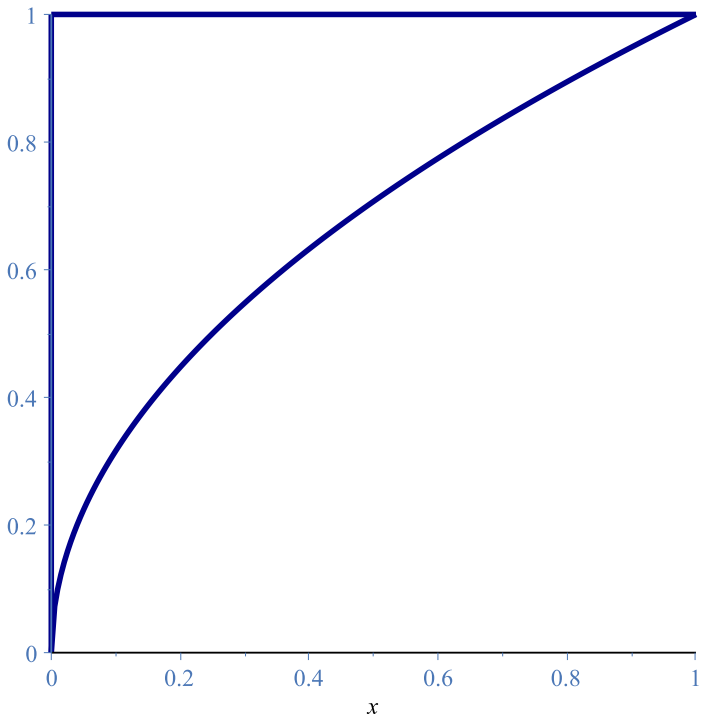
los extremos del paraboloide. Recordamos que:

$$z = 1 - x^2 - y^2 \to y^2 = 1 - x^2 - z \to y = \pm\sqrt{1 - z - x^2}$$

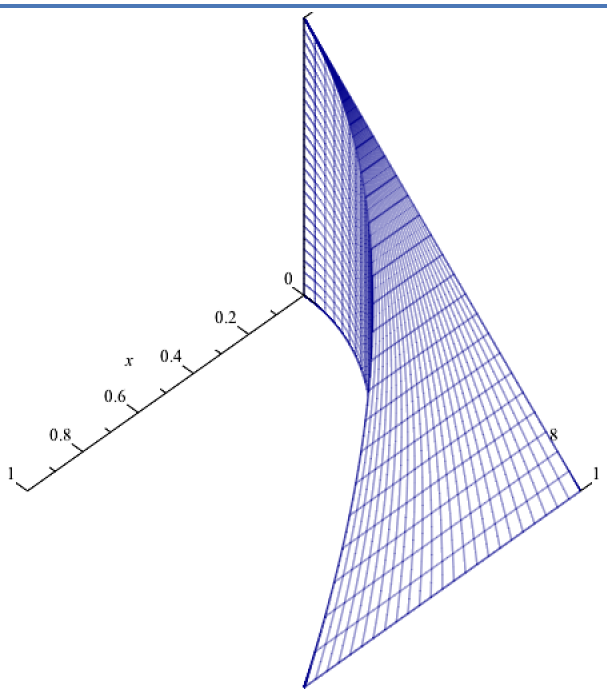
En este caso, integramos entre ambos signos. Luego, debemos integrar esta función de z y x en z. Mirando la segunda figura, notamos que z puede moverse entre 0 y $1 - x^2$. Finalmente, x puede moverse entre -1 y 1. De esta forma,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{-\sqrt{1-z-x^2}}^{\sqrt{1-z-x^2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

(c) Procedemos de forma similar. En primer lugar, a componente z puede moverse entre 0 y la superficie $z = 1 - y$ que se cumple para todo x. Luego, la componente x se mueve entre 0 e y^2 en el plano xy y la componente y entre 0 y 1. Graficando en primer lugar el plano xy:



Luego, agregando la componente z, el plano $1 - y$ obtenemos un sólido como el siguiente:

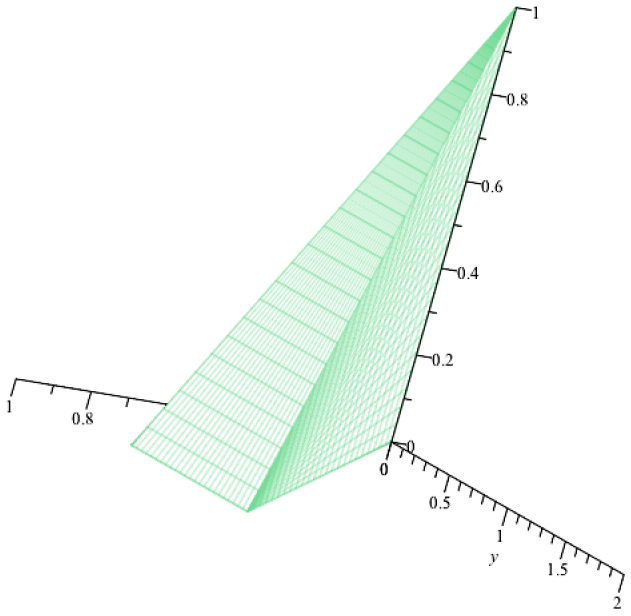


Ahora consideraremos el plano xz, y en cada punto de este plano mapearemos una integral que depende de y. Entonces, ¿dónde integramos en y?

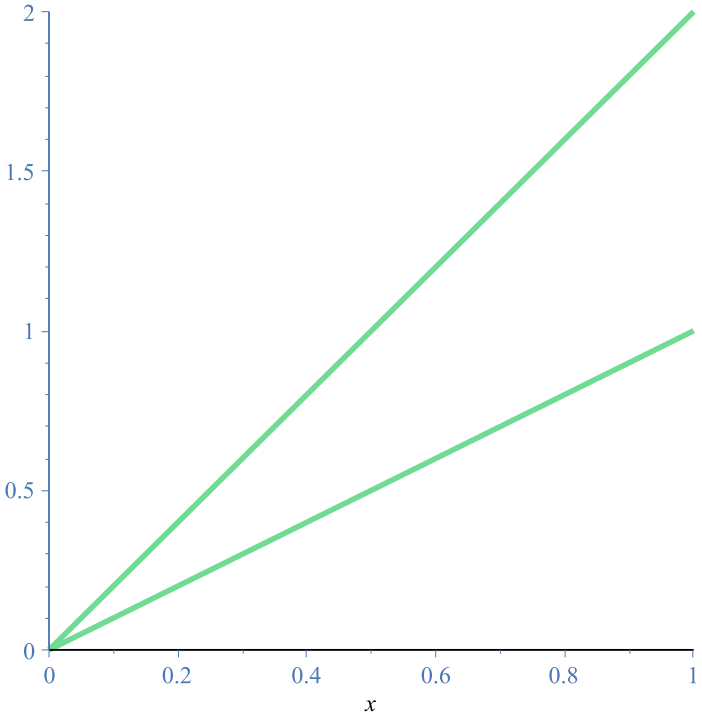
La coordenada y siempre estará delimitada por abajo por el plano $y = \sqrt{x}$ (indistinto de z) y por arriba por el plano $y = 1-z$. Luego, en el plano xz debemos integrar primero en x. Observamos de inmediato que x se mueve entre o y $z = 1-y$ con $y = \sqrt{x}$. Entonces, $z = 1-\sqrt{x} \to x = (1-z)^2$. Finalmente, la coordenada z se moverá entre 0 y 1. De esta forma,

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

(d) Para la primera parte, estamos integrando primero en z, luego en x y luego en y, por lo que el plano xy nos marca la región a la cual en cada punto estaremos mapeando una integral en z. El plano xy está dado por las eucaciones x y $2x$, entre $x = 0$ y $x = 1$. El sólido así obtenido es el siguiente:



Observe que al cambiar al primer orden de integración seguimos integrando en z en primer lugar, por lo cual todo se reduce a cambiar el orden de integración de la integral doble, lo cual ya sabemos hacerlo. Grafiquemos la región en el plano xy:



Observe que integrando primero en x, distinguiremos dos casos de extremos de integración. Primero de y entre 0 y 1 la coordenada x se mueve entre $y/2$ e y. En cambio de 1 a 2 se mueve

de $y/2$ a 1, razón por la cual tendremos que separar la integral en 2, conservando la integración en z. De esta forma,

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{y/2}^{y} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Propuesto: Integre en el orden $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Comenzaremos a utilizar ahora el Teorema de Sustitución, el cual es exactamente análogo al ya estudiado en integrales dobles, y se enuncia como:

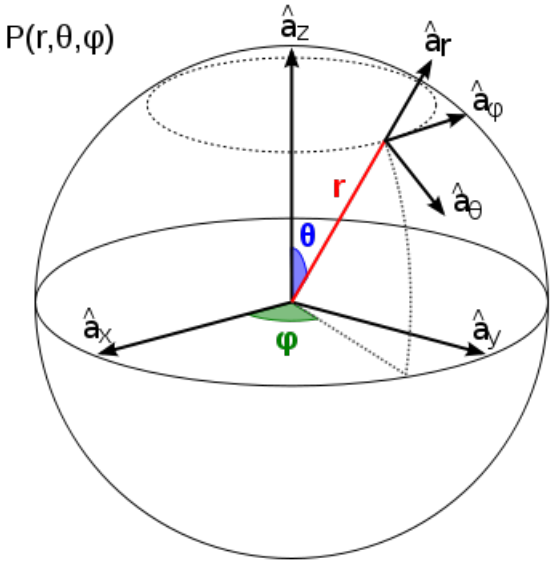
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right] \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Análogamente al caso $\mathbb{R}^2$, vale la pena señalar y recordar siempre dos tipos de simetrías que pueden ser útiles para una tipología muy diversa de problemas:

- **Simetría cilíndrica:** típica en hélices, cilindros, conos, paraboloides, etc. Se observa indiscutiblemente simetría radial en alguno de los planos (típicamente el plano xy) e independencia en el eje restante (típicamente el eje z). Entonces, se hace la sustitución:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \end{cases} \longrightarrow \boxed{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r}$$

- **Simetría esférica:** existe simetría en torno a un punto, típicamente el origen. Se utiliza la convención internacional usada en Física e Ingeniería y presentada en la figura siguiente:



Fuente: Wikipedia.

donde $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ y $r \geq 0$. Luego,

$$\begin{cases} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases} \longrightarrow \boxed{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right| = r^2 \operatorname{sen}\theta}$$

Problema 3.36 Sea Ω la región del sólido delimitado por las inecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq a^2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Sin calcular:

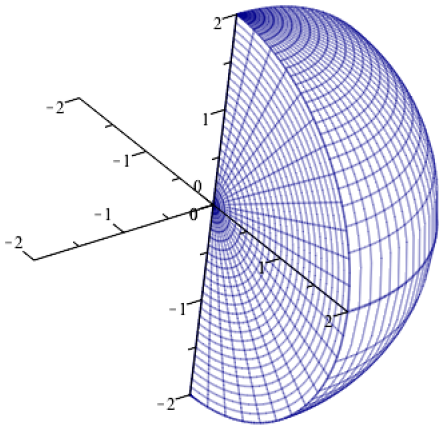
(a) Escriba la integral triple que entrega el volumen de Ω.

(b) Escriba la integral anterior en coordenadas cilíndricas, indicando el integrando y los límites.

(c) Escriba la fórmula en coordenadas esféricas que entregue la distancia promedio de los puntos de Ω al plano xz.

Solución:

Partamos imaginando a lo que corresponde el sólido: es una porción de esfera de radio a que considera tanto la coordenada x como la coordenada y positivas. Luego, corresponde a la porción de esfera contenida en dos octantes, lo cual puede graficarse como:



(a) Si integramos en el orden $z \to x \to y$, tendremos que la coordenada z se mueve entre los extremos obtenidos al despejar $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ donde $z = z(x, y)$. Es decir, z se mueve entre

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Luego, integramos cada una de estas integrales en z en el plano xy. En el plano xy el sólido se ve como $x^2 + y^2 \leq a^2$ (hacemos $z = 0$) en el primer cuadrante.

Si integramos primero en y, la componente y se moverá entre $-\sqrt{a^2 - x^2}$ y $\sqrt{a^2 - x^2}$. Finalmente, x se mueve entre 0 y a, por lo cual integrando,

$$\boxed{V = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$$

(b) En el sistema cilíndrico tenemos que el diferencial viene dado por:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

donde en este caso $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ para generar el sólido y $r \in [0, a]$. La coordenada z se movía originalmente entre $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ pero como $r^2 = x^2 + y^2$, entonces los extremos cambian a simplemente $-\sqrt{a^2 - r^2}$ y $\sqrt{a^2 - r^2}$. Luego,

$$\boxed{V = \int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}$$

(c) De lo ya estudiado, recordamos que en coordenadas esféricas se cumple que:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2 \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Dado que integramos z, recordamos que en el sistema esférico se tiene que $z = r\cos\theta$ (la proyección de r sobre el eje z, el cual mide θ).

Integrando esta región, tenemos que $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ para lograr el sólido pedido. Finalmente, como $r \in [0, a]$:

$$\boxed{M_{xy} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^a r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$$

Problema 3.37 Determine el volumen del sólido encerrado por las superficies:

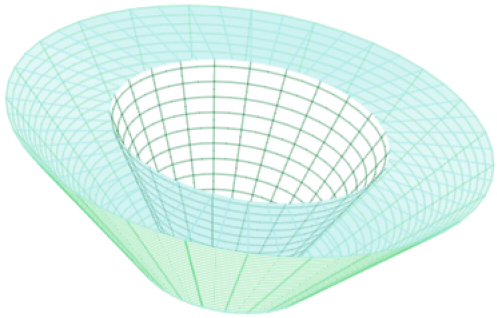
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad z = \sqrt{3\,(x^2 + y^2)} \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad ; \quad z = 2$$

Solución:

Para resolver este problema se procede de forma similar al anterior. Partimos notando que las primeras dos superficies corresponden a conos. ¿Cómo se nota esto? Notando que en el origen

se genera un vértice pues la función no es diferenciable (y vale cero) y que para todos los demás puntos la componente z mide la norma de los vectores, razón por la cual se forman anillos concéntricos como superficies de nivel, que generan variaciones de altura constantes en z.

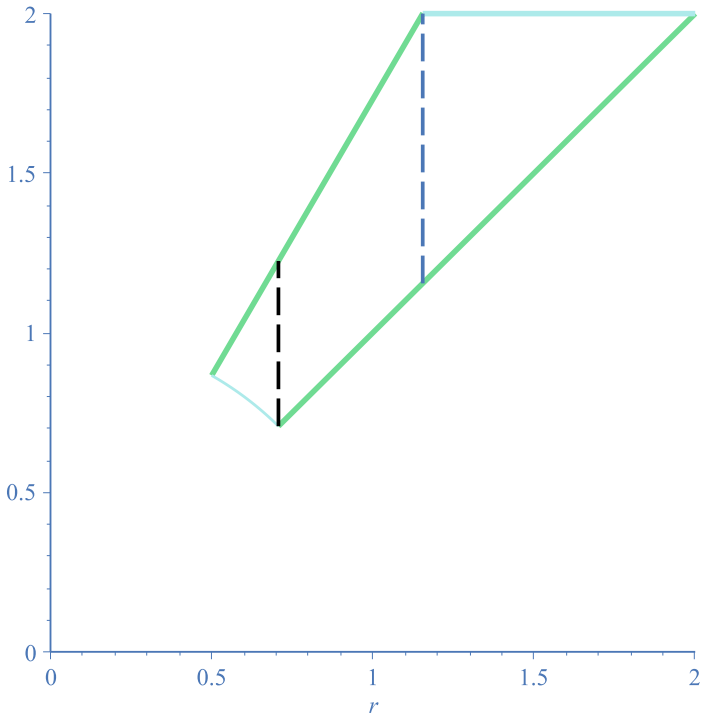
Entonces, la coordenada z debe estar contenida entre ambos conos. Adicionalmente, esta no debe ser superior a 2 en altura y debe estar en el exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Es pertinente graficar la situación (o bien tratar de imaginarla) para comprender mejor cómo integrar.



El gráfico del sólido hace evidente que el problema presenta simetría cilíndrica (radial en el plano xy, z es independiente)[a]. Entonces, haremos:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Escribamos entonces los intervalos de integración entonces inmediatamente en el sistema cilíndrico. Para ello, hagamos un corte de este sólido, obteniendo una región como la siguiente (ahora z es función de r en los cortes):



Es evidente que integrando en z en primer lugar la integral buscada se separa en 3, donde para todas $\theta \in [0, 2\pi]$. Dado que esta parece ser la opción más simple a priori, intentemos hacerlo. Luego,

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

donde cada V_i representa una integral de izquierda a derecha. Para V_1 notamos que z se moverá entre la esfera, $\sqrt{1-r^2}$, y el cono mayor $z = \sqrt{3}r$. En este intervalo r se moverá desde la intersección de la esfera y el cono menor, la cual se da en

$$\sqrt{1-r^2} = r \to r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y la intersección de la esfera con el cono mayor, la cual se da en

$$\sqrt{1-r^2} = \sqrt{3}r \to r = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$V_1 = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{3}\cdot r} \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Análogamente,

$$V_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}/2}^{2/\sqrt{3}} \int_{r}^{\sqrt{3}\cdot r} \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

y finalmente:

$$V_3 = \int_0^{2\pi} \int_{2/\sqrt{3}}^{2} \int_{r}^{2} \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Observe que las últimas dos integrales son en extremo sencillas de calcular pues la integración es directa. Para la segunda se requiere identificar la primitiva de $\sqrt{1-r^2}$. En este caso, se puede realizar la sustitución $r = \operatorname{sen}\theta \to \mathrm{d}r = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ con lo cual se alcanza con facilidad lo pedido.

Los cálculos en detalle de estas integrales debiesen dominarse desde los primeros cursos de cálculo, por lo cual el detalle se deja propuesto al lector. Finalmente,

$$\boxed{V = V_1 + V_2 + V_3 = 2\pi\left[\frac{8}{9} - \frac{1}{6}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right]}$$

Nota: Para el lector que desee hacer una revisión adicional, el mismo volumen puede calcularse en coordenadas esféricas como:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_1^{2/\cos\varphi} r^2\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

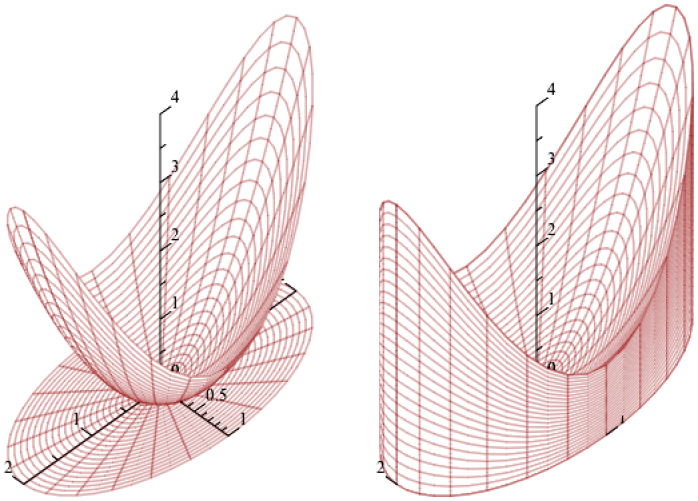
generando así el mismo resultado.

[a] Si bien pueden generarse cálculos más sencillos con simetría esférica, el planteamiento no es tan evidente como en este caso.

Problema 3.38 Calcule el volumen del sólido que está determinado por el plano xy y las superficies $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + 4y^2 = 4$.

Solución:

Partimos en primer lugar preguntándonos: ¿a qué corresponde el sólido? Dado que $z = x^2 + y^2$ corresponde a un paraboloide, y $x^2 + 4y^2 = 4$ a una elipse en el plano xy con libertad en z, entonces el sólido puede verse como:



Si bien integrarlo directamente en cartesianas siguiendo las ideas anteriores no es imposible, no se recomienda pensando en el hecho de que se puede utilizar una sustitución *polar* adecuada: sea:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta)/2 \\ z &= z \end{aligned}$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, 2]$ nos ubicaremos en la elipse[a]. El paraboloide se obtiene de reemplazar con estas coordenadas. Luego,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \dfrac{\mathrm{sen}(\theta)}{2} & \dfrac{r\cos(\theta)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{r}{2}$$

La coordenada z se moverá entre el plano xy y el paraboloide, i.e. $z = r^2\cos^2(\theta) + r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)/4$. De esta forma,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2\cos^2(\theta)+r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)/4} \frac{r}{2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos^2(\theta) + \frac{r^3}{4}\,\mathrm{sen}^2(\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2^4}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \frac{2^4}{16}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right] \\ &= \frac{1}{2}[4\pi + \pi] \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{V = \frac{5\pi}{2}}$$

[a] Otra sustitución que entrega el mismo resultado es $x = 2r\cos(\theta)$, $y = r\cos(\theta)$, $z = z$ con r entre 0 y 1 y t entre 0 y 2π.

Problema 3.39 Sea Ω la región interior al sólido limitado por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad a,b,c>0$$

Calcule

$$\iiint_{\Omega}\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\right]^{3/2}\mathrm{d}V.$$

Solución:

Observe que estamos integrando un elipsoide con una simetría similar en la función de integración, por lo que se puede utilizar integración en coordenadas cilíndricas, haciendo la modificación respectiva para dejar simétricos los ejes.

En efecto, hacemos:

$$\begin{cases} x &= au \\ y &= bv \\ z &= cw \end{cases} \rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc>0$$

Entonces la región se convierte a $u^2+v^2+w^2=1$ y la integral se reescribe como:

$$\iiint_{\Omega}\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\right]^{3/2}\mathrm{d}V=abc\iiint_{\Omega'}\left[1-u^2-v^2-w^2\right]^{3/2}\mathrm{d}V$$

Nota: Es muy tentador cotejar la restricción del sólido con la función y pensar que la integral tiene valor 0, pero esto **no es así**, puesto que esto solo ocurre en la frontera, no en el interior del sólido, donde $u^2+v^2+w^2\leq 1$.

Ahora bien, se hace evidente utilizar la simetría esférica, de modo que $u^2+v^2+w^2=r^2$ con $r\in[0,1]$, $\theta\in[0,\pi]$ y $\varphi\in[0,2\pi]$. Haciendo $\mathrm{d}V=r^2\operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ se tendrá entonces la integral:

$$\begin{aligned} I &= abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\left(1-r^2\right)^{3/2}r^2\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi abc\underbrace{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta}_{2}\int_0^1 r^2\left(1-r^2\right)^{3/2}\mathrm{d}r \end{aligned}$$

Dado que no es evidente la aparición de una función y su derivada, hacemos $r=\operatorname{sen}t\rightarrow \mathrm{d}r=$

$\cos t\,\mathrm{d}t$, con lo cual la segunda integral queda:

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^2\left(1-r^2\right)^{3/2}\mathrm{d}r &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\,\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)^{3/2}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,\operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Notar que se omitió el módulo en el coseno pues este es positivo en el intervalo de integración. Luego, si bien se puede integrar mediante los métodos aprendidos en Cálculo I, esto resulta en extremo tedioso, por lo cual podemos hacer uso de lo ya estudiado de la función Beta:

$$\mathrm{B}\left(x,y\right)=\int_0^1 t^{x-1}\left(1-t\right)^{y-1}\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\left(\theta\right)\operatorname{sen}^{2y-1}\left(\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

Entonces,

$$\int_0^1 r^2\left(1-r^2\right)^{3/2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(4\right)}$$

Evaluando la función Gamma:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma\left(4\right)=3!=6$$

Es decir,

$$\int_0^1 r^2\left(1-r^2\right)^{3/2}\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{96}$$

Entonces,

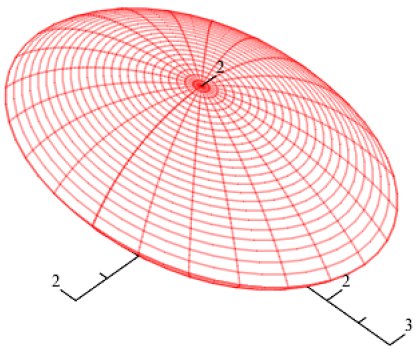
$$\boxed{I=4\pi abc\frac{3\pi}{96}=\frac{\pi^2}{8}abc}$$

Problema 3.40 Calcule el volumen del sólido limitado por:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{\left(z-2\right)^2}{4}=1$$

Solución:

El volumen se puede imaginar como la intersección de dos elipsoides del mismo factor de forma, pero a distancia de dos unidades en el eje z entre ellas. En efecto, el sólido corresponde a:



Como primera aproximación, podemos dejar todos los ejes simétricos haciendo la sustitución

$$\begin{cases} x &= 2u \\ y &= 3v \\ z &= 2w \end{cases} \rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

Es decir,

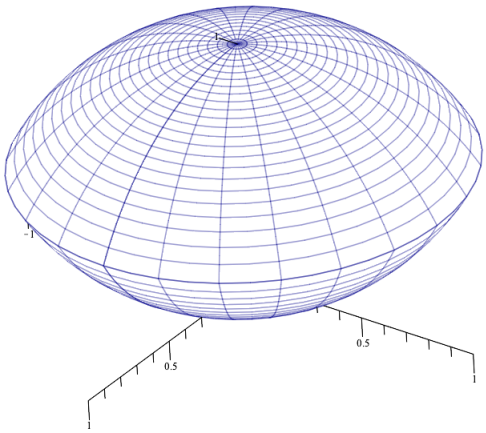
$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = 12 \iiint_{\Omega'} \mathrm{d}V$$

y las condiciones se convierten a:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

$$u^2 + v^2 + \frac{(2w-2)^2}{4} = 1 \rightarrow u^2 + v^2 + (w-1)^2 = 1$$

Ahora la región corresponde a dos esferas del mismo radio desplazadas. En efecto, la región corresponde ahora a la siguiente gráfica:



Observe que existe una simetría en la región, no tan evidente: ambas superficies se intersectan en una circunferencia, desde la cual sí podemos integrar con relativa facilidad. En efecto, esta circunferencia se encuentra a altura determinada por la resta de ambas ecuaciones:

$$w^2 - (w-1)^2 = 0 \to (w - w + 1)(2w - 1) = 0 \to \boxed{w = \frac{1}{2}}$$

La circunferencia generada a esta altura es $u^2 + v^2 + \frac{1}{4} = 1 \to u^2 + v^2 = \frac{3}{4}$.

Se sigue que podemos usar coordenadas cilíndricas, donde $r \in \left[0, \sqrt{3}/2\right]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y la coordenada w se puede obtener de las regiones de integración: para la esfera superior tomamos la parte inferior del manto. Es decir,

$$w_1 = 1 - \sqrt{1 - u^2 - v^2} = 1 - \sqrt{1 - r^2}$$

Para el otro extremo tomamos la parte superior de la superficie, i.e.

$$w_2 = \sqrt{1 - r^2}$$

Notando que $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}w$ entonces la región de integración se convierte a:

$$\begin{aligned} V &= 12 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,\mathrm{d}w\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 24\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} r\left(2\sqrt{1-r^2} - 1\right)\mathrm{d}r \\ &= 24\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} 2r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r - 24\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} r\,\mathrm{d}r \end{aligned}$$

Para la primera integral hacemos simplemente $t = 1 - r^2 \to \mathrm{d}t = -2r\,\mathrm{d}r$ y la otra se obtiene prácticamente por integración directa.

$$V = 24\pi \int_{1/4}^{1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t - 9\pi = \frac{48\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) - 9\pi$$

Es decir,

$$\boxed{V = 14\pi - 9\pi = 5\pi}$$

Problema 3.41 Considere el sólido Ω limitado por $a^2x^2+b^2y^2=1$ y $0 \leq z \leq 1$ y la superficie $\mathcal{S}$ dada por $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$. Sean V_1 el volumen bajo $\mathcal{S}$ e interior a Ω y V_2 el volumen sobre $\mathcal{S}$ e interior a Ω.

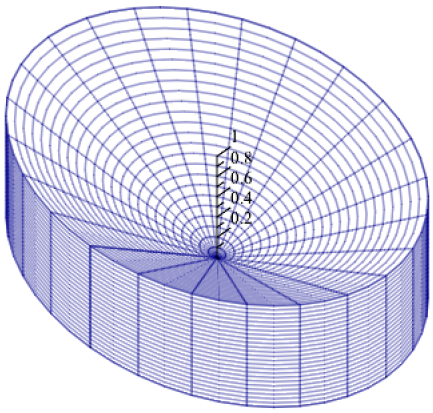
Demuestre que V_1/V_2 no depende de a ni de b.

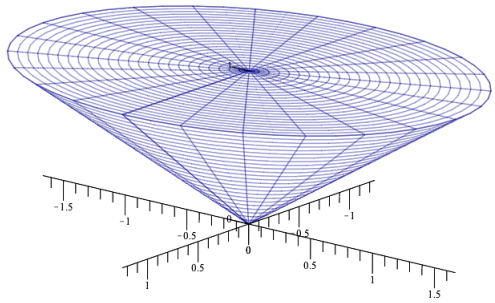
Solución:

Nuevamente, al igual que en todos los demás problemas, partimos identificando las regiones y superficies involucradas.

- Ω corresponde a un cilindro de forma elíptica, dado por la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ en el plano xy y con libertad para moverse entre $z = 0$ y $z = 1$.
- $\mathcal{S}$ corresponde a un cono de la misma forma elíptica descrita en Ω con simetría en el plano xy. En efecto, se puede ver claramente cómo esta superficie *corta* en dos a Ω. Lo que se nos pide demostrar es que el cociente entre dichos volúmenes es invariante a a y b.

Graficando cada uno de los volúmenes respectivos:





Para integrar en ambos casos dada la simetría, podemos utilizar coordenadas cilíndricas (dado que no hay simetría radial en la coordenada z, descartamos esféricas). Podemos hacer, por ejemplo, para cumplir con la elipse:

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{a}\cos(\theta) \\ y &= \frac{r}{b}\operatorname{sen}(\theta) \\ z &= z \end{aligned}$$

con $r \in [0,1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ para cumplir así lo pedido. Calculando el jacobiano respectivo:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \frac{r}{ab}$$

Para V_1 integramos entre $z = 0$ y el cono $z = \sqrt{a^2x^2 + by^2} = r$ asumiendo $z \geq 0$ y la sustitución realizada. Luego,

$$V_1 = \frac{1}{ab}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^r r \, \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

Análogamente, para V_1 la coordenada z se mueve entre el cono $z = r$ y $z = 1$, con lo cual:

$$V_2 = \frac{1}{ab}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 r \, \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

Observe que las integrales no dependen de a ni de b, solo aparecen los factores ponderadores respectivos del jacobiano. Luego, es evidente que V_1/V_2 cancelará los términos $1/ab$, con lo cual se cumplirá inmediatamente lo pedido, sin siquiera tener la necesidad de calcular las integrales respectivas. ■

Adicionalmente, no solo podemos utilizar estas simetrías, si no que a veces puede ser útil detectar una sustitución que simplifique en demasía los cálculos. Revisemos el siguiente ejemplo:

Problema 3.42 Encuentre el volumen de la región encerrada por el plano $z = 4$ y la superficie

$$z = (2x - y)^2 + (x + y - 1)^2$$

Solución:

Observe que incluso intentar escribir la integral iterada es complicado dado que no podemos imaginar de forma sencilla cómo se grafica la forma cuadrática dada en el enunciado. Para deshacernos de este problema, hagamos:

$$u = 2x - y \quad ; \quad v = x + y - 1 \quad ; \quad z = z$$

Haciendo esto la restricción $z = 4$ se conserva, pero la segunda restricción se convierte a $z = u^2 + v^2$[a].

De aquí se sigue que podemos integrar en el plano uv, obteniendo que la región en uv es simplemente $u^2 + v^2 = 4$ (la intersección del plano con el paraboloide). La componente z se moverá de $u^2 + v^2$ hasta 4. Antes de integrar, calculamos el diferencial:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, z)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}z$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial(u, v, z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, z)}\right| = \frac{1}{3}$$

Sin embargo, dada la simetría radial de uv en el paraboloide, podemos hacer inmediatamente la conversión a coordenadas cilíndricas (lo cual inclusive pudo haberse hecho en el mismo paso anterior). Es decir,

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^2 4r - r^3\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi}{3}\left(16 - \frac{16}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{V = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3 \cdot 16}{4} = 8\pi}$$

[a]En efecto, la segunda restricción es un paraboloide rotado que genera un sólido cuya tapa es $z = 4$. Al hacer esta sustitución lo único que estamos haciendo es trasladar, rotar y reescalar el paraboloide, lo cual son en la práctica solamente transformaciones lineales.

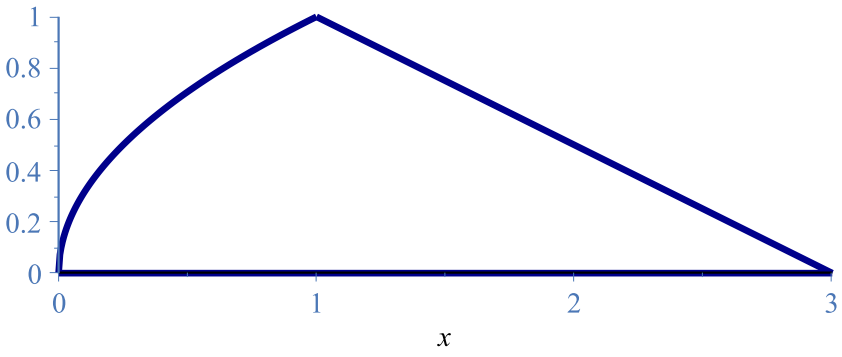
Problema 3.43 Calcule el volumen de la figura delimitada superiormente por el plano $3x + 4y + 2z = 12$ e inferiormente por la región $\mathcal{R}$ en el plano xy que tiene por bordes las curvas $y = 0$, $y^2 = x$ y $x + 2y = 3$.

Solución:

Partimos graficando la región en el plano xy, identificando cada una de las curvas:

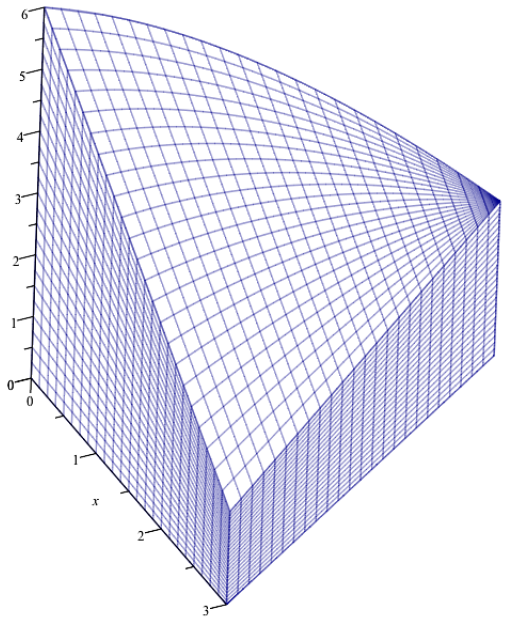
- $y = 0 \to$ recta horizontal (eje x).
- $y^2 = x \to$ parábola horizontal. Asume en este caso la forma $y = \sqrt{x}$.
- $x + 2y = 3 \to$ recta de pendiente $-1/2$.

Es decir, la región viene dada por:



Nota: Más de alguien puede preguntarse: ¿por qué no la región de abajo? En este caso, dado que el plano xy y el señalado en el enunciado deben engendrar un sólido con estas regiones planas en el plano xy, esto es lo que debemos verficar. Dado que el plano $3x + 4y + 3z = 12$ corta al plano xy en la recta $3x + 4y = 12$ y esta vez corta a su región de más abajo, debemos descartar esta, por lo cual la región es efectiva y exclusivamente la primera.

El plano mencionado es un plano de normal $3x + 4y + 2z = 12$, el cual nos permite delimitar la componente z. Considerando que la otra componente es el plano $xy - z = 0-$, entonces el sólido puede verse como:



De esta forma, incluso sin poder imaginarse el plano superior es fácil escribir la integral en la coordenada z. Dada la región en el plano xy, podemos integrar primero en x y luego en y para no tener que escribir dos integrales. Es decir,

$$V = \int_0^1 \int_{y^2}^{3-2y} \int_0^{\frac{12-3x-4y}{2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Esta integral puede ser obtenida por cálculo directo a partir de la región polinomial. De esta forma,

$$\boxed{V = \frac{86}{15}}$$

Ya revisamos en los problemas anteriores una aplicación evidente de las integrales triples: el cálculo de volúmenes de regiones más generales. Sin embargo, también tienen su aplicación en el cálculo de masas y centros de masas, al igual que en las integrales dobles.

El planteamiento de este tipo de problemas está más que estudiado desde Cálculo II, por lo cual se aconseja revisarlo y siempre partir usando las expresiones simbólicas de los diferenciales de masa y momentos para calcular luego la integral completa. Es decir,

$\mathrm{d}m = \rho\,(x, y, z)\ \mathrm{d}V$, $\quad \rho$ es la densidad, $\mathrm{d}V$ el diferencial de volumen (depende de coordenadas)

$$\mathrm{d}M_{xy} = z\,\mathrm{d}m = z\rho\,(x, y, z)\ \mathrm{d}V$$

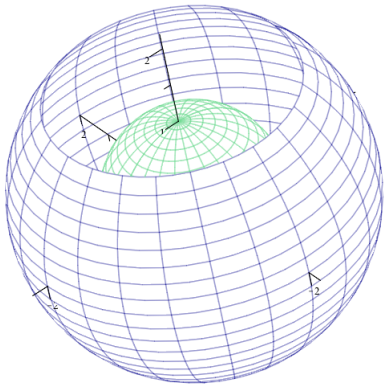
Problema 3.44 Calcule la posición del centro de masa:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, z \leq \sqrt{2}\right\}$$

suponiendo que ρ es constante.

Solución:

Partimos graficando la región. Corresponde al volumen encerrado entre casquetes esféricos a los cuales se les recorta la parte superior, $z > 2$:



Observe que dada la simetría de la región se puede concluir inmediatamente que:

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

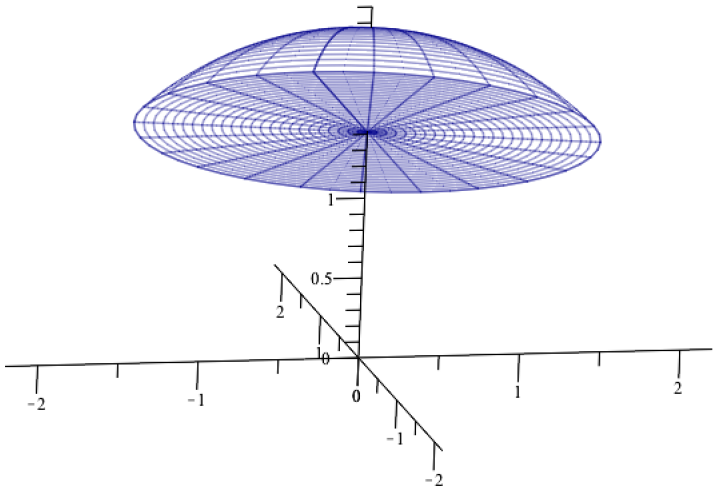
ya que las integrales de los momentos respectivos de anularán. Lamentablemente, $\bar{z}$ no correrá la misma suerte ya que no se conserva la simetría. En este caso,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V}$$

Al escribir la integral de la región explícita, podemos notar que la integración no será del todo sencilla ya que habrá un cambio en la definición del extremo z (o r en cilíndricas) y esto generará dos integrales. Si bien es posible realizar el cálculo, lo cual resultará tedioso, podemos notar que si bien los centroides no son aditivos, **los momentos sí lo son**. De modo que,

$$M_{xy} = M_{xy_e} - M_{xy_s}$$

donde el primer momento corresponde al de la esfera completa y M_{xy_e}al de la parte superior. El primer momento es evidentemente 0 por la simetría de la función (bajo el mismo argumento anterior) y M_{xy_e} corresponde al momento de la rebanada superior, el cual resulta más sencillo de escribir como integral. Es decir, ahora estamos integrando un sólido como el siguiente:



Dada la evidente simetría esférica, utilizaremos coordenadas esféricas. Usando $\varphi \in [0, 2\pi]$ y $\theta \in [0, \pi]$ tenemos que:

$$\mathrm{d}V = r^2 \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

En este caso, es evidente que $\varphi \in [0, 2\pi]$ pues existe simetría en el plano xy. Ahora bien,

$$z > \sqrt{2} \to r\cos\theta > \sqrt{2}$$

Como θ en este rango de ángulos de la rebanada genera cosenos positivos, y no nulos entonces escribimos:

$$r > \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta} \to \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta} \leq r \leq 2$$

donde r es la parte superior de la esfera. Análogamente, θ partirá en cero y llegará a la intersección con $z = \sqrt{2}$ en la capa exterior. Es decir,

$$2\cos\theta = \sqrt{2} \to \theta = \frac{\pi}{4}$$

donde nos quedamos con $\pi/4$ ya que es la única solución que nos sirve en el intervalo. De esta forma,

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_{\Omega'} z \, \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{2}/\cos\theta}^{2} r^3 \cos\theta \, \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi}{4} \int_0^{\pi/4} \cos\theta \, \operatorname{sen}\theta \left(16 - \frac{4}{\cos^4\theta}\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left(16 \underbrace{\int_0^{\pi/4} \cos\theta \, \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta}_{(1)} - 4 \underbrace{\int_0^{\pi/4} \tan\theta \, \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta}_{(2)} \right) \end{aligned}$$

La primera integral se calcula notando que $\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$ y la segunda haciendo $u = \tan\theta \to \mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$. De esta forma,

$$M_{xy} = \pi$$

Análogamente,

$$V = V_e - V_s$$

donde V_e es evidentemente la resta de los volúmenes de las esferas $\frac{4\pi}{3}\left(2^3 - 1\right) = \frac{28\pi}{3}$.

De forma análoga,

$$\begin{aligned} V_s &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_{\sqrt{2}/\cos\theta}^{2} r^2 \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\left(8 - \frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\right)\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3}\left(8\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta - 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\tan\theta\,\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \end{aligned}$$

La primera integral se evalúa directamente y para la segunda se emplea la misma sustitución sugerida para la parte anterior. De esta forma,

$$V_s = \frac{2\pi}{3}\left(8 - 5\sqrt{2}\right)$$

Observación: También era válido (y de hecho un poco más sencillo) hacer coordenadas cilíndricas dada la aparición del extremo en z. En efecto,

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4-r^2}} rz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi$$

$$V_s = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}\left(8 - 5\sqrt{2}\right)$$

Observe que con este sistema de coordenadas simplificamos la primera integral en desmedro de la segunda.

De esta forma,

$$\bar{z} = \frac{0 - M_{xy_s}}{\frac{28\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\left(8 - 5\sqrt{2}\right)} = \frac{-1}{\frac{28}{3} - \frac{16}{3} + \frac{10}{3}\sqrt{2}}$$

Finalmente, las coordenadas del centro de masa simplificadas son:

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, -\frac{3}{12 + 10\sqrt{2}}\right)}$$

Problema 3.45 Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de puntos en el espacio tales que:

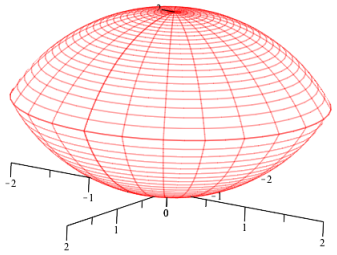
$$x^2+y^2+z^2 \leq 4 \quad \text{y} \quad x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4$$

Calcular la masa de $\mathcal{R}$ si la densidad de masa en cada punto es

$$\rho\left(x,y,z\right)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Solución:

¿Qué sólido $\mathcal{R}$ caracterizan las desigualdades anteriormente mencionadas? La primera desigualdad delimita el **interior** es una esfera de radio 2 centrada en el origen. La segunda desigualdad indica el **interior** de una esfera de radio 2 centrada en $(0,0,2)$, luego es fácil imaginar el sólido como sigue a continuación:



Sirven los que se encuentran dentro de la primera esfera, pero al exclusivamente al exterior de la segunda, razón por la cual debe ser la intersección de ambos elementos.

Al igual que en la pregunta anterior, observamos simetría en el eje x y eje y tanto en la región como en la función a integrar, razón por la cual inmediatamente deducimos que:

$$\bar{x}=0 \quad \text{y} \quad \bar{y}=0$$

Sin embargo, para la coordenada z lamentablemente tendremos que realizar integración. Observe que esta intersección de ambas superficies esféricas se obtiene en:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x^2+y^2+(z-2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\rightarrow z^2-(z-2)^2=0 \rightarrow 2\left(2z-2\right)=0 \rightarrow z=1$$

En dicho punto ambas esferas generan una curva caracterizada por una circunferencia. En efecto, dicha circunferencia corresponde a $x^2+y^2=\sqrt{3}$. Es evidente que en este plano se, $z=1$, se

genera simetría radial, por lo cual lo más cómodo puede resultar en realizar una integración en coordenadas cilíndricas a partir de este.

En efecto, si hacemos $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, entonces $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in \left[0, \sqrt{3}\right]$ y despejando z de ambas superficies esféricas con esta sustitución, z se moverá desde la segunda circunferencia ,$z = 2 - \sqrt{4 - r^2}$, hasta la primera, $z = \sqrt{4 - r^2}$. Luego, integrando, y notando que la densidad se convierte a

$$\rho = \frac{1}{r^2 + z^2},$$

entonces la integral para la masa se escribe como:

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \frac{r}{r^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4-r^2}}{r}\right) - \arctan\left(\frac{2-\sqrt{4-r^2}}{r}\right)\mathrm{d}r$$

y para el momento como:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \frac{zr}{r^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r}{2}\int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \frac{2z}{r^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Haciendo $u = 2z$ la integral es muy sencilla de calcular pues la primitiva es casi directa de obtener. En efecto:

$$M_{xy} = \pi\int_0^{\sqrt{3}} r\log\left|\frac{r^2+4-r^2}{r^2+4-4\sqrt{4-r^2}+4-r^2}\right|\mathrm{d}r = -\pi\int_0^{\sqrt{3}} r\log\left(2-\sqrt{4-r^2}\right)\mathrm{d}r$$

Haciendo $u = r$ se puede calcular la integral anterior, obteniendo así:

$$\boxed{M_{xy} = \frac{7}{4}\pi}$$

Problema 3.46 Calcule la masa del solido Ω determinado por las inecuaciones:

$$1 \le x^2 - y^2 \le 4 \quad ; \quad 1 \le xy \le 3 \quad ; \quad x^2 + y^2 \le z \le 2\left(x^2 + y^2\right)$$

si la densidad viene dada por $\rho(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^4 - y^4}$.

Solución:

En otras palabras, tenemos que calcular:

$$\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^4 - y^4} \mathrm{d}V$$

Evidentemente tal cual como están las expresiones, puede resultar difícil, si es que no imposible, realizar los cálculos. Por lo tanto, tenemos que escoger con muchas astucia una sustitución pertinente para poder calcular la integral de forma sencilla.

Observemos con detención las expresiones tanto de la región como de la densidad. Notemos que:

$$\frac{xyz}{x^4 - y^4} = \frac{xyz}{\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)}$$

Son expresiones recurrentes xy, $x^2 - y^2$ y, aunque no tan evidente, $z/x^2 + y^2$ pues aparece tanto en la densidad como expresado indirectamente en la tercera restricción de la región. Proponemos entonces el cambio de variables:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= xy, \\ w &= \frac{z}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

Calculamos el jacobiano de la sustitución, obteniendo así mediante el procedimiento de derivación que:

$$\frac{\partial\left(u, v, w\right)}{\partial\left(x, y, z\right)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ -\dfrac{2xz}{\left(x^2 + y^2\right)^2} & -\dfrac{2yz}{\left(x^2 + y^2\right)^2} & \dfrac{1}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = 2$$

Las regiones se convierten en:

$$1 \leq x^2 - y^2 \leq 4 \longrightarrow 1 \leq u \leq 4$$

$$1 \leq xy \leq 3 \longrightarrow 1 \leq v \leq 3$$

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2\left(x^2 + y^2\right) \longrightarrow 1 \leq w \leq 2$$

En otras palabras,

$$\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^4 - y^4} \mathrm{d}V = \int_1^4 \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{vw}{u} \mathrm{d}w \mathrm{d}v \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \left(\int_1^4 \frac{\mathrm{d}u}{u} \right) \left(\int_1^3 v \, \mathrm{d}v \right) \left(\int_1^2 w \, \mathrm{d}w \right)$$

Evaluando cada una de las primitivas, concluimos que:

$$\boxed{\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^4 - y^4} \mathrm{d}V = 6 \log 2}$$

Problema 3.47 Se considera el sólido Ω descrito por:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \in [0,1]\,,\, x^2+y^2-2x\,(1-z) \leq 0\right\}$$

Asumiendo que la distribución de masa dentro de S es tal que $\mu\,(x,y,z) = 1-z$, determine:

(a) la masa de Ω.

(b) la ubicación del centro de masa de Ω.

Solución:

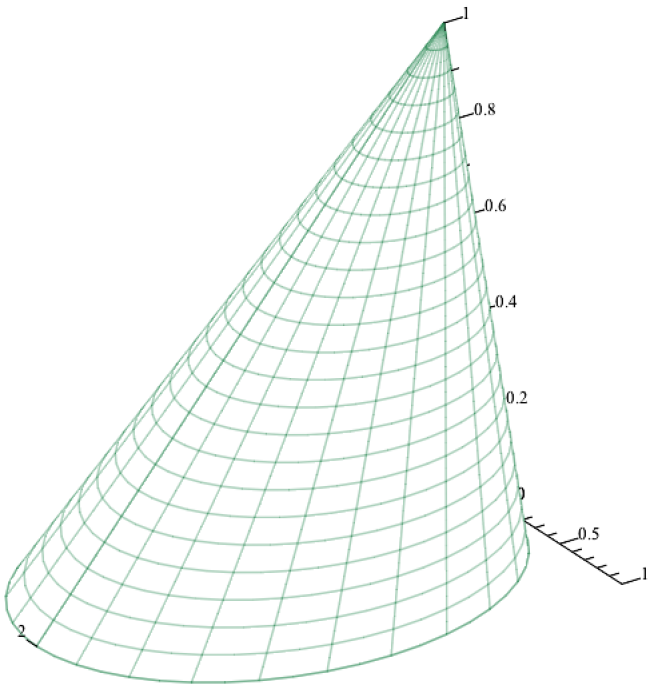
Como siempre, tratamos de imaginarnos Ω. En este caso, no resulta para nada sencillo. Sin embargo, dado que tenemos clara libertad para mover z en $[0,1]$, hagamos un corte para un z fijo, luego podemos completar cuadrados y notar que:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x\,(1-z) &= x^2-2x\,(1-z)+(1-z)^2-(1-z)^2+y^2 \\ &= [x-(1-z)]^2+y^2-(1-z)^2 \end{aligned}$$

Es decir, la restricción es equivalente a que:

$$[x-(1-z)]^2+y^2 \leq (1-z)^2$$

Se sigue que para z fijo, cortando el sólido en dicho plano generamos una circunferencia de radio y centro $(1-z)$. Al aumentar z, irá disminuyendo el radio y el desplazamiento de la circunferencia, con lo cual se genera una especie de "cono en diagonal" como el siguiente:



¿Cómo integramos este sólido? Es evidente que la última variable a integrar será z, y luego vamos integrando corte a corte en los planos paralelos al xy.

(a) Sabemos que:

$$\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}V \to m = \iiint_{\Omega} \mu\,\mathrm{d}V$$

Integrando en z y siguiendo la idea de los cortes, podemos notar que puede resultar muy práctico escribir la integral de la siguiente forma:

$$m = \int_0^1 \left(\iint_{\mathcal{S}(z)} \mu\,\mathrm{d}A \right) \mathrm{d}z$$

Observe que cada una de estas áreas corresponde a una circunferencia, razón por la cual podemos realizar la integración en coordenadas polares, haciendo en este caso:

$$\begin{aligned} x - (1-z) &= r\cos(\theta) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{aligned}$$

con r entre 0 y $1-z$ y θ entre 0 y 2π. El diferencial de área sigue siendo el polar, i.e. $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Con esto,

$$\iint_{\mathcal{S}(z)} \mu\,\mathrm{d}A = \mu \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi\,(1-z)^3$$

De esta forma,

$$\boxed{m = \pi \int_0^1 (1-z)^3 \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}}$$

(b) Procedemos de forma análoga al paso anterior, pero ahora integrando con más cautela. Dado que el cono tiene una forma diagonal, solo podemos detectar una simetría en el eje y con $\bar{y} = 0$, no así en el eje z y en el eje x, donde deberemos calcular las integrales.

En primer lugar,

$$\mathrm{d}M_{xy} = \mu z \, \mathrm{d}V$$

Es decir,

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^1 \left(\iint_{\mathcal{S}(z)} \mu z \, \mathrm{d}A \right) \mathrm{d}z = \pi \int_0^1 z \, (1-z)^3 \, \mathrm{d}z \\ &= \pi \mathrm{B}\,(2,4) = \pi \frac{\Gamma\,(2)\,\Gamma\,(4)}{\Gamma\,(6)} \\ &= \pi \frac{1! \times 3!}{5!} \end{aligned}$$

Se resolvió haciendo uso de las funciones Beta y Gamma (ver problemas sobre integrales dobles respecto al tema). Es posible realizar los mismos cálculos con lo aprendido en cálculo de una variable, pero resulta significativamente más tedioso. Entonces,

$$M_{xy} = \frac{\pi}{20} \to \boxed{\bar{z} = \frac{1}{5}}$$

Ahora calculamos para la coordenada x:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \int_0^1 \left(\iint_{\mathcal{S}(z)} \mu x \, \mathrm{d}A \right) = \int_0^1 \left[\mu \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} r^2 \cos(\theta) + r\,(1-z) \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 (1-z) \left[\int_0^{2\pi} \frac{(1-z)^3}{3} \cancel{\cos(\theta)} + \frac{(1-z)^3}{2} \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}z \\ &= \pi \int_0^1 (1-z)^4 \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{4}{5}$$

Finalmente, las coordenadas del centroide vienen dadas por:

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{5}\,(4, 0, 1)}$$

Propuesto Calcule el volumen encerrado entre el elipsoide y cono de ecuaciones respectivas:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

3.3. Integrales $n-$múltiples $(*)$

En esta sección opcional revisaremos brevemente las integrales para un orden de integración superior a 3. Muchas veces, principalmente como divertimento matemático, se tratan las integrales $n-$ésimas en su forma general, lo cual requiere la aplicación de principios de inducción o bien un tratamiento muy acabado de sucesiones y expresiones generales, lo cual complica de sobremanera estos problemas.

Partamos revisando algunos problemas sencillos para comprender la idea:

Problema 3.49 Calcule el valor promedio del producto de cuatro números si cada uno de estos varía en el intervalo $[0,1]$.

Solución:

Por calcular la integral:

$$I=\frac{1}{1}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyzw\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w=\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\right)\left(\int_0^1 w\,\mathrm{d}w\right)$$

Es decir,

$$I=\frac{1}{16}$$

En general, para el promedio de los n números se tiene que:

$$\boxed{I_n=\frac{1}{2^n}} \quad n\geq 1$$

Problema 3.50 Calcule el volumen del rectángulo en $\mathbb{R}^n$: $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$. Utilice integración directa.

Solución:

La integral directa es:

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\ &= \prod_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\mathrm{d}x_k \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{V_n = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)}$$

Los problemas anteriores resultan sencillos como calentamiento. Sin embargo, basta notar que la dificultad puede aumentar significativamente al intentar calcular algo como el volumen de una esfera.

Problema 3.51 Demuestre que el volumen de una esfera en $\mathbb{R}^n$ de radio unitario viene dada por:

$$V_n = \frac{2\pi}{n}\prod_{k=2}^{n-2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^k\varphi\mathrm{d}\varphi$$

Propuesto: Demuestre que V_n satisface la relación de recursión:

$$V_n = \frac{n-1}{n}V_{n-1}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^{n-2}\varphi\mathrm{d}\varphi \quad n \geq 2$$

Solución:

Para la conversión $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (r, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_2 &= r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\operatorname{sen}\theta_{n-1} \\ x_3 &= r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2} \\ &\vdots \\ x_k &= r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-(k-2)}\cos\theta_{n-(k-1)} \\ &\vdots \\ x_n &= r\cos\theta_1 \end{aligned}$$

Esto se puede demostrar de forma inductiva sin mayor dificultad. Se tiene entonces que:

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\operatorname{sen}\theta_{n-1} & \cdots & -r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\operatorname{sen}\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\operatorname{sen}\theta_{n-1} & \cdots & r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ \vdots & & & \\ \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-(k-2)}\cos\theta_{n-(k-1)} & r\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-(k-2)}\cos\theta_{n-(k-1)} & \cdots & -r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-(k-2)}\operatorname{sen}\theta_{n-(k-1)} \\ \vdots & & & \\ \cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Se puede entonces demostrar, nuevamente mediante argumentos inductivos, que:

$$\frac{\partial\left(x_1,\ldots,x_n\right)}{\partial\left(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}\right)} = r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-2}\operatorname{sen}^k\theta_k$$

Por calcular:

$$\begin{aligned} V_n &= \underset{\Omega_n}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_0^1\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}}_{k-2\ \text{veces}}\left(r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-2}\operatorname{sen}^k\theta_k\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} \\ &= \left(\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\right)\prod_{k=2}^{n-2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^k\theta_k\mathrm{d}\theta_k \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{V_n = \frac{2\pi}{n}\prod_{k=2}^{n-2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^k\theta_k\mathrm{d}\theta_k}\quad\blacksquare$$

Hecha la pregunta anterior, resulta entretenido realizar la siguiente, aplicando los conocimientos adquiridos sobre las funciones Beta y Gamma:

Propuesto [**Propuesto**] En este ejercicio demostraremos que el volumen de una esfera $n-$dimensional también puede escribirse como:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Indicación: Si usted ya estudió las propiedades de la función Beta y Gamma en el problema anterior respectivo, parta entonces demostrando que:

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^k x\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$$

y con ello concluya lo pedido.

4. Integrales de línea

4.1. Integrales de línea para funciones escalares y vectoriales

Ya hemos estudiado integrales sobre funciones escalares. Lo que ahora estudiaremos son integrales que asocian a curvas en el espacio un escalar específico. Estas se conocen como integrales de línea.

En esta sección y las venideras se requiere un conocimiento muy acabado de las definiciones, teoremas e hipótesis, ya que solo con ellas se puede resolver los problemas de la forma adecuado. Por esta razón es que partiremos revisando algunos conceptos de curvas.

Repaso de conceptos de curvas

En primer lugar revisamos las definiciones básicas de curvas, ya estudiadas en Cálculo II:

Definición 1:

- Se define una *curva* como un conjunto unidimensional en $\mathbb{R}^n$ que se ve representado por una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ denominada *parametrización*.
- Sea Γ una curva y $\vec{\lambda}$ su parametrización, entonces Γ es *continua* si existe una parametrización que lo sea.
- La curva Γ se dice *derivable* si existe una parametrización λ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{\lambda}(t+h) - \vec{\lambda}(t)}{h}$$

  existe para todo $t \in I$. Como es un conjunto con preimagen $\mathbb{R}$, entonces la curva asimismo es *diferenciable*.
- Sea $\vec{\lambda} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua, se define

$$\int_a^b \vec{\lambda}(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b \lambda_1(t)\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b \lambda_n(t)\mathrm{d}t\right) \tag{4.1}$$

Recordamos que prácticamente toda curva admite más de una parametrización, de hecho, infinitas (basta con recorrer la misma traza de la curva con distinta rapidez). Se dice por lo tanto que la curva es *reparametrizable*.

El siguiente concepto natural sobre trazas es obtener su medida característica: su longitud.

Definición 2: Sea Γ una curva en $\mathbb{R}^n$ con parametrización $\vec{\lambda}\,(t)$ diferenciable. Se define entonces la longitud de arco como:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2}$$

dado que $\mathrm{d}x_i = \lambda_i'(t)\,\mathrm{d}t$, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\vec{\lambda}'(t)\right\| \to s(t) = \int_a^t \left\|\vec{\lambda}'(t)\right\| \mathrm{d}t \tag{4.2}$$

Y recordamos finalmente algunas definiciones simbólicas:

Definición 3: Simbólicamente se define el vector tangente a la curva como:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = \vec{\lambda}'(t) \longrightarrow \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{\lambda}'(t)\,\mathrm{d}t$$

pero componente a componente se tiene que $\mathrm{d}x_i = \lambda_i(t)\,\mathrm{d}t$, con lo cual

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$$

Desde ahora utilizaremos estas representaciones de forma intensiva.

Agregaremos dos definiciones que permiten caracterizar geométricamente el comportamiento de la curva.

Definición 4:

- Se dice que una curva Γ es *simple* si para $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ (no necesariamente extremos) se tiene que $\vec{\lambda}(t_1) = \vec{\lambda}(t_2) \Rightarrow t_1 = a, t_2 = b$. Es decir, se evita que la curva se intersecte a si misma.
- Se dice que una curva Γ es *cerrada* si $\vec{\lambda}(a) = \vec{\lambda}(b)$ (el punto inicial de la traza es igual al punto final). En dicho caso, utilizamos la notación:

$$\int_\Gamma \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_\Gamma \mathrm{d}\vec{\ell} \tag{4.3}$$

Definición 5: Sea Γ una curva de Jordan (simple y cerrada) suave a tramos. Por lo tanto, por el Teorema de la Curva de Jordan, sabemos que encerrará una región que denominaremos $\mathcal{R}$. Se dice que:

- Γ tiene *orientación positiva* si recorre siempre en el sentido contrarreloj. Es decir, $\mathcal{R}$ está a la izquierda del vector tangente T cuando se recorre la frontera de la región.
- Γ tiene *orientación negativa* en caso contrario.

Si Γ tiene orientación positiva, entonces se usa la notación $-\Gamma$ para indicar que tiene orientación negativa.

Complementamos estos conceptos con una última definición acerca de las regiones que delimitan las curvas:

Definición 6:

- Sea $D \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que D es *conexa* si para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ en D existe una curva $\Gamma \subseteq D$ tal que $\vec{\lambda}(t_a) = \mathbf{x}$ y $\vec{\lambda}(t_b) = \mathbf{y}$. Es decir, existe una curva que los una.

- Se dice que D es *simplemente conexa* si es conexa y toda curva de Jordan en D sólo encierra puntos en D. Así, $B(0,1)\backslash\{0\}$ no es simplemente conexa.

Integración sobre campos escalares

El primer tipo de integrales de línea que estudiaremos son aquellas definidas sobre campos escalares.

Definición: Se define un *campo escala*r como una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A cada punto del espacio $\mathbb{R}^n$ se le asocia un valor escalar.

Considerando que esta función puede representar densidad de masa o carga, entre otras características, es de interés integrar cada elemento de la curva con el punto de la función asociado. Es decir, estamos sumando infinitos diferenciales de masa (o según corresponda al caso). Cada uno de estos elementos estará representado por la densidad y un diferencial de largo. Es decir, para una función $\rho(\mathbf{x})$;

$$\mathrm{d}m = \rho\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}s = \rho\left[\vec{\lambda}\left(t\right)\right]\left\|\vec{\lambda}'(t)\right\|\mathrm{d}t$$

Esto da lugar a la siguiente definición:

Definición: Sea $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva suave. Se define la *integral de línea* de f a lo largo de Γ como

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\left[\vec{\lambda}(t)\right]\left\|\vec{\lambda}'(t)\right\|\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

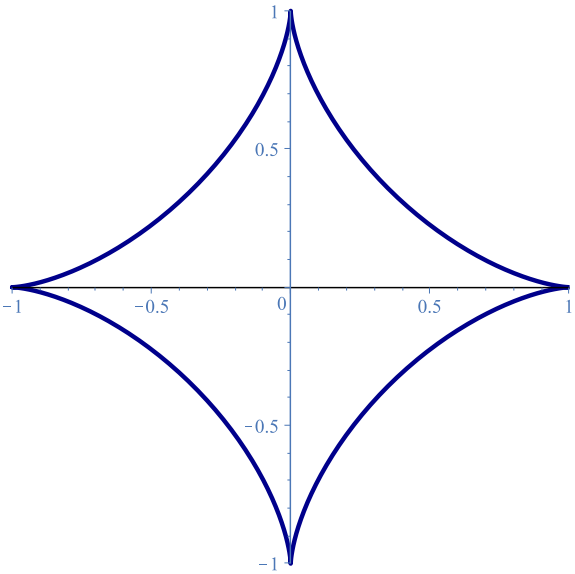
Con $\vec{\lambda}(t)$ parametrización cualquiera de de Γ.

Se puede demostrar que la integral anterior es independiente de la parametriación si esta es inyectiva. El procedimiento es análogo a demostrar que la longitud de arco es independiente de la parametrización.

Problema 4.1 Calcule la masa de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ si la densidad lineal de masa viene dada por $\rho\left(x, y\right) = 3y^2 - 2x$.

Solución:

Partamos reconociendo la curva: corresponde a un astroide, el cual puede graficarse como sigue:



Si bien la figura es simétrica, no debemos caer en la tentación de integrar solo un cuarto de ella, ya que el campo escalar es solo simétrico con respecto al eje x.

Dada la definición, lo primero que debemos hacer es parametrizar la curva. Si recordamos que

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

entonces basta hacer $x(t) = \cos^3 t$ e $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$ para cancelar la potencia $1/3$ y cumplir así con la parametrización y la condición de la curva. Entonces,

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix}\cos^3 t \\ \operatorname{sen}^3 t\end{pmatrix} \text{ con } t \in [0, 2\pi] \to \mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{pmatrix}-3\cos^2 t\, \operatorname{sen} t \\ 3\operatorname{sen}^2 t\, \cos t\end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

Es decir, $\mathrm{d}s = 3\sqrt{\cos^4 t\, \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\, \operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t = 3\,|\operatorname{sen} t\, \cos t|\,\mathrm{d}t$. Entonces,

$$\begin{aligned} I &= 3\int_0^{2\pi} \left(3\operatorname{sen}^6 t - 2\cos^3 t\right)|\operatorname{sen} t\, \cos t|\,\mathrm{d}t \\ &= 9\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^6 t\, |\operatorname{sen} t\, \cos t|\,\mathrm{d}t - 6\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, |\operatorname{sen} t\, \cos t|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Para la primera integral, cotejando los gráficos por separado de $\operatorname{sen}^6 t$ y $|\operatorname{sen} t\, \cos t|$ notamos que la primera tiene período π y la segunda período $\pi/2$. Dado que la función completa es positiva, hacemos:

$$9\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^6 t\, |\operatorname{sen} t\, \cos t|\,\mathrm{d}t = 18\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^6 t\, |\operatorname{sen} t\, \cos t|\,\mathrm{d}t$$

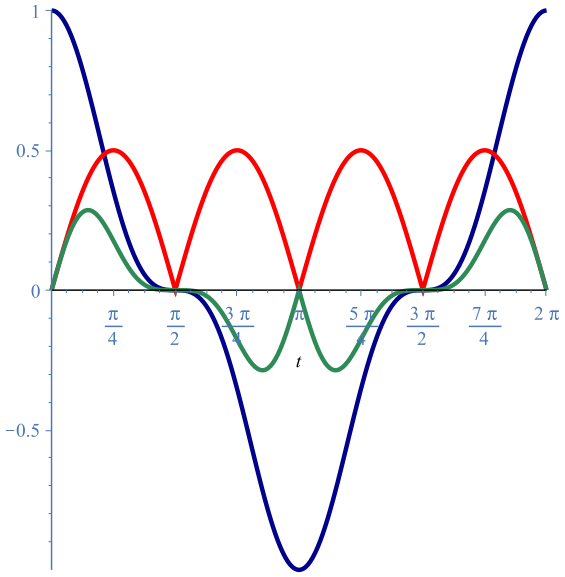
Sin embargo, notamos que $\operatorname{sen}^6 t$ es simétrica respecto al eje $x = \pi/2$, con lo cual podemos incluso hacer:

$$9\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^6 t\, |\operatorname{sen} t\, \cos t|\,\mathrm{d}t = 36\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 t\, \operatorname{sen} t\, \cos t\,\mathrm{d}t$$

lo cual nos aporta la gran ventaja de eliminar el módulo en el intervalo de integración. Finalmente, hacemos $u = \operatorname{sen} t \to \mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$, con lo cual dicha integral se puede calcular con facilidad:

$$9\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^6 t\ |\operatorname{sen} t\ \cos t|\,\mathrm{d}t = 36\int_0^1 u^7 \mathrm{d}u = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

Para la segunda integral notamos que existe una simetría par en torno a $x = \pi$, siendo la primera integral periódica de período 2π. Por esta razón, se generará un producto de dos lóbulos cuya área se cancelará (pues, siendo aún más precisos, cada uno de los lóbulos integra cero al ser simétricos en torno a $x = \pi/2$). Para que se note de mejor forma, observar la siguiente gráfica con cada una de las funciones en rojo y azul y en verde la función resultante.



De esta forma la segunda integral se anula. Finalmente,

$$\boxed{I = \frac{9}{2}}$$

Problema 4.2 Calcule la siguiente integral de línea:

$$\int_\Gamma \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$$

donde Γ es una vuelta de la hélice de radio r y de paso 2π.

Solución:

Ya es sabido cómo parametrizar una hélice. Se define el paso de una hélice como la diferencia de

altura en el eje z cuando esta realiza una vuelta completa. Una hélice de paso $2\pi b$ se parametriza como:

$$\vec{\lambda}_b(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\,\mathrm{sen}\, t \\ bt \end{pmatrix}$$

En este caso el paso es 2π, así que nuestra hélice corresponde a:

$$\vec{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \mathrm{sen}\, t \\ t \end{pmatrix} \to \vec{\lambda}'(t) = \begin{pmatrix} -r\,\mathrm{sen}\, t \\ r\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{d}s = \sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}t$$

Reemplazando y considerando que solo deseamos integrar una vuelta, podemos hacerlo de 0 a 2π[a]:

$$\int_\Gamma \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{r\cos(t)}{r}\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+r^2}\int_0^{2\pi}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Finalmente,

$$\boxed{\int_\Gamma \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = 0}$$

[a] O de 2π a 4π o de ξ a $\xi + 2\pi$. ¿Por qué todas son válidas? ¿Sólo por la simetría de la curva?

Integración sobre campos vectoriales

El tipo de integrales anterior tiene un campo de aplicación bastante limitado. Las principales aplicaciones físicas de las integrales de línea son sobre *campos vectoriales*. Partamos redefiniendo este campo:

Definición:

- Una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se denomina *campo vectorial*. Asocia a cada vector x un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en el mismo subespacio. Es decir, cada coordenada de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es una función $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Un campo se dice de clase $\mathcal{C}^n$ si cada una de sus componentes es una función de clase $\mathcal{C}^n$.

Se suele asociar graficar esta relación asociando el vector dirección $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en el punto $\mathbf{x}$. Esta forma de graficar se denomina *campo de direcciones.* Esta idea puede ser útil para describir campos de velocidades de fluidos en un tubo, un campo de fuerzas en un espacio $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ donde a cada punto x se le asocia una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ o un campo electrostático producido por una carga eléctrica q.

En la siguiente gráfica se presenta una ejemplificación de un campo de direcciones para $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x^2y)$:

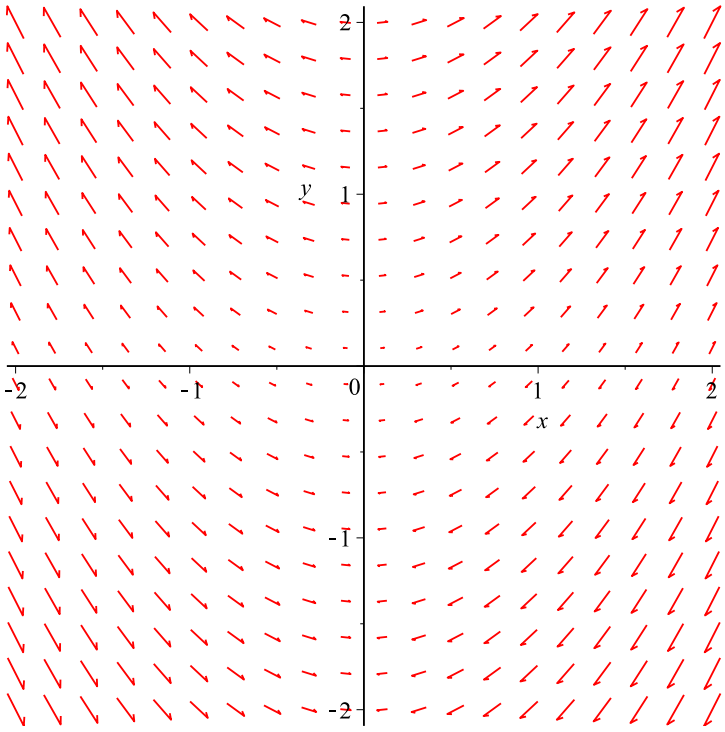


Figura 4.1: Gráfica del campo de direcciones para $\mathbf{F}(x, y) = (xy, x^2y)$.

Se dice que un campo es *continuo y/o diferenciable* si cada una de sus componentes lo es.

Definición:

- Se definen las *líneas de campo* de un campo $\mathbb{R}^n$ como conjuntos unidimensionales en $\mathbb{R}^n$ (curvas) tales que su tangente va en dirección de $\mathbf{F}$. En particular, en$\mathbb{R}^2$ una curva $y = y(x)$ que sea línea de campo deberá verificar que
$$y' = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)}$$
- El campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$ se denomina campo *radial*.

Como observación, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función para la cual todas sus derivadas parciales existen, entonces ∇f es una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y corresponde a un campo vectorial.

Una vez claros estos conceptos podemos definir la integración sobre un campo vectorial. Dado un campo vectorial que representa el campo de fuerzas para una partícula, la motivación es cuantificar el trabajo necesario para mover dicha partícula desde un punto **a** hacia un punto **b**.

Sabemos que físicamente el trabajo se define como fuerza por el desplazamiento. Es decir,

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \quad \text{y diferencialmente} \quad \delta W = \mathbf{F}\, \mathrm{d}s$$

Se utiliza el símbolo δ para señalar que el trabajo puede depender de la trayectoria seguida por el cuerpo. En este caso, nos enfrentamos a un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y una curva Γ suave parametrizada por λ. La fuerza en el instante t estará dada por $\mathbf{F}(\vec{\lambda}(t))$. El vector dirección estará determinado por el vector tangente unitario, con el propósito de no distorsionar la fuerza ejercida.

Luego, haciendo el producto punto entre ambos vectores obtenemos el diferencial de trabajo a integrar:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \underbrace{\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}(t)\right) \cdot \frac{\vec{\lambda}'(t)}{\left\|\vec{\lambda}'(t)\right\|}}_{\text{valor escalar de la proyección}} \mathrm{d}s \\ &= \mathbf{F}\left(\vec{\lambda}(t)\right) \cdot \frac{\vec{\lambda}'(t)}{\left\|\vec{\lambda}'(t)\right\|} \left\|\vec{\lambda}'(t)\right\| \mathrm{d}t \\ &= \mathbf{F}(\vec{\lambda}(t)) \cdot \vec{\lambda}'(t)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Integrando sobre todo el intervalo, se llega a la siguiente definición:

Definición: Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo y Γ una curva suave contenida en U parametrizada por $\vec{\lambda}(t)$ con $t \in [t_a, t_b]$. La *integral de linea de* $\mathbf{F}$ a lo largo de Γ se define como

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_a^b \mathbf{F}\left[\vec{\lambda}(t)\right] \cdot \vec{\lambda}'(t)\, \mathrm{d}t \tag{4.5}$$

Para una curva suave a tramos $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$ con Γ_k suave y Γ conexa se tiene que

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_k \tag{4.6}$$

Notaciones alternativas: Dado que utilizamos la representación simbólica $\mathrm{d}\vec{\ell} = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)^\dagger$, entonces también podemos utilizar la notación:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\Gamma F_1\, \mathrm{d}x_1 + \cdots + F_n\, \mathrm{d}x_n \tag{4.7}$$

Cuando la curva o camino λ es cerrada, se usa la notación:

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_\Gamma F_1\, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\, \mathrm{d}x_n \tag{4.8}$$

Partamos con un problema básico, en el cual solo se debe aplicar correctamente las definiciones anteriormente entregadas.

Problema 4.3 Exprese el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y) = (5x+3y)\,\hat{\mathbf{i}} + (1+\cos y)\,\hat{\mathbf{j}}$ en una partícula moviéndose en dirección contraria al sentido del reloj alrededor de una circunferencia unitaria centrada en el origen como una integral de la forma:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

No evalúe ni simplifique la integral.

Solución:

Hacemos lo que se pide siguiendo exactamente la definición. Una parametrización para la circunferencia unitaria que se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj viene dada por

$$\vec{\lambda}(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix} \to \mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}\mathrm{d}t \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]\,.$$

Reemplazando el campo en la parametrización:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix}5\cos t + 3\operatorname{sen} t\\ 1 + \cos\operatorname{sen} t\end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\boxed{\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi}\left[-5\cos t\,\operatorname{sen} t - 3\operatorname{sen}^2 t + \cos t + \cos t\,\cos\operatorname{sen} t\right]\,\mathrm{d}t}$$

Problema 4.4 Considere la región rectangular $\mathcal{R}$ con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,4)$ y $(0,4)$. La frontera de $\mathcal{R}$, es la curva $\Gamma = \partial\mathcal{R}$ consistente en los siguientes segmentos:

- Γ_1: de $(0,0)$ a $(1,0)$.
- Γ_2: de $(1,0)$ a $(1,4)$.
- Γ_3: de $(1,4)$ a $(0,4)$.
- Γ_4: de $(0,4)$ a $(0,0)$.

Considere el campo vectorial:

$$\mathbf{F}(x,y) = (\cos x \operatorname{sen} y)\,\hat{\mathbf{i}} + (xy + \operatorname{sen} x \cos y)\,\hat{\mathbf{j}}$$

(a) Determine el trabajo de $\mathbf{F}(x,y)$ a lo largo de Γ orientada en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj.

(b) ¿Es el trabajo total a través de Γ_1, Γ_2 y Γ_3 menor, mayor o igual que el trabajo a lo largo de Γ? Explique su resultado.

Solución:

Calculemos el trabajo en cada una de las curvas por separado siguiendo la orientación propuesta en el problema:

- Γ_1: parametrizamos con $(t,0)$ con $t \in (0,1)$. Luego,

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

- Γ_2: parametrizamos con $(1,t)$ con $t \in (0,4)$. Luego,

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^4 t + \operatorname{sen}(1)\cos t \,\mathrm{d}t = 8 + \operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}(4)$$

- Γ_3 : parametrizamos con $(t,4)$ con $t \in (0,1)$. Luego,

$$\int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_1^0 \cos t \operatorname{sen}(4)\,\mathrm{d}t = -\operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}(4)$$

- Γ_4: parametrizamos con $(0,t)$ con $t \in (0,4)$. Luego,

$$\int_{\Gamma_4} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

Finalmente,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\Gamma_4} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 8$$

Al agregar el trabajo de Γ_4 se mantiene constante el valor del trabajo con respecto a Γ, lo cual se explica porque el trabajo sobre Γ_4 es nulo en este campo.

Antes de continuar con todos los problemas restantes, revisemos un último teorema importante en la definición de integrales de línea, referente al signo de la integral dado el sentido de recorrido de la parametrización.

Teorema: Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo y $\vec{\lambda} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización suave de la curva Γ y sean $\phi : [c, d] \to [a, b]$ una función sobreyectiva suave y $\vec{\mu} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ el camino $\mu = \lambda \circ \phi$. Entonces,

(a) Si $\phi(c) = a$ y $\phi(d) = b$, entonces

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\mu} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\lambda}$$

(b) Si $\phi(c) = b$ y $\phi(d) = a$, entonces

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\mu} = -\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\lambda}$$

Es decir, cualquier reparametrización conserva el valor de la integral salvo el signo, el cual está determinado por la orientación que siga la curva. No solo eso, con tal de que se conserven los extremos en la nueva curva, el valor de la integral seguirá siendo el mismo mientras la traza sea igual.

Problema 4.5 Sea $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\,\hat{\mathbf{i}} + (x - y)\,\hat{\mathbf{j}}$. Calcule:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

donde Γ es la curva recorrida en sentido positivo entre los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, de ecuación $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Solución:

La curva señalada corresponde a una semielipse recorrida en sentido positivo. Podemos dividir por a^2b^2 para parametrizar fácilmente la curva:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hacemos entonces:

$$\vec{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} \to \mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,t \\ b\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \quad \text{con } t \in [0, \pi]$$

En las ecuaciones del campo se obtiene:

$$\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} a\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t \\ a\cos t - b\,\mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} &= \int_0^\pi -a^2\cos t\ \mathrm{sen}\,t - ab\,\mathrm{sen}^2 t + ab\cos^2 t - b^2\cos t\ \mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi ab\cos 2t - \frac{(a^2+b^2)}{2}\,\mathrm{sen}\,2t\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues estamos integrando cada una de las funciones en un período. Es decir,

$$\boxed{\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 0}$$

Problema 4.6 Considere un disco delgado de radio r_0 centrado en el origen y en el plano $z = 0$. Además éste se encuentra cargado uniformemente con densidad σ. Se sabe que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ generado por esta distribución para un punto arbitrario del eje z es:

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(r_0/z)^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío. Calcule el trabajo realizado por el campo al mover una carga q desde el centro del disco hasta el infinito a través del eje z.

Solución:

Sobre la base de conocimientos básicos de electromagnetismo, sabemos que $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, con lo cual tendremos que:

$$W = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$$

Una curva que se mueve exclusivamente sobre el eje z positivo desde el origen hasta infinito

puede ser:

$$\vec{\lambda}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \to \mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}z = \hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}z$$

Es decir,

$$W = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(r_0/z)^2}}\right)\mathrm{d}z$$

Integramos directamente buscando la primitiva. Para ello primero reacomodemos términos:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(r_0/z)^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+r_0^2}} \quad ; \quad (z \geq 0)$$

Observe que la primitiva de 1 es sencilla de calcular. La primitiva de $z/\sqrt{z^2+r_0^2}$ se obtiene de forma directa haciendo $u = z^2$. De esta forma,

$$\boxed{W = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}\left(z - \sqrt{z^2+r_0^2}\right)\Big|_0^\infty = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}r_0}$$

donde el extremo infinito se obtiene tomando el límite, y este de forma rápida notando que en infinito $\sqrt{z^2+r_0^2} \approx z$ y por lo tanto los términos z y $\sqrt{z^2+r_0^2}$ se anulan en infinito[a].

[a] Se deja propuesto al lector hacerlo por la vía convencional si así lo desea, pero llegará al mismo resultado.

Problema 4.7 Sea γ la curva que se produce de la intersección del plano $y = x$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$, contenida en el primer octante. Sea

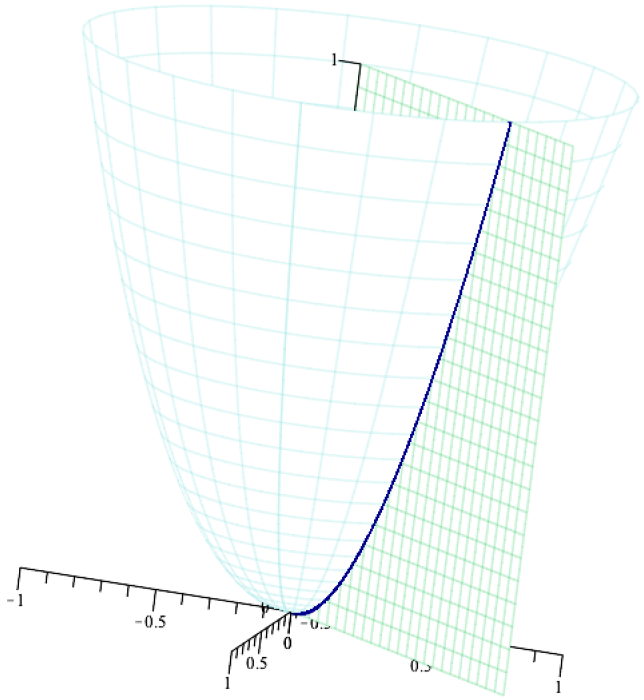
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\cos y}{2(1+2z)}\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\cos x}{2(1+2z)} + \operatorname{sen} y\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{y\cos x}{1+2z}\hat{\mathbf{k}}.$$

(a) Determine los puntos $\mathbf{p} \in \gamma$ para los cuales el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de γ desde el origen hasta $\mathbf{p}$ sea 1.

(b) Sean $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ dos puntos cualesquiera del inciso anterior. Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de γ desde $\mathbf{p}_1$ hasta $\mathbf{p}_2$.

Solución:

Si este problema se desarrolla de forma sistemática, y apegándose a las definiciones, resultará ser sustancialmente más sencillo de lo que parece. Partamos imaginando la curva que se nos pide parametrizar: intersectar el plano $y = x$ con libertad en z con el parboloide $z = x^2 + y^2$. Debiese obtenerse una curva como la siguiente:



Luego, la parametrización viene intuitivamente dada por:

$$\vec{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \quad ; \quad 0 \leq t \leq \infty$$

pues con ella se cumple la pertenencia a ambas superficies (ambas ecuaciones se satisfacen). Adicionalmente, t se mueve entre 0 e ∞ pues todos estos puntos garantizan la pertenencia al primer octante.

(a) Calculemos el trabajo para un punto arbitrario y luego igualémoslo a 1 para encontrar los puntos pedidos. En este caso,

$$\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = \frac{\cos t}{2\left(1+4t^2\right)}\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\cos t}{2\left(1+4t^2\right)} + \operatorname{sen} t\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{t\cos t}{1+4t^2}\hat{\mathbf{k}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} &= \int_0^{t^*} \frac{\cos t}{2\left(1+4t^2\right)} + \frac{\cos t}{2\left(1+4t^2\right)} + \operatorname{sen} t + \frac{4t^2\cos t}{1+4t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t^*} \cos t + \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t = \operatorname{sen}\left(t^*\right) + 1 - \cos\left(t^*\right) \end{aligned}$$

Es decir, buscamos de acuerdo al enunciado aquellos t^* tales que:

$$\operatorname{sen}\left(t^*\right) + 1 - \cos\left(t^*\right) = 1$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}(t^*) = \cos(t^*)$$

$$\rightarrow \tan(t^*) = 1$$

Despejando obtenemos que: $t^* = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$ para garantizar así puntos en el primer octante.

Finalmente, los puntos $\mathbf{p}$ son de la forma:

$$\boxed{\mathbf{p}_k = \begin{pmatrix} \pi/4 + k\pi \\ \pi/4 + k\pi \\ 2(\pi/4 + k\pi)^2 \end{pmatrix}}$$

(b) Por evaluar a través de γ:

$$\int_{\substack{\mathbf{p}_1 \\ \gamma}}^{\mathbf{p}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

siendo $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$dos puntos cualesquiera de los anteriores. Si bien ya tenemos calculada la expresión general para un punto cualquiera (y por lo tanto, se puede evaluar directamente reemplazando), podemos ser astutos y notar que:

$$\int_{\substack{\mathbf{p}_1 \\ \gamma}}^{\mathbf{p}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\substack{0 \\ \gamma}}^{\mathbf{p}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{\substack{0 \\ \gamma}}^{\mathbf{p}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Pero ambas integrales desplazadas desde el origen realizan un trabajo de una unidad, por lo tanto:

$$\boxed{\int_{\substack{\mathbf{p}_1 \\ \gamma}}^{\mathbf{p}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 1 - 1 = 0}$$

Problema 4.8 Sean $u, v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Dada una curva $\Gamma \subseteq U$ suave a tramos se define:

$$\int_\Gamma u\,\mathrm{d}v \triangleq \int_\Gamma u v_x \mathrm{d}x + u v_y \mathrm{d}y$$

Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $\gamma \subseteq U$ una curva suave a tramos, cerrada y que no contiene ceros de f. Demuestre que:

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}g}{f} = \oint_\gamma \frac{g}{f^2} \mathrm{d}f$$

Solución:

Analicemos cada una de las expresiones de acuerdo a la definición dada. En primer lugar,

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}g}{f} = \oint_\gamma \underbrace{\frac{1}{f}}_{u}\,\mathrm{d}\mathrm{g} = \oint_\gamma \frac{g_x}{f}\mathrm{d}x + \frac{g_y}{f}\mathrm{d}y$$

Análogamente,

$$\oint_\gamma \underbrace{\frac{g}{f^2}}_{u}\,\mathrm{d}f = \oint_\gamma \frac{g}{f^2}f_x\mathrm{d}x + \frac{g}{f^2}f_y\mathrm{d}y$$

Por demostrar entonces que:

$$\oint_\gamma \frac{g_x}{f}\mathrm{d}x + \frac{g_y}{f}\mathrm{d}y = \oint_\gamma \frac{g}{f^2}f_x\mathrm{d}x + \frac{g}{f^2}f_y\mathrm{d}y$$

o equivalentemente, usando propiedades de la integral de línea:

$$\oint_\gamma \left(\frac{g_x}{f} - \frac{g}{f^2}f_x\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{g_y}{f} - \frac{g}{f^2}f_y\right)\mathrm{d}y = 0$$

Sin embargo, notemos que:

$$\frac{g_x}{f} - \frac{g}{f^2}f_x = \frac{fg_x - f_xg}{f^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{f}\right)$$

$$\frac{g_y}{f} - \frac{g}{f^2} = \frac{fg_y - gf_y}{f^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g}{f}\right)$$

con lo cual

$$\oint_\gamma \left(\frac{g_x}{f} - \frac{g}{f^2}f_x\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{g_y}{f} - \frac{g}{f^2}f_y\right)\mathrm{d}y = \oint_\gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{f}\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g}{f}\right)\mathrm{d}y = \oint_\gamma \vec{\nabla}\left(\frac{g}{f}\right)\cdot\mathrm{d}\ell$$

pero $\vec{\nabla}\left(\frac{g}{f}\right)\cdot\mathrm{d}\ell = \vec{\nabla}\left(\frac{g}{f}\right)\left(\vec{\lambda}\right)\cdot\vec{\lambda}'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{g}{f}\right)\left(\vec{\lambda}\right)\mathrm{d}t$, con lo cual

$$\oint_\gamma \vec{\nabla}\left(\frac{g}{f}\right)\cdot\mathrm{d}\ell = \int_{t_i}^{t_f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{g}{f}\right)\left(\vec{\lambda}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{g}{f}\right)\Bigg|_{\vec{\lambda}(t_i)}^{\vec{\lambda}(t_f)}$$

Dado que $\vec{\lambda}(t_f) = \vec{\lambda}(t_i)$ por ser una curva cerrada concluimos que:

$$\oint_\gamma \left(\frac{g_x}{f} - \frac{g}{f^2}f_x\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{g_y}{f} - \frac{g}{f^2}f_y\right)\mathrm{d}y = 0 \longleftrightarrow \boxed{\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}g}{f} = \oint_\gamma \frac{g}{f^2}\mathrm{d}f} \quad \blacksquare$$

Problema 4.9 **Bienvenida al cálculo variacional.** Sea el campo $\mathbf{F}(x,y) = 3y^2\,\hat{\mathbf{i}} + 3x\,\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre un camino que una $(0,0)$ con $(1,1)$ minimizando el trabajo realizado por $\mathbf{F}$.

Solución:

Si bien existe una metodología mucho más elaborada para resolver este tipo de problemas, dentro del campo del Cálculo Variacional, aquí lo resolveremos de una forma más bien intuitiva.

Partamos buscando una expresión lo más simplificada posible para el trabajo realizado por este campo. Digamos que la curva en general es de la forma $y = y(x)$. Entonces, $\vec{\lambda}(x) = (x, y(x))$ con x entre 0 y 1 de acuerdo a las condiciones del problema e imponiendo la restricción de que $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$. Luego,

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x$$

Entonces,

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_0^1 \left[3y^2(x) + 3xy'(x)\right] \mathrm{d}x$$

El problema de optimización puede "formularse" entonces como:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \displaystyle\int_0^1 \left[3y^2(x) + 3xy'(x)\right] \mathrm{d}x \\ \text{s.a.} & y(0) = 0 \\ & y(1) = 1 \\ & y(x) \text{ continua a tramos} \end{array}$$

¿Nota algo distinto versus los problemas optimización habituales? No estamos buscando un **punto** óptimo para una función dada, estamos buscando una **función** que minimiza un funcional[a] (la integral en este caso).

Para resolver este problema, trabajemos un poco la integral. Para ello, observe que aparece una derivada de $y'(x)$ en el segundo término. Para dejar todo en términos de y, integremos por partes haciendo:

$$\begin{cases} u = x & \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = y'(x)\,\mathrm{d}x & \to v = y(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

Luego,

$$\int_0^1 \left[3y^2(x) + 3xy'(x)\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 3y^2(x)\,\mathrm{d}x + 3\left(xy(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

De las condiciones de borde $y(1) = 1$, con lo cual:

$$\int_0^1 \left[3y^2(x) + 3xy'(x)\right] \mathrm{d}x = 3 + 3\int_0^1 \left[y^2(x) - y(x)\right] \mathrm{d}x$$

Minimizar la segunda integral −nuestro objetivo− es mucho más sencillo de lo que parece. Notemos que:

$$y^2 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

con lo cual

$$\int_0^1 \left[3y^2(x) + 3xy'(x)\right] \mathrm{d}x = \frac{9}{4} + \int_0^1 \left[y(x) - \frac{1}{2}\right]^2 \mathrm{d}x$$

Dado que $9/4$ es un número fijo en la expresión, no tenemos más opción que minimizar la integral, la cual es siempre positiva o como mínimo nula al tratarse de una integral de términos cuadráticos.

En efecto, a integral como mínimo puede ser nula. ¿Cómo logramos eso? Haciendo que en todo el intervalo $y(x)$ sea exactamente igual a $1/2$. Es decir, como primera aproximación deberíamos definir

$$y(x) = \frac{1}{2}$$

para cumplir lo pedido. Sin embargo, esto no satisface las condiciones de borde impuestas ($y(0) = 0$ e $y(1) = 1$).

Una primera aproximación bastante burda es definir:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in (0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

la cual efectivamente minimizaría el trabajo y seguiría siendo continua a tramos e integrable. Sin embargo, no cumple con el requisito de "unir" los puntos, solamente de incluirlos en la curva.

Una mejor aproximación entonces es definir una curva a tramos de la siguiente forma:

- De $(0,0)$ a $(0,1/2)$ en línea recta $\rightarrow$ se sigue realizando trabajo cero pues la dirección de la curva (hacia arriba) es ortogonal al valor del campo ($\mathbf{F} \sim (3y^2, 0)$) en este tramo.
- De $(0,1/2)$ a $(1,1/2)$ en línea recta. La integral se anula completamente.
- De $(1,1/2)$ a $(1,1)$ en línea recta. Se agrega un pequeño monto de trabajo que es muy sencillo de cuantificar, pero que efectivamente minimiza el trabajo realizado.

Bajo la definición de esta curva se cumple lo pedido.

Este problema se deja exclusivamente como divertimento respecto a la temática y como introducción al tema, ya que es un campo de estudio completamente ajeno al objeto de estudio en este instante.

[a]Un funcional es un operador que recibe una o más funciones y les asocia un único escalar. Un ejemplo típico de ello son en efecto las integrales definidas.

Propuesto Calcule la integral de línea:

$$\int_{\Gamma} \left(2xy^3 + yz\right) \mathrm{d}x + \left(3x^2y^2 + xz\right) \mathrm{d}y + xy \, \mathrm{d}z$$

donde Γ es un camino cuyo punto inicial es $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$, cuyo punto final es $(1, 1, 1)$ y cuyo camino se obtiene al intersectar las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$.

Propuesto Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ dos puntos en $\mathbb{R}^3$. El objetivo de este ejercicio es probar que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta que los une. Sea $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ un camino de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\mathbf{f}(a) = \mathbf{p}$, $\mathbf{f}(b) = \mathbf{q}$.

(a) Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario. Considere la función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{v}$. Demuestre que:

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$$

(b) Use la Desigualdad de Cauchy-Schwarz con los vectores $\mathbf{f}'(t)$ y $\mathbf{v}$ para demostrar que

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

(c) Considerando el vector unitario $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|}$, demuestre que:

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| \leq \ell(\mathbf{f})$$

(d) Concluya que la distancia más corta entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ es la línea recta que une estos dos puntos.

(e) El Principio de Fermat plantea que la luz recorre el camino que garantiza un paso óptico estacionario, definido como:

$$\int_\Gamma n(s)\,\mathrm{d}s$$

Demuestre que en un medio homogéneo (i.e. $n(s)$ constante) la luz describe una trayectoria recta.

4.2. Campos conservativos, funciones potenciales

De observaciones realizadas en problemas anteriores cabe realizarse algunas preguntas: ¿cuándo existe una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para el campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se cumple que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$? O bien, ¿depende el valor de la integral de línea de los extremos de la función o importa la traza del camino? Estas consideraciones matemáticas muchas veces han sido realizadas en problemas físicos.

Estas interrogantes se responden con el siguiente teorema:

Teorema: Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 0)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\mathbf{F}$ es el campo gradiente de una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{k+1}$.

(b) La integral $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ a lo largo de un camino cualquiera $\vec{\lambda} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 depende solamente del punto inicial $\vec{\lambda}(a)$ y final $\vec{\lambda}(b)$ del camino $\vec{\lambda}$.

(c) La integral $\displaystyle\oint_\Gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ a lo largo del camino cerrado $\vec{\lambda} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ es igual a cero.

Dado que se logra una comprensión a cabalidad del tema revisando la demostración, esta se adjunta **y se recomienda revisarla**.

Demostración:

$(1 \to 2)$ Aplicando la hipótesis y la definición:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\Gamma \vec{\nabla} f(\vec{\lambda}(t)) \cdot \vec{\lambda}'(t)\mathrm{d}t$$

Vimos en un apartado anterior que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\vec{\lambda}(t)\right) = \vec{\nabla} f(\vec{\lambda}(t)) \cdot \vec{\lambda}'(t)\mathrm{d}t$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{\lambda}(t))\mathrm{d}t \\ &= f(\vec{\lambda}(b)) - f(\vec{\lambda}(a)) \end{aligned}$$

$(2 \to 3)$ Si es un camino cerrado, por definición $\vec{\lambda}(b) = \vec{\lambda}(a)$. Luego,

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f(\vec{\lambda}(b)) - f(\vec{\lambda}(a)) = 0$$

$(3 \to 2)$ Sean $\vec{\lambda}_1$ y $\vec{\lambda}_2$ caminos suaves que comparten su punto inicial y final. Entonces, el camino $\vec{\mu} = \vec{\lambda}_1 + (-\vec{\lambda}_2)$ es un camino cerrado. Se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\lambda_1 + (-\lambda_2)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &= \int_{\lambda_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{-\lambda_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &= \int_{\lambda_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{\lambda_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\lambda_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\lambda_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

i.e. el valor de la integral es independiente del camino, y solo depende de las extremidades de este.

$(2 \to 1)$ (Solo para interesados) Se realizará este trabajo para una sola componente. Sean $\mathbf{p}_0$ un punto cualquiera y $\mathbf{p} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. Consideremos la curva suave Γ que va desde $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}$, luego

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

ya que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo. Es decir, existe una función dentro de infinitas para expresar esto que difieren en una constante y hemos escogido aquella tal que $f(\mathbf{p}_0) = 0$. Como U es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{p}, r) \subseteq D$ y por lo tanto, para $|h| < r$ se tiene que $\mathbf{p}' = (x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) \in B(p, r)$. Además,

$$\begin{aligned} f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) &= \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}'} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &= \int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Consideremos $\vec{\varphi}(t) = (x_1 + t, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ con $t \in (0, h)$. Como el campo es conservativo, es independiente de la trayectoria, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \int_0^h \mathbf{F}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^h F_1(\vec{\varphi}(t)) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

ya que $\varphi'(t) = \hat{e}_1$. Luego, consideramos la definición de derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_1(\vec{\varphi}(t)) dt \underset{\text{T.F.C.}}{=} F_1(\vec{\varphi}(0)) = F_1(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Es decir, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = F_1(x_1, \ldots, x_n)$. Luego, análogamente $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = F_j(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Concluimos que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$.

Dado que hemos demostrado $1 \to 2 \to 3$ y $3 \to 2 \to 1$, entonces hemos demostrado todas las posibles secuencias de caminos. Con ello se demuestra lo pedido. ■

El teorema anterior motiva la siguiente definición:

Definición:

- A todo campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisfaga una (y por lo tanto todas) las condiciones del teorema anterior se le denomina *campo conservativo* o *independiente de la trayectoria*.
- A la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface que $\vec{\nabla} f = \mathbf{F}$ se le denomina *función pontencial*.

Cabe realizar algunas observaciones al respecto antes de continuar:

- La función potencial de un campo conservativo no es única. Basta notar que si f es una función potencial, entonces $f + c$ con $c \in \mathbb{R}$ también.
- El teorema anterior es útil para estudiar las propiedades de un campo conservativo, pero no es práctico para decidir si el campo es o no conservativo.

Una condición necesaria pero no suficiente para descartar conservatividad de campos viene dada por el siguiente teorema:

Teorema: *(Condición necesaria)* Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial conservativo de clase $\mathcal{C}^k$ tal que $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$, entonces se cumple que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad (\forall i \neq j)$$

Si U es convexo, esta condición también es suficiente. (*¿Por qué?*)

Demostración: Del teorema anterior, se tendrá que existe función potencial f de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$. Luego,

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Como $F_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, se puede derivar con respecto a j y se verifica el lema de Schwarz, ya que la función es de clase C^{k+1}. Es decir,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \blacksquare$$

Observación: Estas son condiciones necesarias pero **no** suficientes. No podemos garantizar que un campo es conservativo porque se satisfacen (pero sí negarlo en caso de que no se cumplan). Sin embargo, sí se puede garantizar que el campo es al menos *localmente* conservativo en alguna bola B_p.

Este teorema se convertirá en condición suficiente una vez manejemos el Teorema de Green.

Determinación de la función de potencial

Para el cálculo de integrales de línea puede requerirse la determinación de la función de potencial f, pues puede simplificar significativamente los cálculos (siempre es más cómodo trabajar con una expresión escalar que una vectorial). Para ello, existen dos caminos:

1) Introducir una curva

Consideramos la curva $\vec{\lambda} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{\lambda} = t(x_1, \ldots, x_n)$ con t escalar y $x_1, \ldots, x_n$ constantes. Con esto,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \int_0^1 (F_1(tx_1, \ldots, tx_n)x_1 + \ldots + F_n(tx_1, \ldots, tx_n)x_n)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 G_1(x_1, \ldots, x_n)u_1(t)dt + \ldots + \int_0^1 G_n(x_1, \ldots, x_n)u_n(t)dt \end{aligned}$$

donde se asumió que la función es seperable, de modo que $F_i(tx_1, \ldots, tx_n) = G_i(x_1, \ldots, x_n)u_i(t)$. Luego,

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f(\vec{\lambda}(1)) - f(\vec{\lambda}(0)) = f(x_1, \ldots, x_n) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i G_i(x_1, \ldots, x_n) \int_0^1 u_i(t)\mathrm{d}t$$

$$\rightarrow \boxed{f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i G_i(x_1, \ldots, x_n) \int_0^1 u_i(t)\mathrm{d}t}$$

Hacemos $f(0) = 0$, pues será una constante. Recordar que, las funciones $f(x, y) \pm f(0)$ también son funciones potenciales.

2) Integrar (el método habitual)

Haremos el procedimiento para $\mathbb{R}^2$, se puede extender por analogía a $\mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces existirá función escalar f tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$. Podemos considerar que

$$\begin{aligned} M(x, y) &= F_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ N(x, y) &= F_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Luego, tendremos que

$$f(x, y) = \int M(x, y)\mathrm{d}x + g(y)$$

puesto que al derivar, toda expresión independiente de x desaparece. Luego, derivando con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\mathrm{d}x\right) + g'(y)$$

Despejando $g(y)$:

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\mathrm{d}x\right)$$

Si resulta que aparecen términos x, entonces la suposición de que el campo era conservativo era falsa. Contra lo que se puede pensar, esto efectivamente es así si el campo es conservativo. Notar que derivando con respecto a x esta expresión se verifica que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g'(y) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x \partial y} \int M(x, y)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y \partial x} \int M(x, y)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Integrando $g'(y)$ para obtener $f(x, y)$:

$$g(y) = \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right)\right) dy$$

Finalmente,

$$\boxed{f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \right) \mathrm{d}y} \tag{4.9}$$

Evidentemente, no es recomendable memorizar esta fórmula.

Utilizando todas estas ideas, estamos en condiciones de realizar los siguientes problemas:

Problema 4.12

(a) Muestre que $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2 - 6y^2)\,\hat{\mathbf{i}} + (4y - 12xy)\,\hat{\mathbf{j}}$ es conservativo.

(b) Encuentre $f(x,y)$ escalar tal que $\mathbf{F}(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y)$.

(c) Sea Γ la curva $x = 1 + y^3(1-y)^3$, $0 \leq y \leq 1$. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$.

Solución:

(a) y **(b)** Dado que por ahora solo disponemos de la condición necesaria, no es suficiente probar que:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Por esta razón, es que habitualmente se aprovecha la tipología de estos problemas y se encuentra la función potencial de inmediato. Con eso demostramos que es conservativo y a la vez calculamos la función de potencial.

Utilizaremos el procedimiento descrito en 2). Suponiendo que $\vec{\nabla} f = \mathbf{F}$, entonces deberá cumplirse que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y^2 \rightarrow f(x,y) = x^2 - 6xy^2 + c(y)$$

Pero esta función que acabamos de determinar deberá cumplir adicionalmente que su derivada con respecto a y sea la que ya conocemos, esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -12xy + c'(y) = 4y - 12xy \rightarrow c'(y) = 4y$$

Efectivamente no apareció ninguna contradicción. $c'(y)$ depende exclusivamente de y. integrando,

$$c(y) = 2y^2 + d$$

con $d \in \mathbb{R}$, el cual podemos hacer arbitrariamente cero ya que nos piden solamente una función escalar. Luego,

$$\boxed{f(x,y) = x^2 - 6xy^2 + 2y^2}$$

Con esto se demuestra lo pedido. ■

(b) Sin preocuparnos demasiado por la gráfica en cuestión, podemos notar que una parametrización de la curva es:

$$\vec{\lambda}(t) = \left(1 + t^3\left(1 - t^3\right), t\right) \quad \text{con } t \in [0,1]$$

donde identificamos inmediatamente el punto inicial como $\vec{\lambda}(0) = (1,0)$ y el punto final $\vec{\lambda}(1) = (1,1)$. Luego, dado que el campo es conservativo deducimos inmediatamente el valor de la integral, sin necesidad de hacer cálculos adicionales:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f(1,1) - f(1,0) = 1 - 6 + 2 - 1$$

$$\rightarrow \boxed{\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -4}$$

Problema 4.13 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x \operatorname{sen} z, ze^y, x^2 \cos z + e^y)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que $\mathbf{F}$ deriva de un potencial.

Solución:

Existen dos formas de hacer esto:

- Como $\mathbf{F}$ está definida en todo $\mathbb{R}^2$, basta probar que $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$ e invocar el Teorema de Stokes.
- Encontrar dicha función de potencial.

Como repaso, haremos lo segundo. Sea f dicha función de potencial, entonces deberá cumplirse que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \operatorname{sen} z \rightarrow f(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen} z + c(y,z)$$

Reemplazando con esta función de potencial en la segunda componente:

$$\frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = ze^y \rightarrow c(y,z) = ze^y + d(z)$$

Es decir hasta ahora $f(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen} z + ze^y + d(z)$. Reemplazando en la tercera componente:

$$\frac{\partial c}{\partial z} = x^2 \cos z + e^y + d'(z) = x^2 \cos z + e^y$$

$$\rightarrow d'(z) = 0 \rightarrow d(z) = d$$

Haciendo d constante arbitrariamente cero, concluimos que

$$\boxed{f(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen} z + ze^y}$$

es tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$ y por lo tanto $\mathbf{F}$ es conservativo. ■

Problema 4.14 Sea $\mathbf{F}(x,y) = axy\,\hat{\mathbf{i}} + (e^y + 2x^2)\,\hat{\mathbf{j}}$.

(a) Encuentre a de modo que $\mathbf{F}$ sea conservativo.

(b) Para el valor de a encontrado en (a), encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.

(c) Para el mismo valor de a de las partes anteriores, determine el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a través de la curva $(t, \cos(t))$ con $0 \leq t \leq \pi$.

Solución:

(a) y **(b)** Recordemos la condición necesaria para que $\mathbf{F}$ sea conservativo. Si $\mathbf{F} = (P, Q)$, entonces deberá cumplirse que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \to ax = 4x$$

Entonces $a = 4$. Si bien ya sabemos que esto no garantiza por ahora de modo alguno que sea el valor buscado, es el único candidato posible, pues cumple la condición necesaria. Cualquier otro candidato NO genera un campo conservativo, razón por la cual si no se cumple para este valor, entonces no hay valor de a que satisfaga lo pedido.

Para demostrar que es conservativo para este valor, encontremos la función de potencial para asumiendo $a = 4$ y de paso respondemos la parte (b).

Supongamos que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$ con f la función a buscar. Entonces f deberá cumplir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy \to f(x,y) = 2x^2 y + c(y)$$

Derivando,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y + 2x^2 = 2x^2 + c'(y)$$

Entonces $c'(y) = e^y \to c(y) = e^y + d$. Haciendo $d = 0$ concluimos finalmente que la función de potencial es:

$$\boxed{f(x,y) = 2x^2 y + e^y}$$

y exclusivamente $\boxed{a = 4}$ cumple la condición pedida.

(b) No es más que calcular la integral de línea sobre $y = \cos(x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi$. Es decir, $\mathbf{p}_2 = (\pi, -1)$ y $\mathbf{p}_1 = (0, 1)$. De esta forma,

$$\boxed{\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f(\pi, -1) - f(0, 1) = -2\pi^2 + e^{-1} - e}$$

Problema 4.15

(a) Considere $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \cos(x) + z^3)\,\hat{\mathbf{i}} + 2y \operatorname{sen}(x)\,\hat{\mathbf{j}} + (3xz^2 + 2z)\,\hat{\mathbf{k}}$. Demuestre que es conservativo y encuentre f escalar tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$.

(b) Sea $\mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) + (z^3, 0, 0)$. Calcule

$$\int_\Gamma \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

si Γ es una curva que se mueve secuencialmente y en línea recta entre los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

Solución:

(a) Este caso es similar a problemas anteriores, solo que se agrega una variable adicional. Ya sabemos cómo proceder: encontramos la función potencial y con esto demostramos lo pedido.

Integremos primero la componente y por simplicidad: la función potencial f debe ser tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \operatorname{sen}(x) \to f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen}(x) + c(x, z)$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos(x) + z^3 = y^2 \cos(x) + \frac{\partial c}{\partial x}$$

Entonces igualando las ecuaciones segunda y tercera se obtendrá que:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = z^3 \to c(x, z) = xz^3 + d(z)$$

por lo cual hasta ahora $f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen}(x) + xz^3 + d(z)$. Reemplazando en z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 + 2z = 3xz^2 + d'(z)$$

Es decir, $d'(z) = 2z \to d(z) = z^2 + e$ con $e = 0$ asumiendo una función potencial en particular. Concluimos entonces que:

$$\boxed{f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen}(x) + xz^3 + z^2}$$

y se demuestra así lo pedido. ■

(b) Observe que trabajamos con una suma de campos, y ya sabemos por propiedades de la integral de línea que:

$$\int_\Gamma (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\Gamma \mathbf{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_\Gamma \mathbf{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

para dos campos cualesquiera del mismo orden. Entonces,

$$\int_\Gamma \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int \left(z^3, 0, 0\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Dado que $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f\left(0,0,1\right) - f\left(0,0,0\right) = 1$$

pues son los puntos final e inicial de la curva respectivamente. Sin embargo, es fácil notar que $(z^3, 0, 0)$ no es conservativo. En efecto,

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 3z^2 \neq 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

(salvo si $z = 0$). Por lo tanto, tendremos que calcular la integral de línea por definición. Para ello, por comidad podemos dividir la integral de línea en dos: un tramo que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,0)$ y otro tramo que une $(1,1,0)$ con $(0,0,1)$. En otras palabras,

$$\int_\Gamma \left(z^3, 0, 0\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\Gamma_1} \left(z^3, 0, 0\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\Gamma_2} \left(z^3, 0, 0\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Es fácil notar que la primera integral se anula inmediatamente, puesto que esta curva yacerá en el plano xy y por lo tanto en ella la coordenada z siempre se anulará, de hecho para cualquier curva que tomemos. Dado que la integral contempla el campo $(z^3, 0, 0)$ al evaluarlo en la curva este se anulará para todo punto del recorrido, por lo cual la integral de Γ_1 es cero[a].

Para la integral de Γ_2 requeriremos parametrizar una recta que comienza en $(1,1,0)$ y termina en $(0,0,1)$. Ya sea por tanteo o por los métodos aprendidos en Cálculo II, es fácil determinar que una parametrización válida para este caso es:

$$\vec{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \quad \text{con } t \in [0,1]$$

Evaluando en el campo obtenemos $(z^3, 0, 0) = (t^3, 0, 0)$, con lo cual la integral se escribe simplemente como:

$$\int_{\Gamma_2} \left(z^3, 0, 0\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_0^1 t^3 \mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$$

Finalmente,

$$\boxed{\int_\Gamma \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}}$$

[a] De hecho, notamos que para $z = 0$ sí se cumple la condición necesaria, por lo que incluso es fácil notar que por conservatividad en el plano, podríamos haber tomado cualquier otro camino, parabólico por ejemplo, y haber obtenido el mismo resultado al evaluar la integral de línea.

Problema 4.16 Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (x + z, y^2, x)$ sobre el arco de hélice parametrizado por $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\,\text{sen}(t)$, $z(t) = at$ y que une los puntos $\mathbf{a} = (r, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (r, 0, 2\pi a)$.

Solución:

El campo sí es conservativo (vea que el rotor se anula). Buscando su función de potencial nos convenceremos aún más de ello. Integrando en la tercera componente:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \to f(x, y, z) = xz + c(x, y)$$

Integrando en la segunda:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial y} = y^2 \to c(x, y) = \frac{y^3}{3} + d(x) \to f(x, y, z) = xz + \frac{y^3}{3} + d(x)$$

Reemplazando en la primera:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z + d'(x) = x + z \to d'(x) = x \to d(x) = \frac{x^2}{2} + e$$

Haciendo $e = 0$ de forma arbitraria, obtenemos la función de potencial es

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xz + \frac{y^3}{3}$$

Finalmente, por conservatividad:

$$W = f(r, 0, 2\pi a) - f(r, 0, 0) = \frac{r^2}{2} + 2\pi ar - \frac{r^2}{2}$$

$$\to \boxed{W = 2\pi ar}$$

Problema 4.17 Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{xz}\left(xyz^2 + yz\right), xze^{xz}, e^{xz}\left(x^2yz + xy\right)\right)$$

Calcule la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de las siguientes curvas para $t \in [0,1]$:

(a) $\vec{\lambda}_1(t) = \left(\dfrac{\sinh(5t^4)}{\sinh(5)}, t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 2t, \dfrac{\ln(1+6t^8)}{\ln(7)}\right)$.

(b) $\vec{\lambda}_2(t) = \left(\ln(t^2 - t + 1), \operatorname{sen}(t^3 + 3t^2 - 4t), \dfrac{\cosh(t^5 - t) - 1}{(t^2 + t + 1)^{4/7}}\right)$.

Solución:

Evidentemente intentar evaluar las integrales de línea de forma directa puede convertirse en un procedimiento en extremo tedioso. Por lo tanto, tratamos de determinar la función de potencial de $\mathbf{F}$ y después simplemente evaluamos en los extremos.

Buscamos $f(x,y,z)$ tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$. A simple vista, lo más sencillo parece ser integrar en y primero pues en la expresión de $\mathbf{F}$ no hay dependencia de y en la segunda componente. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xz} \to f(x,y,z) = xyze^{xz} + c(x,z)$$

donde debemos determinar $c(x,z)$. Reemplazando en la primera ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xz} + xyz^2e^{xz} + \frac{\partial c}{\partial x} = xyz^2e^{xz} + yze^{xz}$$

$$\to \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \to c = c(z)$$

Es decir, por ahora la constante c depende exclusivamente de y. Reemplazando en z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xz} + x^2yze^{xz} + \frac{\partial c}{\partial z} = xye^{xz} + x^2yze^{xz}$$

$$\to c'(z) = 0 \to c(z) = d$$

Haciendo d arbitrariamente cero concluimos que:

$$\boxed{f(x,y,z) = xyze^{xz}}$$

Por lo tanto, el campo es conservativo, y las integrales de línea simplemente se evalúan en el punto final e inicial. Es decir,

$$W_i = f\left[\vec{\lambda}_i\left(t_f\right)\right] - f\left[\vec{\lambda}_i\left(t_i\right)\right]$$

(a) Se tendrá que:

$$\boxed{W_1 = \int_{\vec{\lambda}_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f\left(1,1,1\right) - f\left(0,0,0\right) = e}$$

(b) Análogamente,

$$\boxed{W_2 = \int_{\vec{\lambda}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f\left(0,0,0\right) - f\left(0,0,0\right) = 0}$$

Problema 4.18 Sobre el dominio $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 > 0\}$ considerar la forma diferencial

$$\omega\left(x,y,z\right) = \frac{ax+bz}{x^2+z^2}\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y - \frac{x}{x^2+z^2}\mathrm{d}z$$

(a) Determine a y b de modo que $\omega = \mathrm{d}f$ para alguna función f de clase $\mathcal{C}^1$ en el dominio $\mathcal{D}$.

(b) Sea $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$. Calcular el trabajo desarrollado por la fuerza $\mathbf{F}$ para desplazar una partícula desde el punto $\mathbf{p}_1$, de coordenadas $(1,0,0)$ al punto $\mathbf{p}_2$ en coordenadas $(1,2\pi,0)$, en los dos siguientes casos:

a) A lo largo de la recta que une $\mathbf{p}_1$ con $\mathbf{p}_2$.

b) A lo largo de una hélice

$$x\left(t\right) = \cos t \quad , \quad y\left(t\right) = t \quad , \quad z = \operatorname{sen} t.$$

(c) Explique el resultado obtenido en la pregunta (b).

Solución:

(a) La notación empleada puede resultar un poco confusa, pero una vez comprendida, notará que no es nada que no se haya preguntado antes. Recuerde que el teorema de Taylor plantea que:

$$f\left(\mathbf{x}+\mathbf{h}\right) \approx f\left(\mathbf{x}\right) + \vec{\nabla} f \cdot \mathbf{h}$$

Entonces, si nos desplazamos $\mathrm{d}\vec{\ell}$ (un diferencial muy pequeño de desplazamiento), se tendrá que:

$$f\left(\mathbf{x} + \mathrm{d}\vec{\ell}\right) \approx f\left(\mathbf{x}\right) + \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Simbólicamente hacemos $\mathrm{d}f = f\left(\mathbf{x} + \mathrm{d}\vec{\ell}\right) - f(\mathbf{x})$, con lo cual

$$\boxed{\mathrm{d}f = \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}.$$

Estas representaciones simbólicas, ampliamente utilizadas en Física, tienen bastante sentido: una variación pequeña en f evidentemente dependerá de la dirección (la tangente de la curva) en que nos desplacemos, y viene dada por la proyección del gradiente en la dirección. Esto es algo que tratamos de asimilar desde que se interpretó geométricamente el gradiente.

Observe que la forma diferencial ω puede compactarse como $\omega = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ donde

$$\mathbf{F} = \frac{ax + bz}{x^2 + z^2}\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{x}{x^2 + z^2}\hat{\mathbf{k}}$$

y $\mathrm{d}\vec{\ell} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$. Buscamos demostrar entonces que existe una función escalar f tal que $\omega = \mathrm{d}f$, o bien

$$\omega = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}f = \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Con encontrar a y b tales que $\vec{\nabla} f = \mathbf{F}$ se cumplirá lo pedido, o equivalentemente: ¿para qué valores de a y b $\mathbf{F}$ es conservativo? De acuerdo a lo ya estudiado, los primeros candidatos los obtenemos a partir de la condición necesaria:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$$

donde sea que $\mathbf{F}$ esté definida. Tenemos que:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0\,\hat{\mathbf{i}} + \left[\frac{b\left(x^2 + z^2\right) - 2z\left(ax + bz\right)}{\left(x^2 + z^2\right)^2} + \frac{\left(x^2 + z^2\right) - 2x^2}{\left(x^2 + z^2\right)^2}\right]\hat{\mathbf{j}} + 0\,\hat{\mathbf{k}}$$

Debemos anular la segunda componente con los valores escogidos. Para ello, reordenamos términos:

$$\frac{b\left(x^2 + z^2\right) - 2z\left(ax + bz\right)}{\left(x^2 + z^2\right)^2} + \frac{\left(x^2 + z^2\right) - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\left(b - 1\right)x^2 + \left(1 - b\right)z^2 - 2azx}{\left(x^2 + z^2\right)^2}$$

Requerimos que el denominador sea cero para todo valor de x y z, con lo cual por igualdad de polinomios:

$$\boxed{b = 1} \quad \text{y} \quad \boxed{a = 0}$$

son los únicos **candidatos** que pueden generar un campo conservativo. Cualquier otra combinación de valores no cumplirá con la condición necesaria de conservatividad.

Ahora bien, para garantizar que de esta forma el campo es conservativo en $\mathcal{D}$, debemos buscar la función de potencial y así demostrar lo pedido. Para ello, integramos mediante las técnicas habituales. Partamos por la componente y, pues resultar ser lo más sencillo. Sea f la función de potencial a buscar, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y \to f(x, y, z) = \frac{y^2}{2} + c(x, z)$$

Reemplazando en la tercera componente:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial z} = -\frac{x}{x^2+z^2} \to c\left(x,z\right) = -\frac{1}{x}\int \frac{\mathrm{d}z}{1+\left(z/x\right)^2} + d\left(x\right)$$

Evaluando la primitiva:

$$c\left(x,z\right) = -\arctan\left(\frac{z}{x}\right) + d\left(x\right) \to f\left(x,y,z\right) = \frac{y^2}{2} - \arctan\left(\frac{z}{x}\right) + d\left(x\right)$$

Reemplazando en la componente z, y asumiendo los valores dados de a y b:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(z/x\right)^2}\cdot\frac{z}{x^2} + d'\left(x\right) = \frac{z}{x^2+z^2} \to d'\left(x\right) = 0$$

Entonces, haciendo la constante arbitrariamente z, concluimos que:

$$\boxed{f\left(x,y,z\right) = \frac{y^2}{2} - \arctan\left(\frac{z}{x}\right)}$$

y por lo tanto los valores de a y b encontrados son los únicos que generan una función potencial de $\mathbf{F}$.

(b) Para ser cautelosos, calcularemos cada una de las integrales de línea por definición y haciendo uso de la conservatividad.

Para ambos casos, por conservatividad:

$$\boxed{W_c = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = f\left(1,2\pi,0\right) - f\left(1,0,0\right) = 2\pi^2}$$

Integrando de forma recta, una parametrización es:

$$\vec{\lambda}\left(t\right) = \left(1,t,0\right)$$

con $t\in[0,2\pi]$. Luego, $\mathrm{d}\vec{\ell} = \left(0,1,0\right)\mathrm{d}t$ y evaluando en el campo:

$$\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = t\,\mathrm{d}t$$

Entonces el trabajo en línea recta sería:

$$\boxed{W_r = \int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t = 2\pi^2.}$$

Es decir, coincide con el trabajo original. Ahora, parametrizando la hélice:

$$\vec{\lambda}_h\left(t\right) = \left(\cos t, t, \operatorname{sen} t\right) \to \mathrm{d}\vec{\ell} = \left(-\operatorname{sen} t, 1, \cos t\right)\mathrm{d}t$$

Reemplazando en el campo con los valores de a y b:

$$\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}} + t\,\hat{\mathbf{j}} - \cos t\,\hat{\mathbf{k}}$$

Es decir, en este caso

$$\int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t + t - \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\pi^2 - 2\pi$$

$$\rightarrow \boxed{W_h = 2\pi^2 - 2\pi}$$

con lo cual $W_h \neq W_c$ a pesar de estar integrando sobre los mismos puntos.

(c) Este resultado es menos extraño de lo que se puede pensar si es que se inspecciona adecuadamente $\mathcal{D}$ y se hace una revisión exhaustiva de los conceptos involucrados. Para pensando en el siguiente campo en $\mathbb{R}^2$ a modo de ejemplo:

$$\mathbf{F}^* = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

Si bien es fácil demostrar que $Q_x - P_y = 0$, ¿se atrevería a conjeturar que toda integral de línea depende exclusivamente de la posición final e inicial? O equivalentemente, ¿se atrevería a decir que toda integral de línea cerrada da cero como resultado?

¡No! Ya vimos para este ejemplo que eso no es así. Cualquier integral de línea que encierre a $(0,0)$ dará 2π como resultado. Esto prueba que basta que haya un punto entre medio del recorrido de la curva o que esta lo encierre parcialmente para que la integral no dependa exclusivamente de las posiciones final e inicial o que equivalentemente el trabajo sobre toda curva cerrada sea cero.

¿Y qué está ocurriendo acá? Para todo punto tal que $x = z = 0$ (el eje y) el campo no está definido pues los denominadores divergen. Al recorrer en línea recta el campo no estamos encerrando el eje y, de hecho nos estamos moviendo de forma paralela al eje (por lo que se dio la coincidencia de que los trabajos recto y por punto final menos punto inicial coincidían). Sin embargo, desde el minuto en que rodeamos al eje y con la hélice aparecen los problemas.

En conclusión, ocurre una suerte similar a lo que ocurre en el ejemplo de $\mathbb{R}^2$: la conservatividad tiene que garantizarse en un abierto simplemente conexo, y este no es el caso, pues existe toda una recta de puntos donde $\mathbf{F}$ no está definida.

Problema 4.19 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(-\dfrac{z}{x^2+z^2}, 0, \dfrac{x}{x^2+z^2}\right)$.

(a) Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo para $\{(x,y,z) : x > 0\}$ y encuentre un potencial para $\mathbf{F}$.

(b) Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene al intersectar el plano $x + y = 0$ con el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$. Calcule por definición:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell$$

¿Es $\mathbf{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^3$?

Solución:

(a) Demostremos que es conservativo encontrando el potencial. Integrando la primera componente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z}{x^2+z^2} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2} \longrightarrow f(x,y,z) = -\arctan\left(\frac{x}{z}\right) + g(y,z)$$

Reemplazando en la segunda componente:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \longrightarrow g(y,z) = h(z)$$

Reemplazando en la tercera componente:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{x^2+z^2} + h'(z) = \frac{x}{x^2+z^2} \longrightarrow h(z) = c$$

Es decir,

$$\boxed{f(x,y,z) = -\arctan\left(\frac{x}{z}\right) + c}$$

probando así la conservatividad. ■

(b) Una parametrización para la curva, que llamaremos Γ, se obtiene de la simetría dada por el elipsoide:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\cos\theta \\ y &= -\sqrt{2}\cos\theta \\ z &= \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Entonces, se tendrá que:

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \left(-\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, \cos\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

Asimismo,

$$\mathbf{F}(\Gamma) = \left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}, 0, \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} \right)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\sqrt{2}}{1+\cos^2\theta}$$

Es decir,

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{1+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}$$

Haciendo $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, la sustitución habitual para este caso, se tendrá que:

$$\boxed{\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell = 8\sqrt{2}\int_0^1 \frac{1+u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u = 4\pi}$$

Por lo tanto, $\mathbf{F}$ no es conservativo en $\mathbb{R}^3$, en particular debido a que la curva encierra a la línea $(x, y, z) = (0, y, 0)$, en la cual el potencial se indefine.

Problema 4.20 Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Pruebe que el campo:

$$\mathbf{F} = h\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x, y, z)$$

es conservativo en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

Solución:

Parta el lector por observar que existe una clara dependencia radial del campo. Digamos $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, entonces:

$$\mathbf{F} = h(r)(x, y, z)$$

Esto es un hecho muy importante, dado que comprender esto a su vez nos permitirá notar que la función de potencial –la cual buscamos para demostrar lo pedido– también debe ser radial. Digamos entonces que $f = f(r)$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = xh\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = yh\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'(r)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = zh\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Es decir, simultánemante deberá cumplirse que:

$$f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = xh(r) \to f'(r) = rh(r)$$

$$f'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = yh(r) \to f'(r) = rh(r)$$

$$f'(r)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = zh(r) \to f'(r) = rh(r)$$

Las tres ecuaciones plantean que f debe ser tal que $f'(r) = rh(r)$. Por lo tanto, debemos integrar de modo de obtener la función radial que se busca. En particular, podemos por ejemplo hacer:

$$f(r) = \int_{\xi}^{r} uh(u)\,\mathrm{d}u \to f'(r) = rh(r) \text{ por T.F.C.}$$

y cumplirá con la condición de ser una función potencial. Finalmente, concluimos que:

$$\boxed{f(x,y,z) = \int_{\xi}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} uh(u)\,\mathrm{d}u}$$

es una función potencial y por lo tanto el campo es conservativo en todo $\mathbb{R}^3$ salvo el origen. ■

Es fácil notar que no se cumple en el origen puesto que la función por regla de la cadena no puede ser diferenciable en dicho punto y por lo tanto no se satisface la condición necesaria.

Problema 4.21 Sea $\mathcal{C}$ cualquier curva que une el punto $(0,0,0)$ con $(1,1,1)$. Calcular:

$$\int_{\mathcal{C}} y^2z^2\,\mathrm{d}x + 2xyz^2\,\mathrm{d}y + 2xy^2z\,\mathrm{d}z$$

Solución:

El campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2z^2, 2xyz^2, 2xy^2z)$ está bien definido en todo punto y es claramente de clase $\mathcal{C}^1$. Asimismo, se puede notar con facilidad que es irrotacional, es decir:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$$

En consecuencia, podemos intuir (y probaremos) que existe una función f tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$, lo cual simplifica el cálculo de la integral de línea. Integramos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^2 \longrightarrow f(x,y,z) = xy^2z^2 + g(y,z)$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^2 = 2xyz^2 + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0 \longrightarrow g(y,z) = h(z)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xy^2z = 2xy^2z + h'(z) \longrightarrow h'(z) = 0 \longrightarrow h(z) = c$$

Es decir,

$$f(x,y,z) = xy^2z^2 + c$$

Concluimos por conservatividad de campos que:

$$\boxed{\int_C y^2z^2\,\mathrm{d}x + 2xyz^2\,\mathrm{d}y + 2xy^2z\,\mathrm{d}z = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 1}$$

Problema 4.22 Determinar si el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2z, x^2y)$ es un campo conservativo y en caso que lo sea encontrar su función potencial.

Solución:

Probémoslo calculando la función de potencial, de existir. Se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + \operatorname{sen} x \longrightarrow x^2yz - \cos(x) + g(y,z)$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z = x^2z + g(y,z) \longrightarrow g(y,z) = h(z)$$

Finalizamos determinando h:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y = x^2y + h'(z) \longrightarrow h'(z) = 0 \longrightarrow h(z) = c$$

Es decir,

$$\boxed{f(x,y,z) = x^2yz - \cos(x) + c},$$

por lo tanto el campo es cosnervativo. ■

Problema 4.23 Sea $\mathbf{F} = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, z^2)$.

(a) Demuestre que el campo es conservativo y encuentre una función potencial.

(b) Se define $f(x, y, z)$ como

$$\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell$$

Calcule $f(x, y, z)$ para todo punto sobre una curva arbitraria y decida justificadamente si f es una función potencial.

Solución:

(a) Se procede de forma análoga. Digamos que f^* es la función buscada tal que $\vec{\nabla} f = \mathbf{F}$, por lo cual debe cumplirse que:

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} = e^x \operatorname{sen}(y) \rightarrow f^*(x, y, z) = e^x \operatorname{sen}(y) + c(y, z)$$

Reemplazando con esta función de potencial,

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} = e^x \cos(y) + \frac{\partial c}{\partial y} = e^x \cos(y) \rightarrow \frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

Dado que no hay dependencia de y, entonces concluimos que $c = c(z)$ y no depende de y. Reemplazando ahora en la componente z:

$$\frac{\partial f^*}{\partial z} = c'(z) = z^2$$

entonces se comprueba que c depende exclusivamente de z /a esta altura el lector ya debe convencerse de que el campo es efectivamente conservativo, aún cuando no pueda calcular la integral en z). Integrando,

$$c'(z) = z^2 \rightarrow c(z) = \frac{z^3}{3} + d$$

Haciendo $d = 0$ de forma arbitraria,

$$\boxed{f^*(x, y, z) = e^x \operatorname{sen}(y) + \frac{z^3}{3}}$$

demostrando así que el campo es conservativo. ■

(b) Observe que la integral se puede despejar explícitamente puesto que ya demostramos que el campo es conservativo y tenemos la función de potencial f^* (no confundir con f). Entonces,

$$f(x,y,z) = \int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f^*(x,y,z) - f(1,1,1)$$

$$\rightarrow \boxed{f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen}(y) + \frac{z^3}{3} - e\operatorname{sen}(1) - \frac{1}{3}}$$

Notar que es una función de potencial es prácticamente trivial puesto que si tomamos su gradiente se elimina la constante:

$$\vec{\nabla} f = \vec{\nabla} f^* = \mathbf{F}$$

Ya estamos en condiciones conceptuales de revisar el siguiente problema, el cual explica todas las motivaciones para llamar a este tipo de funciones *conservativa*, dejando en evidencia la conexión y motivación física de estos contenidos.

Problema 4.24 **Un poco de mecánica clásica**. Sea $\mathbf{F}$ un campo conservativo y una partícula de masa m que se desplaza a través de una curva Γ parametrizada por $\vec{\lambda}(t)$ desde el punto $\mathbf{a}$ hasta el punto $\mathbf{b}$.

(a) Considere que existe una función escalar $f(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{F} = -\vec{\nabla} f$. Pruebe que:

$$f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}m\left\|\vec{\lambda}'(t_a)\right\|^2 = f(\mathbf{b}) + \frac{1}{2}\left\|\vec{\lambda}'(t_b)\right\|^2$$

Interprete físicamente este resultado.

(b) *Propuesto:* La ley anterior se conoce como la ley de conservación de la energía mecánica. Verifíquela para un cuerpo de masa $m = 1$ moviéndose a través del campo de fuerzas $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$ por el camino $\vec{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\lambda}(t) = (t,t^3)$.

Solución:

(a) Apliquemos adecuadamente todas las hipótesis. Partamos en primer lugar notando que $\mathbf{F} = -\nabla f$ implica que el campo es conservativo. Dada la linealidad del operador gradiente, basta hacer $g = -f$ para ver que se cumple la definición de conservatividad. Luego,

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \vec{\nabla} g \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = g(\mathbf{b}) - g(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})$$

Análogamente, dado que el campo representa fuerzas, entonces la partícula de masa m está sujeta a la Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\vec{\lambda}''(t)$$

donde recordamos que para una parametrización cualquiera $\vec{\lambda}(t)$ representa la aceleración instantánea en el instante t. De esta forma,

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = m\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \vec{\lambda}''(t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = m\int_{t_a}^{t_b} \vec{\lambda}''(t)\cdot \vec{\lambda}'(t)\,\mathrm{d}t$$

pero podemos identificar con lo ya estudiado en Cálculo II que $\vec{\lambda}''(t)\cdot\vec{\lambda}'(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\vec{\lambda}'(t)\right\|^2$. Es decir,

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{1}{2}m\int_{t_a}^{t_b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\vec{\lambda}'(t)\right\|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\left\|\vec{\lambda}(t_b)\right\|^2 - \frac{1}{2}m\left\|\vec{\lambda}'(t_a)\right\|^2$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{1}{2}m\left\|\vec{\lambda}(t_b)\right\|^2 - \frac{1}{2}m\left\|\vec{\lambda}'(t_a)\right\|^2 = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})$$

$$\rightarrow \boxed{f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}m\left\|\vec{\lambda}'(t_a)\right\|^2 = f(\mathbf{b}) + \frac{1}{2}\left\|\vec{\lambda}'(t_b)\right\|^2} \quad \blacksquare$$

De lo ya estudiado sobre curvas, sabemos que $\vec{\lambda}'(t)$ representa la velocidad instantánea en el instante t, y por lo tanto $\left\|\vec{\lambda}'(t)\right\|$ representa la rapidez de la partícula en el instante t. Se sigue por lo tanto que $m\left\|\vec{\lambda}'(t)\right\|^2/2$ representa su energía cinética en dicho instante.

Luego, considerando que $f(\mathbf{p})$ es la función de potencial en el instante $\mathbf{p}$, es intuitivo pensar que este resultado enunciado que la energía mecánica en un campo conservativo se conserva ante ausencia de perturbaciones externas ($\mathbf{F}$ la única fuerza actuando). He aquí la razón y motivación histórica por la cual este tipo de funciones $\mathbf{F}$ se dicen *conservativas*.

Para el siguiente problema, basta demostrar que el campo es conservativo, un proceso más que sencillo, para demostrar y verificar el resultado anteriormente demostrado. Por lo tanto, ese problema se deja propuesto al lector.

Antes de seguir, revisemos brevemente las condiciones necesarias de conservatividad en $\mathbb{R}^3$. Dado que se tienen que cumplir todas las condiciones de igualdad en las derivadas parciales, podemos escribirlas todas, pero de una forma en particular:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

Recuerde el lector que el operador nabla se definía como:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

para el cual se pueden aplicar todas las operaciones vectoriales habituales, considerando en vez de una multiplicación de la derivada. Por ejemplo, ya estudiamos el caso del vector gradiente, el cual puede entenderse como que el vector nabla se está "ponderando" por el escalar f:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Definimos también el operador laplaciano, haciendo el abuso de notación similar:

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

De forma análoga, en lo que queda de curso emplearemos el operador nabla sobre campos, en vez de las aplicaciones habituales sobre funciones escalares.

Consideremos $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, entonces usando el operador nabla tenemos por ejemplo que:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

La expresión $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}$ se conoce como la **divergencia** de $\mathbf{F}$ y en breve la estudiaremos en más detalle. Análogamente, podemos incluso tomar el otro producto vectorial existen en $\mathbb{R}^3$: el producto cruz entre $\vec{\nabla}$ y $\mathbf{F}$. De esta forma,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}} \tag{4.10}$$

La expresión $\vec{\nabla} \times \mathbf{F}$ se conoce como el **rotor** de $\mathbf{F}$ y también la estudiaremos en más detalle próximamente.

¿De qué sirve todo este preludio? Podemos compactar con facilidad las condiciones necesarias de conservatividad del campo en $\mathbb{R}^3$ simplemente como:

$$\mathbf{F} \ : \ \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ es conservativo} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$$

Problema 4.25 Pruebe que $\mathbf{F} = \left(e^{y^2 z} + 2xy^2, 2xyze^{y^2 z}, xy^2 e^{y^2 z} \right)$ no es conservativo pero que existe una función $f = f(t)$ de modo que

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \left(e^{y^2 z} + 2xy^2, 2xyze^{y^2 z} + \frac{f(xy)}{y}, xy^2 e^{y^2 z} \right)$$

es conservativo y encuéntrela.

Solución:

Demostrar que no es conservativo no debiese ser complicado en cuanto a planteamiento, puesto

que basta demostrar que alguna de las combinaciones de derivadas del teorema de la condición necesaria no se igualan. Es decir, en virtud de lo anterior, basta probar que $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} \neq 0$.

Calcular el rotor puede ser bastante tedioso, pero notando que nos basta solo probar que una componente no se anula, podemos elegir inteligentemente aquella que predecimos que no se anulará. ¿Cuál? Seamos astutos, $\mathbf{G}$ se redefine posteriormente agregando una función exclusivamente de x e y en la componente y, por lo cual calculamos la componente del rotor que involucra x e y, la tercera:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2yze^{y^2z} - 2yze^{y^2z} - 4xy \neq 0$$

luego el campo no es conservativo pues no cumple la condición necesaria. ■

Para $\mathbf{G}$, observe que la misma anterior se reescribe como:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2yze^{y^2z} + f'(xy) - 2yze^{y^2z} - 4xy$$

haciendo uso de la regla de la cadena. Buscamos que esta componente sea cero para cumplir la condición necesaria. Entonces, deberá cumplirse que:

$$f'(xy) = 4xy \to f'(t) = 4t \to \boxed{f(t) = 2t^2 + c}$$

por lo tanto cualquier función de la familia de curvas $2t^2 + c$ cumplirá la condición necesaria a priori. Revisemos las otras dos condiciones necesarias:

$$\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} = \left(2xye^{y^2z} + 2xy^3ze^{y^2z}\right) - \left(2xye^{y^2z} + 2xy^3ze^{y^2z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial G_z}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial z} = y^2e^{y^2z} - y^2e^{y^2z} = 0$$

por lo cual f satisface lo pedido para cualquier valor de c.

Hasta ahora hemos demostrado que los f encontrados satisfacen la condición necesaria $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$. Al igual que para el caso $\mathbb{R}^2$ estamos próximos a demostrar que bajo ciertas hipótesis adicionales esta también es una condición suficiente. Dado que por ahora no podemos hacer eso, deberá buscarse la función de potencial para:

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \left(e^{y^2z} + 2xy^2, 2xyze^{y^2z} + 2x^2y + \frac{c}{y}, xy^2e^{y^2z}\right)$$

Integrando la primera componente con respecto a x:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{y^2z} + 2xy^2 \to g(x, y, z) = xe^{y^2z} + x^2y^2 + \varphi(y, z)$$

Reemplazando en y:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2xyze^{y^2z} + 2x^2y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = 2xyze^{y^2z} + 2x^2y + \frac{c}{y}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = \frac{c}{y} \rightarrow \varphi(y,z) = c\ln(y) + \psi(z)$$

entonces hasta ahora $g(x,y,z) = xe^{y^2z} + x^2y^2 + c\ln(y) + \psi(z)$. Reemplazando en z:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = xy^2e^{y^2z} + \psi'(z) = xy^2e^{y^2z} \rightarrow \psi'(z) = 0 \rightarrow \psi(z) = d$$

Haciendo d arbitrariamente z demostramos que la función de potencial es:

$$\boxed{g(x,y,z) = xe^{y^2z} + x^2y^2 + c\ln(y)}$$

y por lo tanto efectivamente toda la familia de curvas $\boxed{f(t) = 2t^2 + c}$ satisface la conservatividad de **G**. ■

Propuesto Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ definida en $\mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\oint_{\lambda} f\left(x^2+y^2\right)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = 0$$

donde $\lambda : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es cualquier camino cerrado.

4.3. El Teorema de Green

Partamos enunciando el Teorema de Green, el cual es el primer teorema importante del Cálculo Vectorial, y que posteriormente será generalizado a $\mathbb{R}^3$ y posiblemente a dimensiones con n mayor[1].

Teorema: Teorema de Green. Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (P,Q)$ un campo de clase $\mathcal{C}^1$ definido en el abierto simplemente conexo U de $\mathbb{R}^2$ ($\approx$ $\mathbf{F}$ debe estar definido en todo punto). Sea $\mathcal{S} \subset U$ una región compacta (cerrada y acotada) con su frontera $\partial\mathcal{S}^+$ positivamente orientada. Entonces

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.11}$$

donde $\vec{\lambda}$ es una parametrización de la curva de clase C^1 cuya traza es ∂S^+.

Observación importante: La región por hipótesis es simplemente conexa, razón por la cual no pueden producirse *angostamientos* en la región (regiones del tipo dos triángulos unidos por un vértice). Luego, la frontera de la región es una curva **simple**, esto es, no puede intersectarse a sí misma en ningún punto. ¿Cómo podríamos aplicar el teorema si esto no se cumple?

[1] No es el objetivo de este curso, pero de hecho todos estos resultados quedan perfectamente generalizados en $\mathbb{R}^n$ mediante el estudio de las formas diferenciales. Pita Ruiz es un excelente texto para profundizar en estos tópicos.

Un comentario: Observe que este teorema realiza una conexión entre fenómenos de contorno (la integral de línea) de una región para una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y lo que ocurre al interior la región para expresiones diferenciales de esa misma función. Es siempre bueno tener presente el siguiente esquema al momento de recordar y comprender este teorema:

$$\text{contorno de } \mathcal{S} \xleftrightarrow{\text{Teo. de Green}} \text{interior de } \mathcal{S}$$

Este resultado es mucho más natural de lo que realmente parece, pues de hecho, ya lo hemos realizado antes a lo largo del estudio de los cursos de cálculo. ¿Dónde? El Teorema Fundamental del Cálculo enuncia que siendo F una primitiva de f, entonces:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

donde nuevamente, estamos evaluando el contorno de un intervalo (lado derecho de la ecuación) e igualándolo a una expresión diferencial de F (en particular, su derivada simplemente) dentro del interior del intervalo.

¡En efecto! El Teorema de Green no es más que una generalización a $\mathbb{R}^2$ de esta asociación diferencial contorno−interior. Terminado el estudio de este teorema, nos queda por estudiar el caso de $\mathbb{R}^3$, donde existen dos de estas generalizaciones: el Teorema de la Divergencia y el Teorema del Rotor (Kelvin−Stokes)[2]. Estos tres teoremas por su aplicación práctica son dignos de ser llamados los tres grandes teoremas del Cálculo Vectorial.

El siguiente problema no requiere más que la aplicación del Teorema de Green, y será nuestro punto de partida para los próximos problemas.

Problema 4.27 Utilice el Teorema de Green para calcular:

$$\oint_\Gamma \left(2y + \sqrt{9+x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(5x + e^{\arctan y}\right)\mathrm{d}y$$

siendo Γ la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ recorrida positivamente.

Solución:

Este problema tiene un carácter básico y solo busca introducir adecuadamente al lector a las hipótesis y aplicaciones del teorema. Una de ellas, es simplificar drásticamente el cálculo de integrales de línea. ¿Cómo? Convirtiendo un fenómeno de contorno complejo, a un fenómeno de área más sencillo de evaluar.

En efecto, ¿sería sencillo evaluar la integral de línea parametrizando la curva? La respuesta es un no rotundo. Sin embargo, observemos que el campo es indiscutiblemente de clase $\mathcal{C}^1$, la curva, la región simplemente conexa y una parametrización para la circunferencia orientada positivamente ya está considerada por hipótesis del problema (en caso de haber sido con la otra orientación, basta anteponer un signo − al resultado final).

[2] Y el lector interesado puede continuar sus estudios con el Teorema de Stokes, el cual generaliza magistralmente todas estas ideas para variedades diferenciales en $\mathbb{R}^n$.

Entonces podemos aplicar el Teorema de Green. Digamos que $P = 2y + \sqrt{9+x^2}$ y $Q = 5x + e^{\arctan y}$. Es decir,

$$\oint_\Gamma \left(2y + \sqrt{9+x^2}\right) \mathrm{d}x + \left(5x + e^{\arctan y}\right) \mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$$

pero $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 5$ y $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2$, con lo cual:

$$\oint_\Gamma \left(2y + \sqrt{9+x^2}\right) \mathrm{d}x + \left(5x + e^{\arctan y}\right) \mathrm{d}y = 3 \iint_S \mathrm{d}A$$

y la integral doble corresponde simplemente al área de una circunferencia de radio a, la cual no requiere ningún cálculo adicional pues ya es sabido que corresponde a πa^2. Finalmente,

$$\boxed{\oint_\Gamma \left(2y + \sqrt{9+x^2}\right) \mathrm{d}x + \left(5x + e^{\arctan y}\right) \mathrm{d}y = 3\pi a^2}$$

lo cual es evidentemente mucho más sencillo que calcular la integral de línea. Es decir, el Teorema de Green es otra forma de calcular integrales de línea de forma rápida **solo si estas son sobre curvas cerradas**. Como adelanto, observe que esto evidentemente prueba que el campo en cuestión **no** es conservativo.

Problema 4.28 Calcule

$$\oint_{\partial \mathcal{D}^+} \left(e^x \operatorname{sen} y - xy^2\right) \mathrm{d}x + \left(e^x \cos y + x^2 y\right) \mathrm{d}y$$

donde $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}$.

Solución:

Aplicamos el teorema directamente. Primero derivamos:

$$Q_x = e^x \cos y + 2xy \quad \text{y} \quad P_y = e^x \cos y - 2xy$$

Es decir,

$$Q_x - P_y = 4xy$$

En otras palabras,

$$\oint_{\partial \mathcal{D}^+} \left(e^x \operatorname{sen} y - xy^2\right) \mathrm{d}x + \left(e^x \cos y + x^2 y\right) \mathrm{d}y = 4 \iint_{\mathcal{D}} xy \, \mathrm{d}A$$

Sin embargo, puede notarse que $\mathcal{D}$ es una región simétrica en torno a ambos ejes y xy es una función con una simetría en particular: en los cuadrantes 1 y 3 las funciones son simétricas en torno al origen y de forma similar para los cuadrantes 2 y 4. Asimismo, el cuadrante 1 y 2

tienen la misma forma y signo opuesto y los cuadrantes 3 y 4 de forma similar. Bajo estas dos consideraciones puede intuirse que la integral es cero. ¡Comprobémoslo!

Hagamos:

$$\begin{cases} x &= \dfrac{r}{3}\cos\theta \\ y &= \dfrac{r}{4}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \longrightarrow \mathrm{d}A = \begin{vmatrix} \cos\theta/3 & -r\operatorname{sen}\theta/3 \\ \operatorname{sen}\theta/4 & r\cos\theta/4 \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, 6]$. Es decir,

$$\mathrm{d}A = \frac{r}{12}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Entonces,

$$\iint_{\mathcal{D}} xy\,\mathrm{d}A = \int_0^6 \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{144}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \frac{1}{144}\int_0^6 r^3\mathrm{d}r \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}_{0}$$

Comprobamos así (y concluimos) que:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}^+} \left(e^x\operatorname{sen}y - xy^2\right)\mathrm{d}x + \left(e^x\cos y + x^2y\right)\mathrm{d}y = 0$$

4.3.1. Aplicaciones del Teorema de Green

Enunciado ya el Teorema de Green, revisaremos algunas de sus aplicaciones, más allá del simple cálculo de integrales de línea que pueden resultar imposibles por cálculo directo.

Uno de los primeros corolarios del teorema es que, bajo ciertas hipótesis adicionales, la condición necesaria de conservatividad $Q_x = P_y$ se convierte en una condición suficiente, tal como demostraremos a continuación.

Problema 4.29 Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ una región abierta y simplemente conexa y $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo de clase $\mathcal{C}^1$ definido en todo punto de $\mathcal{S}$. Demuestre que la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

es una condición suficiente para afirmar que $\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathcal{S}$.

Solución:

Consideremos una región compacta, simplemente conexa y arbitraria contenida en $\mathcal{S}$, la cual denominaremos $\mathcal{R}$. Luego, $\partial\mathcal{R}^+$ define una curva simple cerrada que puede ser parametrizada de clase $\mathcal{C}^1$. Por hipótesis $\mathbf{F}$ es un campo de clase $\mathcal{C}^1$ que estará definido en **todo punto** de

$\mathcal{R}$ pues lo está para **todo** punto de $\mathcal{S}$ (observe que si para un punto no se cumpliera, toda la demostración queda en nada). Luego, se cumplen las hipótesis del Teorema de Green y así se tiene que:

$$\oint_{\partial\mathcal{R}^+} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$$

pero $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ por hipótesis, con lo cual

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

para toda curva arbitraria simple (¿qué pasa si es simple a tramos?). Dado que se cumple para toda curva cerrada contenida en $\mathcal{S}$, concluimos que el campo es conservativo. ■

De esta forma, la condición necesaria de conservatividad junto a las hipótesis del Teorema de Green entregan una condición suficiente para asegurar que el campo es conservativo.

Problema 4.30 Sean $\varphi, \psi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ definidas en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\oint_{\Gamma} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \psi(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

donde $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es cualquier camino cerrado cuya imagen está contenida en el plano $y = |x|$.

Propuesto: ¿Qué puede decir de

$$\oint_{\Gamma} (\varphi(x) + y)\,\mathrm{d}x + (\psi(y) + x)\,\mathrm{d}y?$$

Solución:

Este no es más que un corolario de la pregunta anterior. La región es simplemente conexa y el campo $\mathbf{F} = (\varphi, \psi)$ de clase $\mathcal{C}^1$ pues sus componentes lo son. Luego, derivando cruzado y notando la dependencia de las funciones:

$$Q_x - P_y = 0 - 0$$

con lo cual:

$$\oint_{\Gamma} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \psi(y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} 0\,\mathrm{d}A = 0$$

demostrando así lo pedido. ■

Note que la integral de línea solo tiene sentido para Γ tal que las funciones estén evaluadas en

el intervalo I. Donde no están definidas las funciones, no tiene sentido hablar de integrales de línea.

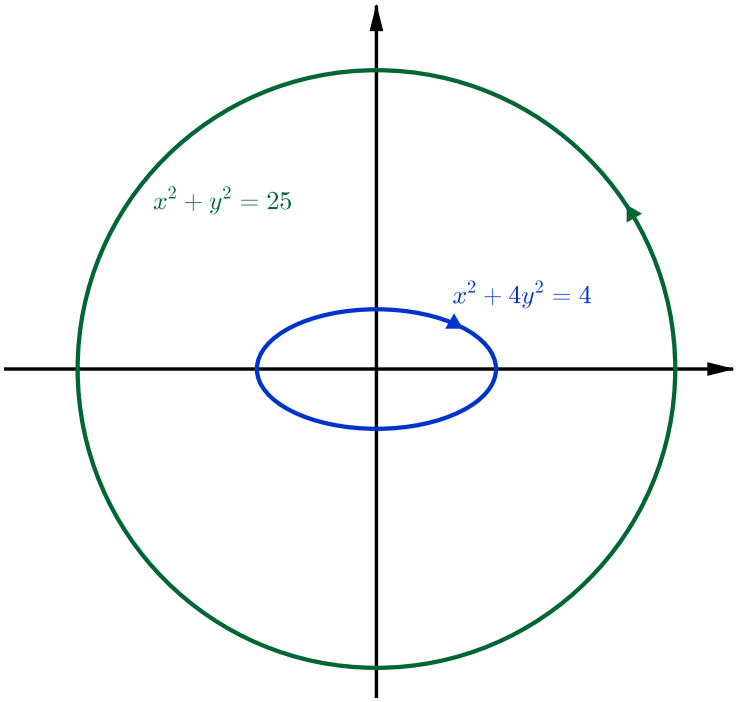
Problema 4.31 Calcule

$$\int_\gamma \left(x^{-x^2/2} - y\right) \mathrm{d}x + \left(e^{-y^2/2} + x\right) \mathrm{d}x$$

siendo γ el contorno de la región entre las curvas $x^2 + y^2 = 25$ orientada en el sentido antihorario y $x^2 + 4y^2 = 4$ orientada en sentido horario.

Solución:

Grafiquemos ambas curvas con sus respectivas orientaciones:



Podemos aplicar el Teorema de Green directamente pues se satisfacen las hipótesis, en particular las curvas están correctamente orientadas. Para ello, primero derivamos:

$$Q_x = 1 \quad \text{y} \quad P_y = -1$$

Es decir,

$$\int_\gamma \left(x^{-x^2/2} - y\right) \mathrm{d}x + \left(e^{-y^2/2} + x\right) \mathrm{d}x = 2 \iint_S \mathrm{d}A$$

El área es la resta entre área de la circunferencia y el área de la elipse. La primera es 25π y la segunda es 2π (semiejes 2 y 1). Finalmente,

$$\boxed{\int_\gamma \left(x^{-x^2/2} - y\right) \mathrm{d}x + \left(e^{-y^2/2} + x\right) \mathrm{d}x = 46\pi}$$

Problema 4.32 Considere el campo vectorial $\mathbf{F}\,(x, y) = (e^x y, e^x + 3x)$.

(a) Calcule la integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre el circulo de radio uno centrado en el origen, orientado de manera positiva.

(b) Sea Γ_1 una curva simple desde el origen hasta el punto $(2, 0)$ que se mantiene en el primer cuadrante del plano xy y sea Γ_2 una curva simple desde el origen hasta el punto $(2, 0)$ que se mantiene en el cuarto cuadrante del plano xy. Si Γ_1 y Γ_2 encierran entre ellas una región $\mathcal{R}$ de área 5, demuestre que:

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + 15.$$

Solución:

(a) Partamos notando que el campo es indiscutiblemente no conservativo, pues:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x + 3 - e^x = 3 \neq 0$$

pero podemos usar el Teorema de Green pues la región es simplemente conexa y el campo definido en todo $\mathbb{R}^2$, además de ser evidentemente de clase $\mathcal{C}^1$. La frontera viene a ser la circunferencia dada y la denotamos Γ, y su interior el círculo, denotado por $\mathcal{R}$. Luego, simplemente tendremos que:

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \iint_{\mathcal{R}} 3 \, \mathrm{d}A \\ &= 3 \iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}A \end{aligned}$$

dado que simplemente tenemos que calcular el área de una circunferencia de radio 1, aplicamos la fórmula ya conocida, concluyendo que:

$$\boxed{\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 3\pi}$$

(b) Pensemos en la traza de ambas curvas en el gráfico. Es fácil notar que las trazas unidas generan el área en cuestión y una curva cerrada que denotaremos Γ^*. Entonces, dado que se cumplen todas las hipótesis del Teorema de Green, tendremos que:

$$\oint_{\Gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{R}^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = 3 \iint_{\mathcal{R}^*} \mathrm{d}A$$

pero sabemos que dicha área es 5, entonces:

$$\oint_{\Gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 15.$$

Ahora podemos escribir Γ^* en función de Γ_1 y Γ_2. Tenemos que Γ_2 está recorrida positivamente, por lo cual no genera ningún problema con respecto a las hipótesis del teorema. Sin embargo, Γ_1 está recorrida en sentido negativo, razón por la cual $-\Gamma_1$ está postivamente orientada.

Luego, $\Gamma^* = \Gamma_2 \cup -\Gamma_1$ y aplicando propiedades de las integrales de línea:

$$\oint_{\Gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 15$$

Es decir,

$$\boxed{\int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + 15} \quad \blacksquare$$

A continuación revisaremos una de las aplicaciones útiles del teorema en la **completación de curvas** para calcular una integral de línea para la cual resulta complicada su cálculo por definición. Revisemos el procedimiento en un modo general.

Sea $\mathbf{F}$ un campo de clase $\mathcal{C}^1$ simplemente conexo en el abierto simplemente conexo $\mathcal{S}$ y Γ una curva en $\mathcal{S}$. Si se pide calcular

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

y esta resulta una expresión difícil de calcular pero la integral doble de $Q_x - P_y$ es significativamente más sencilla, se puede "completar" la curva con una nueva curva Γ_1 de modo que esta quede cerrada y que esta curva agregada sea en efecto fácil de integrar (i.e. una recta en la mayoría de los casos). Por aditividad de la integral de línea, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \oint_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{-\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\
&= \oint_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{-\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\
&= \oint_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}
\end{aligned}$$

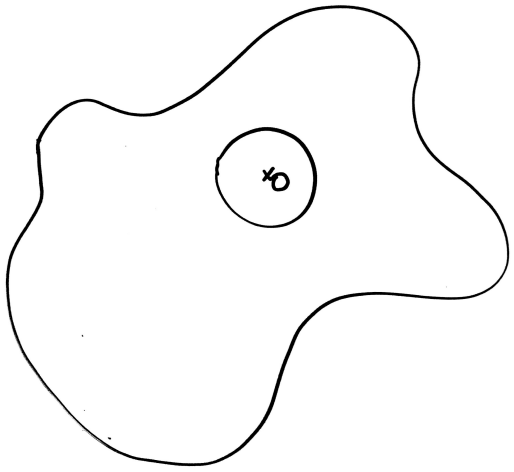
La última curva satisface todas las hipótesis del Teorema de Green, razón por la cual

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

y de esta forma por medio de la expresión de la derecha se puede calcular el resultado de la integral de línea.

Antes de comenzar revisaremos una pregunta para verificar que conceptualmente la idea esté clara:

Problema 4.33 Considere el campo $\mathbf{F} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ y la región $\mathcal{R}$ tal como se indica en la siguiente figura:



La región $\mathcal{R}$ es exterior al círculo e interior a la curva de forma arbitraria.

(a) Dibuje la orientación correcta de las curvas para aplicar el Teorema de Green.

(b) Calcule por definición la integral de línea de la circunferencia anterior recorrida en sentido antihorario. Asuma radio ϵ.

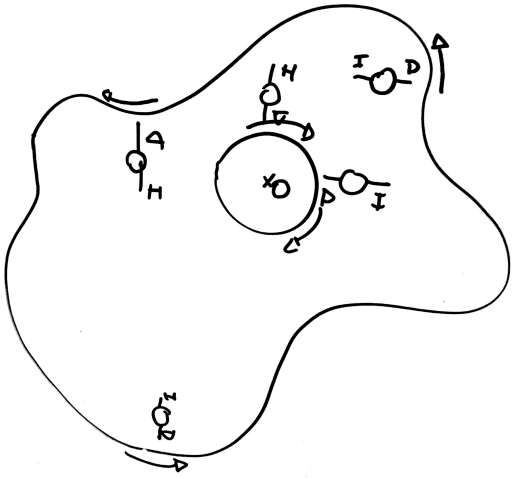
(c) Calcule el valor de la integral de línea de la curva exterior. ¿Depende de la forma de la traza?

Solución:

(a) Para trazar correctamente la orientación nos basamos en la siguiente regla:

"Si estoy de pie dentro de la región y la frontera está a mi derecha, entonces la curva que recorre la frontera se dirige hacia adelante mío."

Aplicando esta regla se obtienen las siguientes orientaciones, tal como se muestra en la siguiente figura:



(b) Considerando que esta está centrada en el origen, podemos entonces parametrizar con coordenadas polares:

$$\mathbf{r}\,(t) = (\epsilon \cos t, \epsilon \operatorname{sen} t)$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Luego,

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (-\epsilon \operatorname{sen} t, \epsilon \cos t)\,\mathrm{d}t$$

Reemplazando en el campo:

$$\mathbf{F}\,(\mathbf{r}) = \left(\frac{\epsilon \operatorname{sen} t}{\epsilon^2}, -\frac{\epsilon \cos t}{\epsilon^2}\right)$$

Luego,

$$\mathrm{d}W = -\frac{\epsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}{\epsilon^2} - \frac{\epsilon^2 \cos^2 t}{\epsilon^2}\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t$$

Integrando,

$$\boxed{\oint_{\circ^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = -2\pi}$$

(c) Puede resultar en extremo tentador querer aplicar el Teorema de Green para resolver este problema, pues nada sabemos sobre la forma de la curva. Sin embargo, debe tenerse claro que esto no puede hacerse pues la curva encierra al punto $(0, 0)$ y el campo no está definido en este punto, razón por la cual no se cumplen las hipótesis del teorema.

Sin embargo, podemos notar que la curva $\circ^- \cup \Gamma$ sí cumple las hipótesis del Teorema de Green pues no encierra al origen. Luego,

$$\oint_{\circ^- \cup \Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$$

Evaluamos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Entonces,

$$\oint_{\circ^- \cup \Gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \longrightarrow \oint_{\circ^-} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

Pero $\oint_{\circ^-} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\oint_{\circ^+} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi$. Concluimos así que:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -2\pi}$$

Se puede observar que entonces el resultado **no depende de la forma que tenga la curva exterior** y **se recomienda comprender y memorizar este procedimiento**, ya que abarca una gran tipología habitual de problemas.

Esto es lo que aplicaremos en los siguientes problemas:

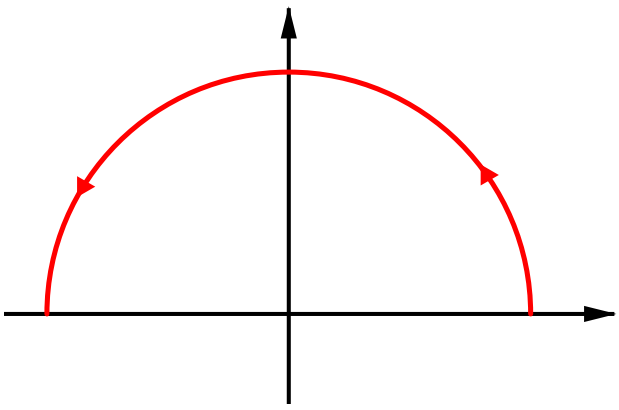
Problema 4.34 Calcule la integral de línea

$$\int_{\gamma} -y\,\mathrm{d}x + \left(x + \arctan\left(y+y^2\right)\sinh^2 y\right)\mathrm{d}y$$

donde γ es la porción de la circunferencia $x^2+y^2=1$ con $y \geq 0$ positivamente orientado.

Solución:

Grafiquemos la porción de circunferencia:



Evidentemente calcular la integral de línea por definición puede resultar muy complicado de acuerdo a las expresiones que aparecen. Podríamos aplicar el Teorema de Green y simplificar el problema si es que la curva fuera cerrada, **pero no lo es**. ¿Podemos solucionar este problema? Aplicando las indicaciones antes de comenzar los problemas, sí es posible.

Cerremos la curva agregando el segmento que falta cruzando por el eje X. Es decir, agregamos la curva:

$$\gamma^* \,:\, \mathbf{r}\,(t) = (t, 0) \quad t \in [-1, 1]$$

Y por lo tanto sí se puede aplicar el teorema en la curva $\Gamma = \gamma \cup \gamma^*$. En otras palabras,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} (Q_x - P_y)\, \mathrm{d}A$$

Se tiene que:

$$Q_x = 1 \quad \text{y} \quad P_y = -1$$

Es decir,

$$\iint_{\mathcal{S}} 2\, \mathrm{d}A = 2 \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}A = \pi$$

Es decir,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \pi$$

Si calculamos la integral de γ^*, algo que resultará sustancialmente más sencillo, podemos despejar de esta ecuación el valor de la integral de línea sobre γ, que es justamente lo que estamos buscando.

De acuerdo a la parametrización, se tiene que:

$$\mathbf{F}\,(\mathbf{r}) = (0, t)$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (1, 0)\, \mathrm{d}t$$

$$\longrightarrow \int_{\gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

Finalmente, concluimos que:

$$\boxed{\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\gamma} -y\, \mathrm{d}x + \left(x + \arctan\left(y + y^2\right) \sinh^2 y\right) \mathrm{d}y = \pi}$$

Las dos ideas anteriores las podemos incluso sintetizar en un solo problema:

Problema 4.35 Calcule la integral de línea $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ si:

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad ; \quad Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

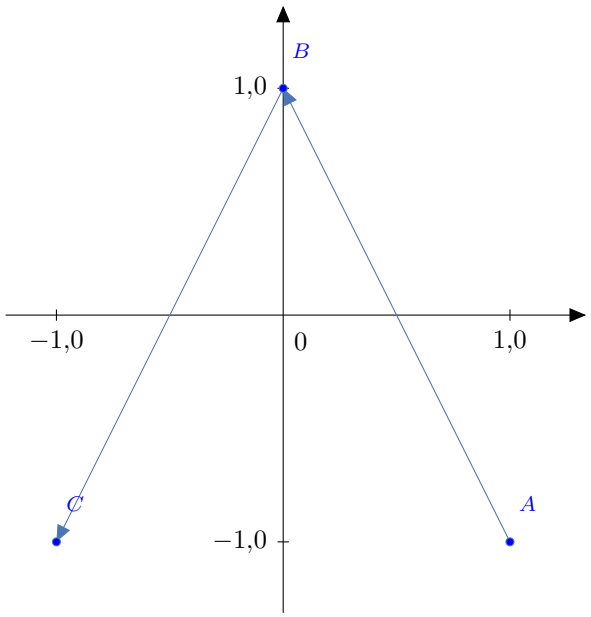
y Γ es la curva cuyos segmentos rectos pasan por los vértices $(1,-1)$, $(0,1)$ y $(-1,-1)$ de forma secuencial.

Solución:

Hay que partir notando dos cosas:

- La curva **NO** es cerrada. La traza son solamente dos lados de un triángulo.
- Integrar de forma directa puede ser en extremo tedioso pensando en las expresiones resultantes que pueden aparecer.

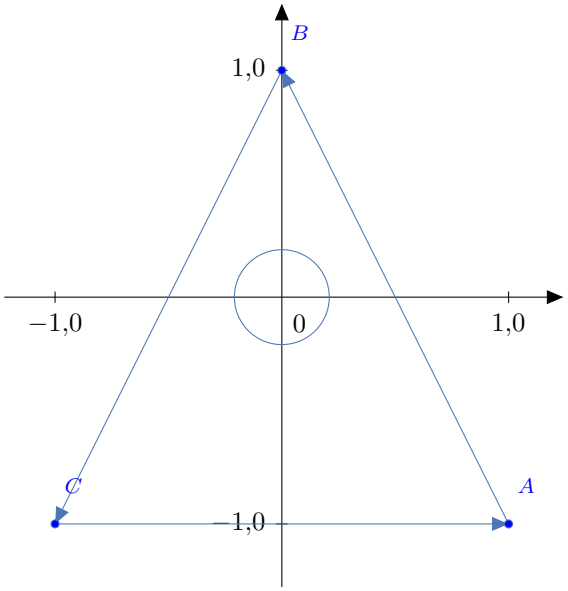
¿Podemos usar el Teorema de Green? Observe la curva en cuestión:



Si agregamos el segmento faltante, tendremos una curva cerrada pero que no satisface las hipótesis del teorema. En particular, no satisface la condición de estar definida en todos los puntos: no lo está en el origen pues ahí el campo se indetermina.

Sin embargo, recurriremos ahora a un truco habitual para resolver este tipo de problemas: podemos excluir dicha región agregando una curva cerrada al interior. De esta forma, se generará una

región para la cual sí se cumplen las condiciones del Teorema de Green [a]. Dado que aparece una simetría radial, agreguemos una circunferencia de radio ϵ lo suficientemente pequeño centrada en el origen. En particular, idealmente hacemos $\epsilon \to 0$. Se obtiene una región como la siguiente:



Apliquemos ahora el teorema. Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$. Partimos calculando:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Entonces en la región del triángulo descartando la circunferencia, la cual denotaremos $\mathcal{R}^*$, se tendrá que:

$$\iint_{\mathcal{R}^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = 0.$$

De hecho, este resultado se cumplirá para cualquier región que no incluya al origen, y por lo tanto para cualquier curva cerrada y simple que no encierre el origen el trabajo será cero. Se sigue entonces que:

$$\to \oint_{\partial \mathcal{R}^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

pero

$$\oint_{\partial \mathcal{R}^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{\triangle} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \oint_{-\circ_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

donde $-\circ_\epsilon$ representa la circunferencia recorrida en sentido horario (para ser coherentes con el teorema) y $\triangle$ representa el triángulo completo recorrido con orientación positiva. Luego, por

álgebra de integrales de línea:

$$\underbrace{\oint_{\partial\mathcal{R}^*} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}_{=0} = \underbrace{\oint_{\triangle} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}_{\text{desconocida}} - \underbrace{\oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}_{\text{por calcular}}$$

Calculemos la integral que nos falta, por definición. Parametrizamos la curva:

$$\vec{\lambda}(t) = (\epsilon\cos t, \epsilon \operatorname{sen} t) \to \mathrm{d}\vec{\ell} = (-\epsilon \operatorname{sen} t, \epsilon\cos t)\,\mathrm{d}t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. El campo evaluado en la curva viene dado por:

$$\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = \left(\frac{\epsilon \operatorname{sen} t}{\epsilon^2}, -\frac{\epsilon\cos t}{\epsilon^2}\right)$$

Entonces, la integral se escribe como:

$$\oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}{\epsilon^2} + \frac{\epsilon^2\cos^2 t}{\epsilon^2}\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t$$

Notar que se elimina la dependencia de ϵ, por lo cual es irrelevante hacer $\epsilon \to 0$ al obtener siempre el mismo resutlado. Entonces,

$$\to \oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -2\pi$$

Es decir,

$$\oint_{\triangle} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -2\pi$$

pero $\oint_{\triangle} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ donde γ es el segmento agregado.

Este segmento puede ser parametrizado como:

$$\vec{\gamma}(t) = (t, -1) \quad \text{con } t \in [-1, 1]$$

con lo cual se respeta la orientación de la curva. Luego, $\mathrm{d}\vec{\ell} = (1, 0)\,\mathrm{d}t$ y la integral sobre γ se reescribe como:

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = -\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -2\arctan(t)\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}$$

Es decir, reemplazando con todas las expresiones:

$$-2\pi = \int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2} \to \boxed{\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = -\frac{3\pi}{2}}$$

con lo cual finalmente llegamos al resultado pedido.

[a] Puede impactar un poco la idea de que la traza de la curva sea discontinua, pero la parametrización sigue cumpliendo con la condición de ser suave a tramos, por lo cual no hay real problema.

Evaluemos todo lo repasado en la siguiente pregunta, a nivel de dificultad de una evaluación del curso:

Problema 4.36 Sea γ la curva formada por la unión de la parte superior de una semicircunferencia de radio 1, centrada en el origen y con extremos en los puntos $\mathbf{O} = (1,0)$ y $\mathbf{P} = (-1,0)$ y los segmentos de recta $\overline{\mathbf{PQ}}$, $\overline{\mathbf{QR}}$ y $\overline{\mathbf{RS}}$ con $\mathbf{Q} = (-1,-1)$, $\mathbf{R} = (0,-2)$ y $\mathbf{S} = (1,-1)$.

Sea $\vec{\alpha}$ una parametrización de γ recorrida positivamente (i.e. en sentido contrario a los punteros del reloj).

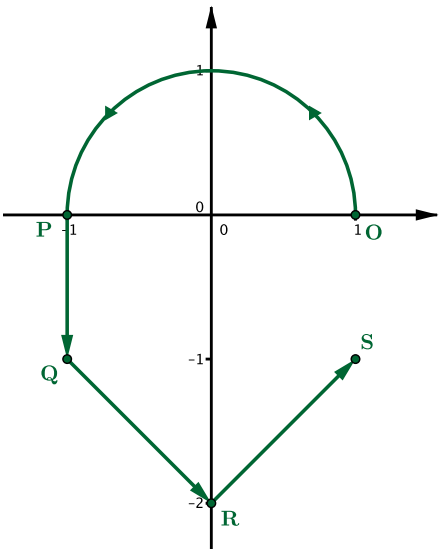
(a) Calcular $\displaystyle\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha}$ con $\mathbf{F}(x,y) = (2(y^3-1)+y^2, 6xy^2+3x^2y^2)$.

(b) Considere $\gamma_\star$ como la curva cerrada que se obtiene de la unión de la curva γ con el segmento de recta $\mathbf{SO}$ y $\vec{\rho}$ una parametrización de esta que la recorre positivamente.

Considere $\mathbf{G}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ y calcule $\displaystyle\oint_{\gamma_\star} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\rho}$.

Solución:

Partamos graficando la curva:



(a) Por la forma de la curva γ conviene cerrar la curva uniendo el segmento $\overline{\mathbf{SO}}$ de modo que la curva resultante $\partial\mathcal{R}^+ = \gamma \cup \overline{\mathbf{SO}}$ sea el borde de una región compacta $\mathcal{R}$ orientada positivamente.

Sea ℓ una parametrización de esta curva, entonces:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = \oint_{\partial\mathcal{R}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{\overline{\mathbf{SO}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \tag{4.12}$$

Dado que el campo $\mathbf{F}$ es $\mathcal{C}^1$, podemos utilizar el Teorema de Green para calcular la integral sobre $\partial\mathcal{R}^+$ obteniendo así que:

$$\oint_{\partial\mathcal{R}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6 \iint_{\mathcal{R}} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2 \iint_{\mathcal{R}} y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Observando que la función $g_1(x, y) = xy^2$ es impar, entonces la primera integral es cero. Por otro lado, como la segunda función es par en $\mathcal{S}$, podemos calcular rápidamente:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{R}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= -4 \int_0^1 \int_{x-2}^{\sqrt{1-x^2}} y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2 \int_0^1 1 - x^2 - (x-2)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= -2 \int_0^1 -2x^2 + 4x - 3 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

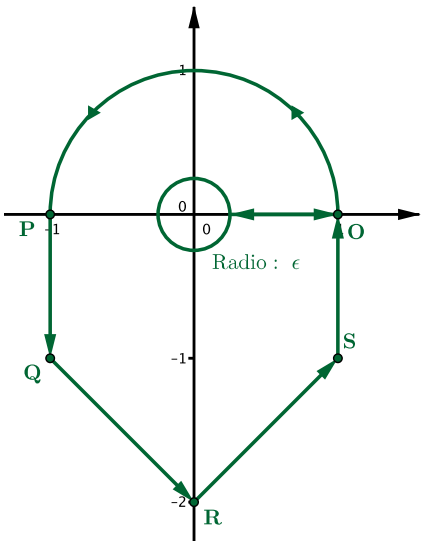
Ahora calculamos la integral sobre $\overline{\mathbf{SO}}$, considerando la parametrización $\vec{\ell} = (1, t)$ con $t \in [-1, 1]$. Luego,

$$\int_{\overline{\mathbf{SO}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{-1}^{1} 9t^2 \mathrm{d}t = 3$$

Entonces, reemplazando en la primera ecuación:

$$\boxed{\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}}$$

(b) Observamos que el campo no está definido en el origen, por lo cual agregamos una circunferencia al centro orientada en el sentido de los punteros del reloj, de modo que en esta región sí se podrá aplicar el Teorema de Green. Entonces, se obtiene una figura como la siguiente:



Tal como ya sabemos, el campo $\mathbf{G}$ es claramente conservativo fuera de esta singularidad, de modo que al agregar la circunferencia de radio ϵ (la cual denominaremos $\circ_\epsilon$) se logra el mismo efecto que en preguntas anteriores, con parametrización γ^*. Asimismo,

$$\oint_{\gamma_\star} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\rho} = \underbrace{\oint_{\gamma^*} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\rho}}_{(1)} + \underbrace{\oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\rho}}_{(2)}$$

En (1) se tiene que:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\rho} = \iint_{\mathcal{S}} Q_x - P_y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

Para calcular la integral de línea sobre $\circ_\epsilon$ podemos considerar $\rho(t) = (\epsilon \cos t, \epsilon \operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Luego, $\rho'(t) = (-\epsilon \operatorname{sen} t, \epsilon \cos t)$ y

$$\oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\rho} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}{\epsilon^2} + \frac{\epsilon^2 \cos^2 t}{\epsilon^2} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

Finalmente,

$$\boxed{\oint_{\gamma_\star} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\rho} = 2\pi}$$

Problema 4.37 Pruebe que:

$$\oint_{\Gamma} \frac{xy^2 \mathrm{d}y - y^3 \mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \pi$$

donde Γ es una curva cerrada simple cualquiera orientada positivamente alrededor del origen.

Solución:

Compactando notación, sea:

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right)$$

Una de las primeras cosas que complica respecto al problema es que sea una curva arbitraria cualquiera. Pensando en utilizar el Teorema de Green, verificamos inmediatamente que una de las hipótesis no se cumple: el campo no está definido en el origen, y sea cual sea la curva, esta lo encierra por definición del enunciado.

¿Qué hacemos entonces? Un procedimiento similar al problema anterior: dada la simetría radial del campo en cuestión, agregamos una circunferencia de radio ϵ que haremos tender a cero y con eso se cierra la curva. En esta región sí podremos aplicar el Teorema de Green, ya que se excluye el origen.

Calculamos por reglas de derivación:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y^2\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{y^2\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Digamos que esta nueva región encerrada $-$la encerrada por la curva original menos la circunferencia de radio $\epsilon-$ la denotamos por $\mathcal{R}^*$ y la curva suave a tramos generada Γ^*. Entonces:

$$\iint_{\mathcal{R}^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = 0$$

Aplicando el teorema:

$$\oint_{\Gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{R}^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = 0$$

Escribiendo la integral de línea en términos de las otras dos:

$$\underbrace{\oint_{\Gamma^*} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}_{=0} = \oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \oint_{-\circ_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Entonces:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} \frac{xy^2\mathrm{d}y - y^3\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Calculamos por definición la integral de línea de la circunferencia recorrida positivamente. Parametrizando:

$$\vec{\lambda}\left(t\right) = \begin{pmatrix} \epsilon\cos t \\ \epsilon\,\mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} \to \mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -\epsilon\,\mathrm{sen}\, t \\ \epsilon\cos t \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Evaluando en el campo:

$$\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = \left(-\frac{\epsilon^3\,\mathrm{sen}^3\, t}{\epsilon^4}, \frac{\epsilon^3\cos t\ \mathrm{sen}^2\, t}{\epsilon^4}\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^4\,\mathrm{sen}^4\, t}{\epsilon^4} + \frac{\epsilon^4\cos^2 t\ \mathrm{sen}^2\, t}{\epsilon^4}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^4\, t + \cos^2 t\ \mathrm{sen}^2\, t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\, t\ \left(\mathrm{sen}^2\, t + \cos^2 t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\, t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \cos\left(2t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que:

$$\oint_{\circ_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \pi \to \boxed{\oint_{\Gamma} \frac{xy^2\mathrm{d}y - y^3\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \pi}$$

demostrando así lo pedido. ■

Para medir el dominio conceptual de los problemas estudiados, se pueden plantear problemas algebraicos en que piden dejar expresado en un resultado en función de parámetros conocidos. Revisemos algunos de ellos:

Problema 4.38 Sea $(P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial definido para todo $(x,y) \neq (\pm 3, 0)$ con $Q_x = P_y + 2$. Considere los círculos $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 25$, $\mathcal{C}_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$, $\mathcal{C}_3 : (x+3)^2 + y^2 = 1$, orientados en sentido contrario a los punteros del reloj. Calcule:

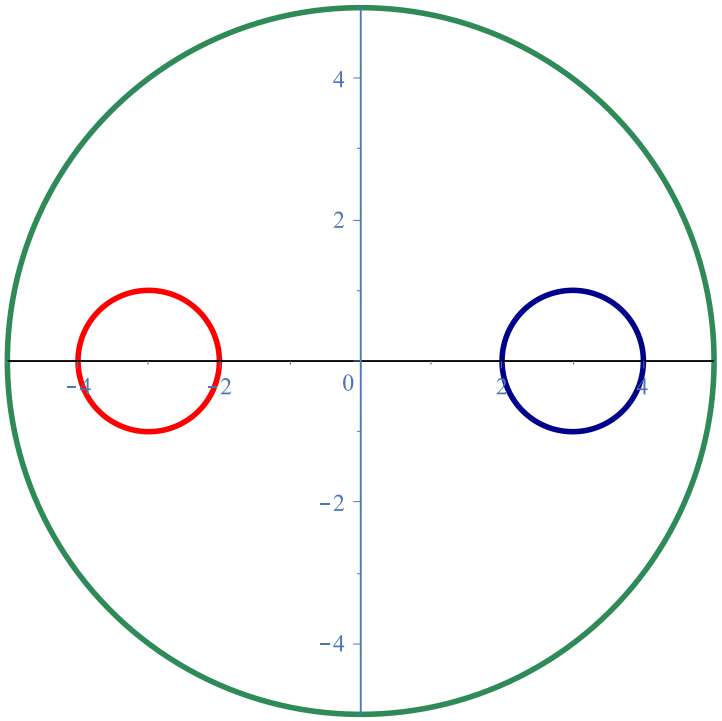
$$\oint_{\mathcal{C}_3} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

sabiendo que

$$\oint_{\mathcal{C}_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = a \quad \text{y} \quad \oint_{\mathcal{C}_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = b.$$

Solución:

Partamos graficando cada una de las trazas:



$\mathcal{C}_1$ en verde, $\mathcal{C}_2$ en azul, $\mathcal{C}_3$ en rojo.

Nada sabemos a priori sobre $\mathcal{C}_3$, pero sí podemos conectarlo con la ecuación $Q_x = P_y + 2$ a través del Teorema de Green. Tampoco podemos considerar el área que encierra $\mathcal{C}_3$ al usar el teorema pues el campo no está definido para $(\pm 3, 0)$. ¿Cómo arreglamos esto? ¡Eliminemos de nuestra consideración los puntos donde el campo no está definido!

Digamos que $\mathcal{R}^*$ es el área encerrada por $\mathcal{C}_1$ menos las áreas encerradas por $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$. Dado que todas las curvas están positivamente orientadas, entonces $\partial\mathcal{R}^* = \mathcal{C}_1 \cup -\mathcal{C}_2 \cup -\mathcal{C}_3$. Entonces, notando que $Q_x - P_y = 2$ por hipótesis, se tendrá que:

$$\iint_{\mathcal{R}^*} (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}A = 2\iint_{\mathcal{R}^*} \mathrm{d}A$$

Calcular el área de $\mathcal{R}^*$ es muy sencillo dadas las áreas involucradas. Entonces,

$$\iint_{\mathcal{R}^*} (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}A = 2\,(25\pi - 2\times\pi) = 46\pi$$

Es decir, usando el Teorema de Green se tendrá que:

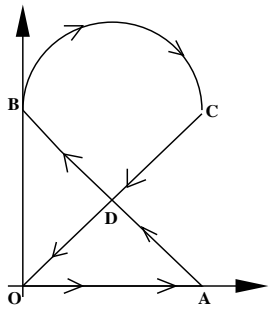
$$46\pi = \oint_{\mathcal{C}_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \oint_{\mathcal{C}_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \oint_{\mathcal{C}_3} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$\to \boxed{\oint_{\mathcal{C}_3} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 46\pi - (a-b)}$$

Otro ejemplo del mismo tipo:

Problema 4.39 Considere los puntos $\mathbf{O}\,(0,0)$, $\mathbf{A} = (1,0)$, $\mathbf{B}\,(0,1)$ y $\mathbf{C} = (1,1)$ y la curva $\gamma = \mathbf{OABCO}$ de la figura. El arco que une $\mathbf{B}$ con $\mathbf{C}$ es un semicírculo. Sean $P\,(x,y)$, $Q\,(x,y)$ funciones con $P_x = 1$, $P_y = 2$, $Q_x = -1$, $Q_y = -3$ para todo (x,y). Evalúe:

$$\oint_{\gamma} (P + 2Q)\,\mathrm{d}x + (Q - P)\,\mathrm{d}y$$



Solución:

De lo ya estudiado, es tentador utilizar el Teorema de Green. Sin embargo, hay una hipótesis que

en este caso no se cumple: la región no es compacta pues ocurre un angostamiento en **D**. Sin embargo, este problema es perfectamente reparable si notamos que las integrales de línea son separables. En efecto,

$$\oint_{\gamma} = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2}$$

donde $\gamma_1 = \mathbf{OADO}$ siguiendo la traza de la figura y $\gamma_2 = \mathbf{DCBD}$. En cada una de las regiones encerradas sí es posible emplear el Teorema de Green. Observe la intencionalidad de dejar escrita la integral de línea como combinación de P y Q para confundir con la notación del teorema. Digamos que $U = P + 2Q$ y $V = Q - P$ (y $\mathbf{F} = (U, V)$) para no confundirnos con las notación. Entonces:

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{R}_1} (V_x - U_y)\,\mathrm{d}A$$

pero por linealidad de la derivación $V_x = Q_x - P_x = -2$ y $U_y = P_y + 2Q_y = -4$. Entonces $V_x - U_y = 2$, con lo cual

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 2 \iint_{\mathcal{R}_1} \mathrm{d}A$$

donde la integral doble es el área de dicha región. En este caso, corresponde a un triángulo cuya base es $\overrightarrow{OA} = 1$ y la altura es $1/2$ por simetría entre los triángulos. Luego,

$$A\,(\triangle \mathbf{AOD}) = \frac{1}{4}$$

con lo cual

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{1}{2}$$

Calculamos ahora la integral en el segundo caso. Partimos primero notando que la curva **está recorrida en orientación negativa** (horaria) y esto **no nos sirve** para el teorema. Esto no es en lo absoluto un problema, pues:

$$\oint_{\gamma_2} = -\oint_{-\gamma_2}$$

y para $-\gamma_2 = \gamma_2^-$ sí se cumple el teorema. Notando que $V_x - U_y$ no cambia, solo nos resta calcular el área de la figura. Por simetría de la figura el área del triángulo es la misma que la del área del triángulo anteriormente calculada. Nos falta agregar el área de la semicircunferencia, que por inspección del gráfico tiene área 2. Luego,

$$\iint_{\mathcal{R}_2} \mathrm{d}A = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \to \oint_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Finalmente,

$$\boxed{\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\pi}{4}}$$

Dado que el Teorema de Green involucra fenómenos de área, podemos utilizarlo para calcular el área de una figura o una determinada integral doble difícil de calcular, asociándola a una integrla de línea conveniente.

Problema 4.40 Utilizando el Teorema de Green, calcule el área de la región limitada por la curva:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(a^2 - b^2\right)^{2/3}$$

con $a \neq 0 \neq b$.

Solución:

Recuerde el lector en primer lugar que este tipo de curvas ya fueron estudiadas en un problema anterior, se conocen como astroides por la forma de su gráfica, y ya sabemos como parametrizarlas y calcular integrales de línea afines.

Puede resultar terriblemente complicado despejar la integral a partir de las expresiones conocidas. Sin embargo, puede usarse el Teorema de Green para resolver este problema, en una aplicación inversa a lo que hemos hecho hasta ahora. En otras palabras,

$$\text{problema de área} \xrightarrow{\text{Teo. Green}} \text{problema de contorno}$$

Escribiremos el área en cuestión como una integral de línea. Observe que buscamos calcular:

$$\iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}A$$

siendo $\mathcal{R}$ la región delimitada por la curva. Para aplicar el teorema, requerimos que aparezca $Q_x - P_y$. Basta notar que se puede tomar cualquier campo $\mathbf{F} = (P, Q)$ bien definido (en todo punto, de clase $\mathcal{C}^1$) tal que $Q_x - P_y = 1$ y se cumplirá lo pedido para la integral de línea.

Luego, por el Teorema de Green:

$$\iint_{\mathcal{R}} (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}A = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

siendo Γ la curva que representa el astroide. Entonces, debemos partir por buscar el campo en cuestión. ¿Cuál escogemos? ¡El que nos convenga! Para ello, miremos la parametrización de la curva para la cual calcularemos la integral de línea que nos entregará el área como resultado. Se tiene que una parametrización del astroide viene dada por:

$$\vec{\lambda}(t) = \left|a^2 - b^2\right| \begin{pmatrix} \cos^3 t\,/a \\ \operatorname{sen}^3 t\,/b \end{pmatrix}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces $\mathrm{d}\vec{\ell} = |a^2 - b^2| \begin{pmatrix} -3\cos^2 t\,\operatorname{sen} t\,/a \\ 3\operatorname{sen}^2 t\,\cos t\,/b \end{pmatrix} \mathrm{d}t$.

La integral de línea ya es de por sí complicada dada la parametrización, por lo cual sería ideal escoger un campo simple. Hagamos arbitrariamente $Q = x$ y $P = 0$[a], el cual cumplirá con lo

pedido y simplifica de sobremanera los cálculos. En efecto,

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= 3\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, \operatorname{sen}^2 t\, \cos t\, \mathrm{d}t \\ &= 3\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, \operatorname{sen}^2 t\, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

La integral anterior sí es posible calcularla, en particular mediante las técnicas de recursión aprendidas en Cálculo I (esto queda propuesto al lector). Aquí utilizaremos las técnicas que ya revisamos sobre la función Beta, en particular:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, \cos^4 t\, \mathrm{d}t = 2\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right) = 2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

($\sqrt{\pi}$ sobre cada $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$)

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, \cos^4 t\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}$$

Finalmente,

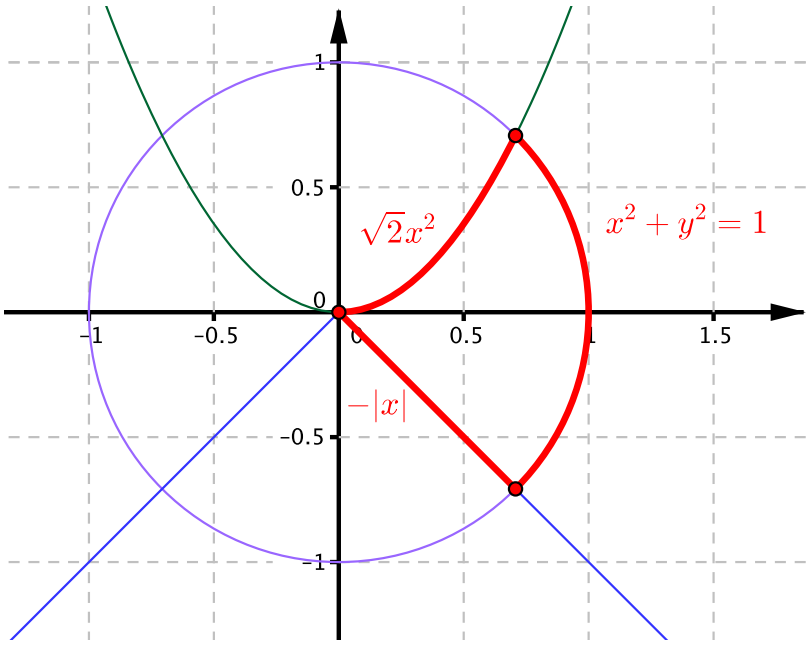
$$\boxed{\iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}A = \frac{3\pi}{8}\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}}$$

[a] Si el lector encuentra uno aún más conveniente, bienvenido sea. El resultado del área deberá seguir siendo el mismo.

Problema 4.41 Utilizando el Teorema de Green determine el área de la región $\mathcal{R}$ interior a la circunferencia $x^2+y^2=1$, bajo $y=\sqrt{2}\,x^2$ y sobre $y=-|x|$.

Solución:

Grafiquemos primero el área en cuestión (en rojo lo obtenido):



Ahora tenemos que convertir el problema de área en uno de contorno usando el Teorema de Green. Para ello, consideremos nuevamente el campo $(P, Q) = (0, x)$ y de esta forma,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}A = \oint_{x^2+y^2=1} x\,\mathrm{d}y + \oint_{y=\sqrt{2}\,x^2} x\,\mathrm{d}y + \oint_{y=-|x|} x\,\mathrm{d}y$$

Calculamos cada una de las curvas por separado:

- Para la circunferencia tomamos las coordenadas polares:

$$y = \operatorname{sen}\theta \longrightarrow \mathrm{d}y = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Intersectamos $x^2 + y^2 = 1$ con $y = \sqrt{2}x^2$ obteniendo así que $y^2 + y/\sqrt{2} = 1$ de donde $y = 1/\sqrt{2}$ es solución y por lo tanto $x = 1/\sqrt{2}$. Se obtiene por analogía $(x, y) = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$ al intersectar la circunferencia con $y = -|x|$. Luego, θ varía entre $-\pi/4$ y $\pi/4$. Integramos:

$$\begin{aligned}\oint_{x^2+y^2=1^*} x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} 1 + \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big|_0^{\pi/4}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\oint_{x^2+y^2=1^*} x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}$$

- Para la curva $y = \sqrt{2}\,x^2$ se tendrá que $\mathrm{d}y = 2\sqrt{2}\,x\,\mathrm{d}x$ con x variando entre 0 y $\sqrt{2}/2$. Sin embargo, debemos considerar que la curva tiene que ser recorrida en sentido antihorario, razón por la cual integramos de $1/\sqrt{2}$ a 0:

$$\oint_{y=\sqrt{2}x^2 *} x\,\mathrm{d}y = \int_{1/\sqrt{2}}^{0} 2\sqrt{2}\,x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{3}$$

- Para la curva $y = -|x|$ se tendrá de acuerdo a la gráfica que $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$ e integramos de 0 a $1/\sqrt{2}$ en dicho sentido para mantener el sentido antihorario. Luego,

$$\oint_{y=-|x|*} x\,\mathrm{d}y = -\int_{0}^{1/\sqrt{2}} x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$$

Finalmente,

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12}}$$

Comprobación: De acuerdo a lo aprendido en Cálculo II podemos calcular la misma área de la forma *antigua* como comprobación:

$$A = \int_{0}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{2}\,x^2 + x\,\mathrm{d}x + 2\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Evaluando estas integrales de acuerdo a las técnicas de integración convencionales obtenemos que:

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12},$$

es decir, exactamente el mismo resultado.

Problema 4.42 Encuentre la curva cerrada simple orientada positivamente sobre la cual se maximiza el trabajo realizado por el campo:

$$\mathbf{F}\,(x,y) = \left(\frac{x^2 y}{4} + \frac{y^3}{3}, x\right).$$

Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre la curva encontrada.

Solución:

Al igual que el problema ya estudiado en integrales de línea, este es un problema de optimización en que no buscamos un punto, si no que una función que maximice el funcional dado, la integral

de línea en este caso. Buscamos determinar Γ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que se determine

$$\max_{\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2} \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

Observe que el campo es de clase $\mathcal{C}^1$ y definido en todo $\mathbb{R}^2$. Dado que la curva es simple y cerrada, podemos notar que la curva Γ es la frontera positivamente orientada de una región $\mathcal{S}$ simplemente conexa, i.e. $\Gamma = \partial\mathcal{S}^+$. Aplicando el Teorema de Green:

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = \iint_{\mathcal{S}} \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \right) \mathrm{d}A$$

Entonces, la curva Γ que buscamos determinar debe ser tal que maximice la integral de línea, o equivalentemente maximice el área sobre la región que encierra.

La pregunta a continuación sería: ¿cómo maximizamos esta integral? Estamos integrando la superficie $z = 1 - x^2/4 - y^2$ en todo el espacio. Esta superficie corresponde a un paraboloide con concavidad hacia abajo.

Evidentemente si tomamos una porción de paraboloide en que cada uno de los puntos sea negativo, entonces no podremos estar en un máximo, ya que sí se pueden obtener valores positivos de la integral. En efecto, si integramos una porción positiva de paraboloide ya estamos ante una buena aproximación. ¿Cuándo llegamos al máximo? ¡Cuando hayamos integrado todo lo que sea positivo en la superficie del paraboloide! Si consideramos un poco más de región, esta diferencia de superficie agregada será negativa y disminuirá el área. Si consideramos un poco menos de porción positiva, disminuiremos el valor de la integral.

Luego, integramos en $\mathcal{S}$ tal que todos los puntos (x, y) cumplen que:

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \geq 0 \right\}$$

Se puede identificar por simple inspección que:

$$\Gamma = \partial\mathcal{S}^* = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}$$

la cual es una elipse que tiene como parametrización positivamente orientada:

$$\boxed{\vec{\lambda}\,(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

Para calcular el trabajo máximo, calculamos la integral doble:

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \right) \mathrm{d}A$$

Hacemos la sustitución polar conveniente:

$$\begin{aligned} x &= 2r\cos(t) \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,(t) \end{aligned}$$

con $r \in [0,1]$ y $t \in [0, 2\pi]$. Adicionalmente, aplicando el teorema de sustitución obtenemos que $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, con lo cual:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right) \mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\right) 2r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 2r - 2r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{2}{4}\right) = \pi \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\max_{\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2} \oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \pi}$$

Problema 4.43 Determine la curva de Jordan Γ que maximiza

$$\oint_\Gamma \left(y^3 - y\right)\mathrm{d}x - 2x^3\mathrm{d}y.$$

Solución:

Aplicando el Teorema de Green,

$$\oint_\Gamma \left(y^3 - y\right)\mathrm{d}x - 2x^3\mathrm{d}y = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} 1 - 6x^2 - 3y^2\,\mathrm{d}A}_{(*)}$$

donde $\mathcal{S}$ es tal que $\Gamma = \partial\mathcal{S}^+$ también es desconocida.

Aquí viene el razonamiento fundamental, que requiere más olfato que dominio de un procedimiento: se puede notar que la función $1 - 6x^2 - 3y^2$ es un paraboloide elíptico, y por lo tanto siempre que este sea positivo integrará positivo en la integral total. Asimismo, si llega a ser negativo le restará a nuestra integral.

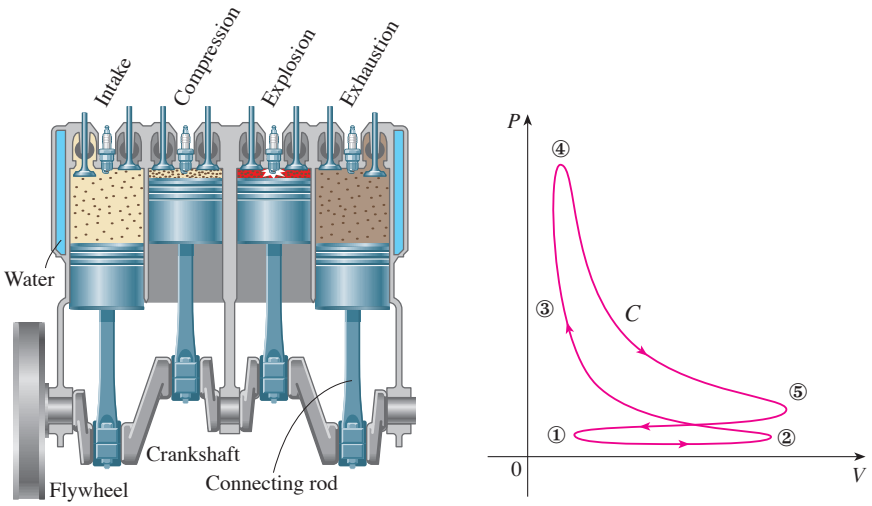
De aquí se deduce que $(*)$ se maximiza cuando $\mathcal{S}$ es tal que $1 - 6x^2 - 3y^2$ es positivo. En otras

palabras, integramos en la región:

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 6x^2 + 3y^2 \leq 1\right\}$$

Luego, como $\Gamma = \partial S^+$ concluimos que esta curva no es más que la elipse $6x^2 + 3y^2 = 1$ recorrida positivamente, indistintamente de la parametrización que se escoja.

Problema 4.44 **Un guiño termodinámico.** La siguiente figura presenta la secuencia de eventos que ocurre en cada uno de los cilindros de un motor de combustión interna. Sean $P(t)$ y $V(t)$ la presión y el volumen en el cilindro en el instante t, donde $a \leq t \leq b$ entrega el tiempo para un ciclo completo. El gráfico muestra como P y V varían a lo largo de un ciclo del motor.



Dado que el motor repite reiteradas veces un ciclo, se puede observar que al curva $P - V$ es cerrada.

(a) Demuestre que el trabajo realizado por el pistón durante un ciclo del motor es

$$W = \oint_{\mathcal{C}} P \, \mathrm{d}V$$

donde $\mathcal{C}$ es una curva en el plano $P - V$ mostrado más arriba.

Ayuda: Recuerde que la fuerza en el pistón es $\mathbf{F} = AP(t)\,\hat{\mathbf{i}}$ donde A es el área del pistón.

(b) Explique por qué el trabajo realizado depende de la curva $\mathcal{C}$ que se elija.

(c) Demuestre que el trabajo neto realizado por el ciclo termodinámico corresponde a la diferencia de las áreas encerradas por los loops.

Solución:

(a) Basándonos en la ayuda, y recordando la definición de trabajo, se tendrá que:

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

donde $\mathrm{d}\vec{\ell} = \hat{\mathbf{i}}\,\mathrm{d}x(t)$ considerando que el pistón solo puede moverse en un solo sentido. Luego, reemplazando:

$$\mathrm{d}W = AP(t)\mathrm{d}x(t) = P\,A\,\mathrm{d}x$$

Pero $A\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}V$ pues corresponde a una variación infinitesimal de volumen al agregar una variación de espesor. De esta forma, considerando que el área del pistón es constante,

$$\mathrm{d}W = P\,\mathrm{d}V$$

y si consideramos que el trabajo se realiza a través de un ciclo, escribimos una integral cíclica:

$$\boxed{W = \oint_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}V} \quad \blacksquare$$

(b) Si consideramos el eje $V - P$ en vez del eje $x - y$ convencional, podremos notar que esta integral no es más que evaluar el trabajo del campo $\mathbf{F} = (P, 0)$. Sin embargo,

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \sim \frac{\partial P}{\partial P} - \frac{\partial 0}{\partial V} = 1 \neq 0$$

pues la presión realizada si puede depender del desplazamiento de volumen (basta notar que tanto la presión como $\mathrm{d}x$ son variables del tiempo). Por lo tanto, no se cumple la condición necesaria de conservatividad, por lo cual se está realizando trabajo sobre un campo no conservativo, y por lo tanto, de acuerdo a la definición de conservatividad, el trabajo realizado sobre un loop cerrado no es necesariamente cero. $\blacksquare$

(c) Siendo coherentes con la figura, digamos que $\mathcal{C}_1$ es la curva superior y $\mathcal{C}_2$ la curva inferior, ambas cerradas por separado. De acuerdo al Teorema de Green,

$$-\oint_{\mathcal{C}_1} P\,\mathrm{d}V = -\iint_{\mathcal{S}_1} 1\,\mathrm{d}V\mathrm{d}P \longrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} P\,\mathrm{d}V = \iint_{\mathcal{S}_1} \mathrm{d}V\mathrm{d}P$$

Observe que se agregó el signo $-$ para ser coherentes con la orientación de la curva con respecto al teorema. Asimismo,

$$\oint_{\mathcal{C}_2} P\,\mathrm{d}V = -\iint_{\mathcal{S}_2} 1\,\mathrm{d}V\mathrm{d}P$$

Finalmente,

$$\oint_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}V = \oint_{\mathcal{C}_1} P\,\mathrm{d}V + \oint_{\mathcal{C}_2} P\,\mathrm{d}V = \iint_{\mathcal{S}_1} \mathrm{d}V\mathrm{d}P - \iint_{\mathcal{S}_2} \mathrm{d}V\mathrm{d}P,$$

que no es más que la condición que se quería demostrar. $\blacksquare$

Propuesto Demuestre que no existe curva alguna cerrada simple cuyo perímetro sea 1 m y que encierre un área de 1 m^2.

Indicación: Este problema es especialmente complejo a pesar de lo breve del enunciado. Investigue respecto a la desigualdad isopirométrica para comenzar a trabajar.

5. Los teoremas fundamentales del Cálculo Vectorial

Esta sección puede ser considerada con facilidad la sección más importante del curso pues desarrolla los teoremas que son el posterior fundamento de resultados importantes en electromagnetismo y mecánica de fluidos. Por esta misma razón es que estos teoremas guardan una profunda conexión con significados físicos, a diferencia de otras secciones de los cursos de Cálculo.

Antes de comenzar a revisar los teorema requerimos realizar el mismo procedimiento que utilizamos para definir las integrales de línea, pero ahora con conjuntos bidimensionales: desarrollaremos las integrales de superficie. Al igual que como una vez desarrollado el concepto de integrales de línea trabajamos el Teorema de Green, ahora una vez desarrollado este concepto revisaremos en analogía los dos teoremas asociados en $\mathbb{R}^3$: el Teorema de Kelvin-Stokes y el Teorema de la Divergencia.

5.1. Integrales de superficie

5.1.1. Integrales de superficie sobre campos escalares: área de superficies

Nota importante: los conceptos presentados a continuación son como siempre un resumen de los conceptos importantes y la notación que se utilizará a lo largo de los problemas. En particular respecto a este capítulo, se recomienda encarecidamente revisar los contenidos de superficies en Stewart (lectura más superficial) o Pita Ruiz (tópicos con relativamente mayor profundidad) para obtener un adecuado dominio temático en los temas que vienen a continuación.

Ya hemos finalizado de estudiar el comportamiento de conjuntos unidimensionales en $\mathbb{R}^2$ frente a campos. Al pasar a estudiar $\mathbb{R}^3$ evidentemente distinguimos conjuntos uni, bi y tridimensionales. Los primeros se conocen como curvas, los terceros como sólidos, y los segundos como superficies, y pueden entenderse como una generalización del concepto de plano, al igual que la curva lo es del concepto de curva.

Antes de estudiar el comportamiento de las superficies ante campos, debemos hacer un estudio similar al realizado con las curvas en $\mathbb{R}^n$: definirlas, parametrizarlas, estudiar sus elementos básicos, etc. y medir sus funcionales asociados: área, etc. Recién una vez hecho eso podemos definir una medida de su interacción con los campos en $\mathbb{R}^3$: las integrales de superficie sobre campos vectoriales y presentar los dos resultados importantes: el Teorema de Kelvin-Stokes y el Teorema de la Divergencia.

Partamos definiendo una superficie:

Definición:

- Se define una *superficie* en $\mathbb{R}^3$ como la imagen tridimensional en $\mathbb{R}^3$ de un conjunto bidimensional en $\mathbb{R}^2$ y que puede ser representada mediante una función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ denominada *parametrización*.
- Sea una región $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ del tipo I y II y sea $\mathbf{f} : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función inyectiva de clase $\mathcal{C}^1$ (de modo que la superficie no se auto−intersecte). A la imagen de $\mathbf{f}$ se le llama *superficie simple* y a la parametrización *regular*.

  Para que la función sea inyectiva basta que la matriz jacobiana sea invertible. Como en este caso es de 3×2, requerimos que sus columnas sean linealmente idenpendientes, o análogamente en términos vectoriales:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \neq 0 \quad \text{para todo } (u, v) \in \mathcal{S} \tag{5.1}$$

- Sea $\mathcal{K}$ una superficie simple, tal que $\mathcal{K} = \mathbf{f}(\mathcal{S})$ y sea $\vec{\varphi} : \mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ una biyección definida en la región $\mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^2$ la cual es simultáneamente de tipo I y II y cuyas derivadas parciales existen. Entonces, de acuerdo al Teorema de la Función Inversa:

$$[\forall (s,t) \in \mathcal{S}'] \quad \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5.2}$$

  A la función compuesta $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \vec{\varphi} : \mathcal{S}' \to \mathbb{R}^3$ se le llama *reparametrización* de $\mathcal{K}$.

A partir de estos conceptos se pueden determinar algunas medidas geométricas para las superficies: planos tangentes (ya estudiados parcialmente en un capítulo anterior) y vectores normales (análogos a la normal al plano).

Definición: *Algunas propiedades geométricas de superficies.*

- Sea $\mathcal{K} = \mathbf{f}(\mathcal{S})$ una superficie simple parametrizada por la función $\mathbf{f} : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{q} \in \operatorname{Int} \mathcal{K}$. Se define que el vector $\mathbf{v}$ es *tangente a* $\mathcal{K}$ en $\mathbf{q}$ si existe un camino $\vec{\lambda} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ de modo que $\vec{\lambda}[a,b] \subset \mathcal{K}$ y existe algún $c \in [a,b]$ tal que $\vec{\lambda}(c) = \mathbf{q}$ y $\vec{\lambda}'(c) = \mathbf{v}$.

- Al conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ tangentes al punto $\mathbf{q}$ se les denomina *espacio tangente* a $\mathbf{K}$ en $\mathbf{q}$ y se anota como $T_{\mathbf{q}}(\mathcal{K})$. Se puede demostrar que si la superficie es simple y parametrizada regularmente por $\mathbf{f}(u,v)$, entonces:

$$\mathrm{T}_q(\mathcal{K}) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right\rangle \to \Pi_{\mathrm{T}}(\mathcal{K}, \mathbf{q}) = \mathbf{q} + \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right\rangle.$$

- De acuerdo a la idea anterior, es fácil determinar una dirección normal a dicho espacio tangente. En efecto, se define el *vector normal* a la superficie $\mathcal{K}$ bajo la parametrización $\mathbf{f}$ como

$$\mathbf{N}_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \tag{5.3}$$

  Se empleará habitualmente el vector normal unitario, haciendo uso de la notación:

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{N}_{\mathbf{f}}(\mathbf{p})}{\|\mathbf{N}_{\mathbf{f}}(\mathbf{p})\|}.$$

- Si $\mathcal{S}$ tiene una frontera dada por $\partial\mathcal{S}$, entonces se define la *frontera de la superficie* $\mathcal{K}$ como $\partial\mathcal{K} = \mathbf{f}(\partial\mathcal{S})$ y al *interior* de la superficie como $\operatorname{Int} \mathcal{K} = \mathbf{f}(\operatorname{Int} \mathcal{S})$.

A través de las definiciones anteriores de superficie y de un razonamiento primordialmente geométrico, podemos encontrar la definición del área de una superficie, las cuales **no** deben confundirse con las integrales dobles calculadas hasta ahora, pues estas últimas entregaban el volumen del sólido engendrado entre el plano xy y la función dada.

Definición: *Área de una superficie en* $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathcal{K} = \mathbf{f}(\mathcal{S})$ una superficie simple en $\mathbb{R}$ parametrizada por la función de clase $\mathcal{C}^1$ a tramos $\mathbf{f} : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$, entonces el área de la superficie $\mathcal{K}$ se define como la integral doble

$$A(\mathcal{K}) = \iint_{\mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{5.4}$$

En términos simbólicos−diferenciales decimos que el diferencial de superficie viene dado por:

$$\mathrm{d}S = \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Análogamente a las curvas, el área es independiente de la parametrización utilizada, lo cual se resume en el siguiente teorema:

Teorema: Sea $\vec{\varphi}(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \vec{\varphi}$ una reparametrización de $\mathcal{K}$ de clase $\mathcal{C}^1$ a tramos. Entonces,

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \iint_{\mathcal{S}} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{\mathcal{S}'} \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\| \mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{5.5}$$

A partir de todos los conceptos anteriores resolvemos los siguientes problemas, básicos en cuanto a planteamiento, pero a la vez clásicos.

Problema 5.1 Encuentre el área de la porción de la superficie

$$z = x^2 - y^2$$

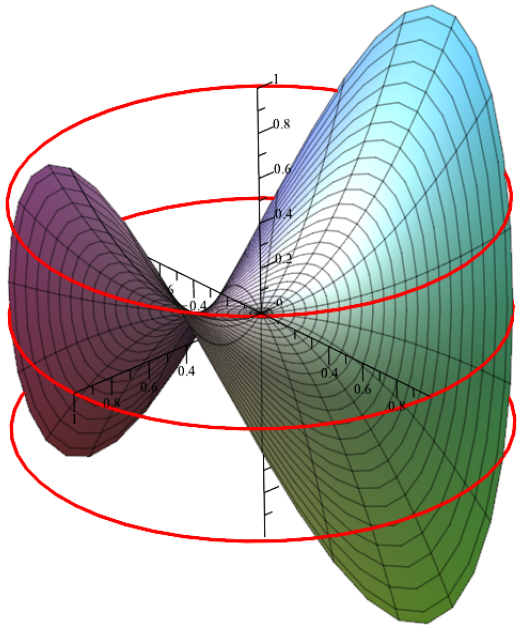
que está dentro del cilindro

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Solución:

Primero partamos identificando la superficie que debemos integrar. La superficie $z = x^2 - y^2$ corresponde a la ya conocida silla de montar (el conocido ejemplo clásico de los puntos de ensilladura).

Sin embargo, debemos considerar de ella solo los puntos que están contenidos dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, el cual es un sólido con libertad en z. Es fácil notar entonces que el manto en cuestión corresponde a la figura siguiente:



Se muestran anillos de radio 1 para señalar el contorno del cilindro.

Se identifica adicionalmente una simetría cilíndrica/esférica en el problema. Para calcular el área de este manto (no confundir con la integral doble), debemos partir por parametrizar la superficie.

Esto no es del todo complicado, pues ya tenemos una componente en función de las otras dos:

$$\mathbf{f}\,(u,v) = \left(u, v, u^2 - v^2\right)$$

Entonces el área viene dada por:

$$A = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$$

donde como se dedujo en clases $\mathrm{d}S = \left\| \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Derivamos:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = (1, 0, 2u) \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = (0, 1, -2v)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{4\left(u^2 + v^2\right) + 1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

o bien, aprovechando que las variables son mudas y la coincidencia con los planos cartesianos:

$$\mathrm{d}S = \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Es fácil notar que el producto cruz entre las derivadas parciales no se anula para ningún u, v, luego la parametrización es regular.

Observe que integrar esto en función del cilindro tal como está puede ser en extremo tedioso. Por lo tanto, aprovechamos que existe una simetría polar en la integración y hacemos:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

donde en este caso $r \in [0, 1]$ para estar dentro del cilindro, y $\theta \in [0, 2\pi]$. Luego,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \pi \int_0^1 2r\sqrt{4r^2 + 1}\,\mathrm{d}r \end{aligned}$$

Haciendo $u = r^2$ se puede evaluar la integral sin mayores dificultades, obteniendo así que:

$$\boxed{A = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)}$$

Problema 5.2 Sea $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 6 - 3x - 2y;\ x,y,z \geq 0\}$. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,z,z)$. Calcule el flujo que pasa por esta superficie.

Solución:

No nos queda más opción que hacerlo por definición: solo queremos integrar una sola topa y buscar $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \neq 0$, razón por la cual no existe $\mathbf{G}$ tal que $\vec{\nabla} \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$ (permitiéndonos utilizar el teorema del rotor).

Sabemos inmediatamente en este caso que:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = (3,2,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

si decidimos integrar en el plano xy. Evaluando el campo en la superficie:

$$\mathbf{F}(\mathcal{S}) = (0, 6-3x-2y, 6-3x-2y)$$

Es decir,

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 3(6-3x-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Tenemos que integrar en el plano xy, con lo cual hacemos $z = 0$ en la ecuación del plano obteniendo así

$$3x + 2y = 6 \to y = 3 - \frac{3}{2}x$$

Para que $x, y > 0$, movemos y de 0 a la recta (dibuje el plano xy junto a la recta para imaginarlo) y x de 0 a 2 (el punto de intersección de la recta con el eje x). Así,

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 3\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6-2x-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 18}$$

haciendo integración de funciones polinomiales.

Problema 5.3 Calcule el área del paraboloide $z = x^2 + y^2$ para $0 \leq z \leq 1$.

Solución:

Es muy sencillo identificar el área a integrar, pues el paraboloide es ya una figura más que conocida. La parametrización en este caso tampoco es complicada, pues ya tenemos z dependiendo de x e y:

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(x, y, x^2 + y^2\right)$$

siendo $\mathcal{R}$ la proyección del manto sobre el plano xy y la región de integración. En este caso, esta

será $x^2+y^2\leq 1$. Calculamos el diferencial de superficie:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 2y\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-2x\\ -2y\\ 1\end{pmatrix}\rightarrow \mathrm{d}S=\left\|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\right\|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Integrando:

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Observe que esta integral de superficie es exactamente la misma que la del problema anterior. Bajo el mismo procedimiento,

$$\boxed{S=\frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right)}$$

Esto no es en lo absoluto una casualidad. Guarda relación con el hecho de que para ambos mantos los bordes quedan descritos por la circunferencia $x^2+y^2=1\leftarrow\partial\mathcal{K}$. Este resultado lo formalizaremos más adelante mediante el Teorema de Kelvin−Stokes.

Problema 5.4 Considere la superficie:

$$\mathbf{X}\left(u,v\right)=\left(u\,\mathrm{sen}\left(\alpha\right)\cos\left(\frac{v}{\mathrm{sen}\left(\alpha\right)}\right),u\,\mathrm{sen}\left(\alpha\right)\mathrm{sen}\left(\frac{v}{\mathrm{sen}\left(\alpha\right)}\right),u\cos\left(\alpha\right)\right)$$

donde $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ y $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $u>0$.

(a) Pruebe que $\mathbf{X}$ es una superficie parametrizada regular.

(b) Determine el ángulo formado por las curvas coordenadas.

(c) Calcule el área $\mathcal{A}\left(\mathbf{X}\left(\mathcal{D}\right)\right)$ donde

$$\mathcal{D}=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,:\,0<u<2,\quad 0<v<2\pi\right\}$$

Solución:

Sea $\mathcal{K}$ la superficie estudiada. Se puede notar que $\mathcal{K}$ presenta una clara simetría cilíndrica dada la ecuación de la parametrización. Inspeccionándola en detalle, corresponde a un cono al cual se le ajusta el radio a través de u y el barrido angular con v. Escogiendo los valores de α se escoge la inclinación del cono. Se deja propuesto graficar computacionalmente le manto para verificar estos resultados.

(a) Calculamos los vectores dirección de la superficie:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \left(\operatorname{sen}(\alpha)\cos\left(\frac{v}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right), \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{v}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right), \cos(\alpha)\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$$

$$\to \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \left(-u\cos\alpha\ \cos\left(\frac{v}{\operatorname{sen}\alpha}\right), -u\cos\alpha\ \operatorname{sen}\frac{v}{\operatorname{sen}\alpha}, u\operatorname{sen}\alpha\right)$$

Dado que $u > 0$ por la definición de la superficie, es imposible que este producto cruz se anule (la tercera componente nunca se anulará). Luego, los vectores normales de la superficie nunca se anulan, y por lo tanto la superficie es regular.

(b) Las curvas coordenadas se generan al considerarlas como las direcciones que generan el plano tangente a la superficie en un punto dado. Para un punto $\mathbf{p} \in \mathbf{X}$ se tendrá que el plano tangente viene dado por:

$$\Pi_{\mathrm{T}}(\mathcal{K}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}(\mathbf{p}) \right\rangle$$

Luego, las direcciones tangentes de las curvas coordenadas son

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}(\mathbf{p}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}(\mathbf{p})$$

De lo estudiado en Cálculo II, para las curvas obtenemos el producto punto entre sus tangentes y así obtenemos el ángulos que las curvas forman. Notamos que para todo punto $\mathbf{p}$ se cumplirá que

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = 0$$

reemplazando con las expresiones ya obtenidas para cada una de las derivadas parciales. Concluimos entonces que las curvas coordenadas son ortogonales.

(c) Tomando módulo al producto cruz ya calculado el diferencial de superficie viene dado por:

$$\mathrm{d}S = \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = |u|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Los límites de integración ya vienen dados. Luego,

$$S = \int_0^2 |u| \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v\mathrm{d}u = 2\pi \int_0^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$\to \boxed{S = 4\pi}$$

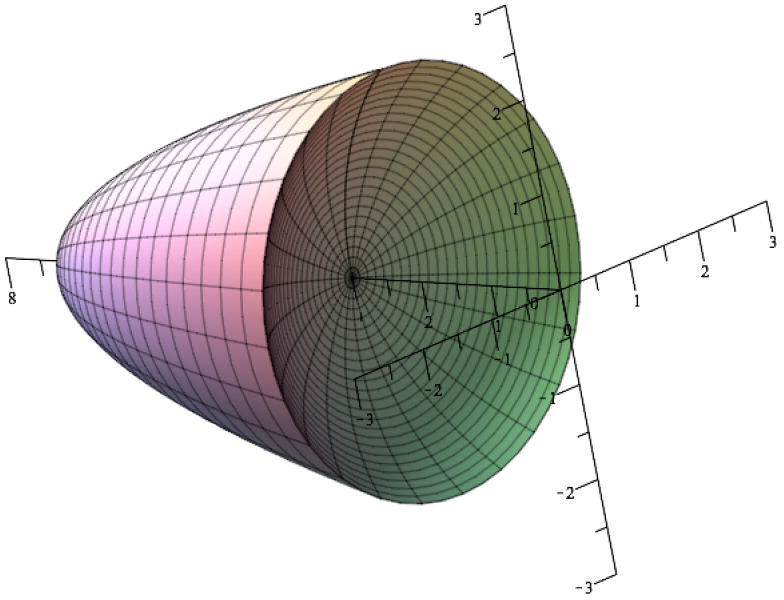
Problema 5.5 Sean $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ las superficies dadas por $x^2+y^2+z^2=9$ y $z=7-(x^2+y^2)$ respectivamente.

(a) Calcule el volumen del sólido limitado por $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$.

(b) Calcule el área sobre $\mathcal{K}_1$ contenida en $\mathcal{K}_2$.

Solución:

(a) La primera superficie es claramente una esfera y la segunda un paraboloide. Por lo tanto, no es complicado imaginar que la figura es una como la siguiente:



Luego, el volumen viene dado de acuerdo a lo aprendido según integrales triples. Dado que se observa una simetría claramente polar utilizamos coordenadas cilíndricas, obteniendo así que $\mathcal{K}_1$ se despeja en su rama positiva como $z=\sqrt{9-r^2}$ (la que efectivamente se *corta* con el paraboloide) y $\mathcal{K}_2$ cumple la ecuación $z=7-r^2$. Asimismo,

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Dado que el paraboloide limita por rriba al sólido y la esfera por abajo, esto nos permite establecer los extremos de integración en z. Buscamos la intersección en las componentes radiales,

$$\sqrt{9-r^2}=7-r^2 \longrightarrow r^4-14r^2+49=9-r^2$$

Es decir,

$$r^4-13r^2+40=0 \longrightarrow \left(r^2-5\right)\left(r^2-8\right)=0$$

De aquí se descarta $r^2 = 8$ pues en dicho caso $7 - r^2 < 0$ y por lo tanto no se satisface la ecuación. Despejando entonces,

$$r = \pm\sqrt{5}$$

Como en el sistema polar se asume que la componente radial es positiva, entonces:

$$r = \sqrt{5}$$

Ahora podemos escribir la integral:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_{\sqrt{9-r^2}}^{7-r^2} r \, \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{5}} r \left(7 - r^2 - \sqrt{9 - r^2}\right) \mathrm{d}r$$

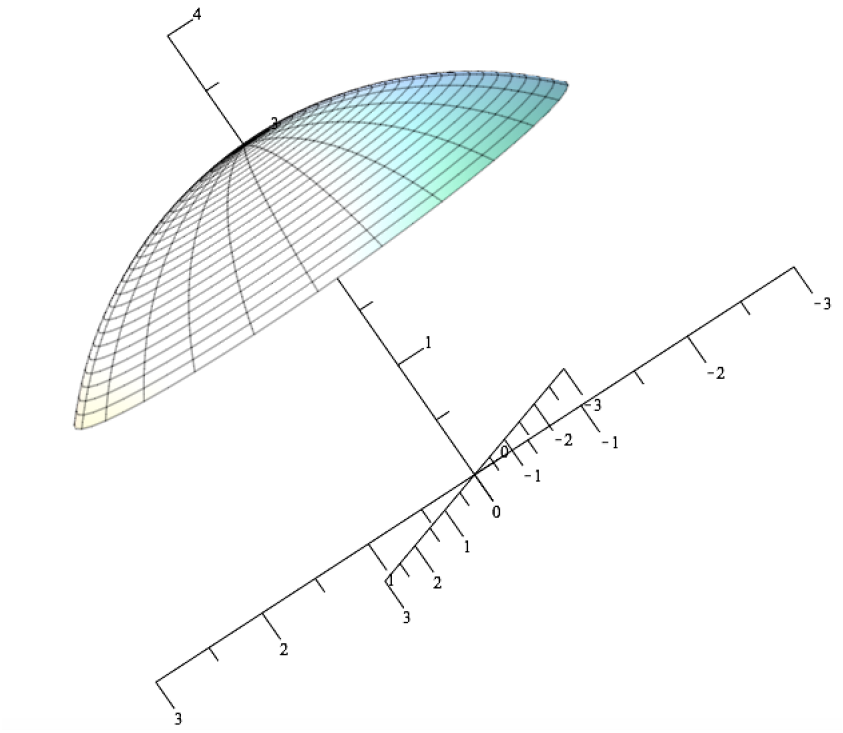
Haciendo $u = r^2$ se tiene entonces que:

$$V = \pi \int_0^5 \left(7 - u - \sqrt{9 - u}\right) \mathrm{d}u$$

Finalmente,

$$V = \pi \left(7\sqrt{5} - \frac{5}{2} - \frac{2}{3}\right) \longrightarrow \boxed{V = \pi \left(7\sqrt{5} - \frac{19}{6}\right)}$$

(b) El área en cuestión puede graficarse como se muestra a continuación de acuerdo a las figuras:



Claramente es una porción de circunferencia, por lo cual el diferencial de superficie puede parametrizarse como[a]:

$$\mathrm{d}S = r \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

donde $r = 3$ pues $\mathcal{K}_1$ es una esfera de radio 3 y por lo tanto en todo instante el radio toma dicho valor. En este caso, por la simetría de la figura se tiene que $\theta \in [0, 2\pi]$ y z se mueve desde 2 ($r = \sqrt{5}$ en $7 - r^2$ ó $\sqrt{9 - r^2}$) hasta 3 (donde la componente radial se hace cero). Finalmente,

$$S = \int_0^{2\pi} \int_2^3 2 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = 4\pi \longrightarrow \boxed{S = 4\pi}$$

Anexo: Simbólicamente se tiene que:

$$\mathrm{d}S = \text{longitud} \times \text{ancho}$$

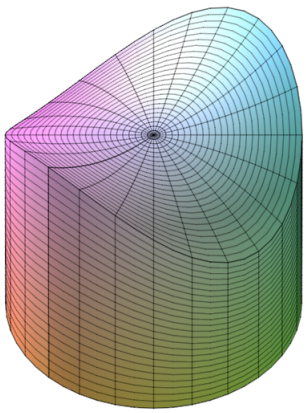
donde el ancho viene a ser $r \, \mathrm{d}\theta$ en coordenadas cilíndricas pues representa la longitud de un arco de barrido $\mathrm{d}\theta$ con ángulo r . Asimismo, la longitud viene a ser $\mathrm{d}z$ pues esta representa la variación en la coordenada z del diferencial. No se considera $\mathrm{d}r$ pues este le entregaría espesor al diferencial y lo convertiría en un diferencial de volumen.

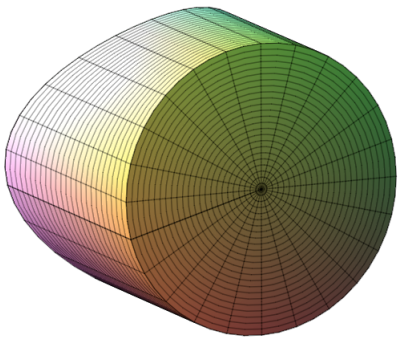
[a] Ver anexo del problema para obtener la explicación.

Problema 5.6 Considere la región encerrada por el manto de ecuación $z = x^2 - y^2 + 4$, el plano xy y el cilindro unitario $x^2 + y^2 = 1$. Calcule el área de la superficie que encierra esta región.

Solución:

Partimos graficando los elementos involucrados. En primer lugar, la superficie $z = x^2 - y^2 + 4$ es un hiperboloide (silla de montar) desplazado en 4 unidades hacia arriba en el sentido positivo del eje z. Considerando asimismo el cilindro unitario y el plano xy, se obtiene una figura como la siguiente (en dos de sus vistas):





Queda en evidencia que el área total es la suma de tres superficies: la silla de montar (1), el manto cilíndrico (2) y la base en el plano xy (3). Vamos calculando una por una:

- Es inmediato que (3) es un círculo de radio 1, por lo tanto,

$$\boxed{S_3 = 1}$$

- Asimismo, podemos calcular (1) considerando que dado que existe una especie de simetría cilíndrica podemos parametrizar utilizando este sistema de coordenadas:

$$z = x^2 - y^2 + 4 \longrightarrow z = r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + 4 = r^2\cos 2\theta + 4$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, 1]$ para cubrir así toda la componente radial. Hecho esto, podemos calcular el diferencial de superficie de acuerdo a la definición y la parametrización:

$$\mathbf{f}(r, \theta) = \left(r, \theta, r^2\cos 2\theta + 4\right)$$

Luego,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} = (1, 0, 2r\cos 2\theta) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} = \left(0, 1, -2r^2\operatorname{sen} 2\theta\right)$$

Es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2r\cos 2\theta \\ 0 & 1 & -2r^2\operatorname{sen} 2\theta \end{vmatrix} = \left(-2r\cos 2\theta, 2r^2\operatorname{sen} 2\theta, 1\right)$$

Luego,

$$\mathrm{d}S = \left(4r^2\cos^2 2\theta + 4r^4\operatorname{sen}^2 2\theta + 1\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Integrando:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4r^2\cos^2 2\theta + 4r^4\operatorname{sen}^2 2\theta + 1\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\cos^2 2\theta + \frac{4}{5}\operatorname{sen}^2 2\theta + 1\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{8}{15}\operatorname{sen}^2 2\theta + \frac{9}{5}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Concluimos así que:

$$\boxed{S_1 = \frac{26\pi}{15}}$$

- Para calcular S_2 consideramos ahora que la superficie es un manto cilíndrico con evidente simetría cilíndrica. La componente radial está siempre fija en 1 y la componente θ puede moverse libremente entre 0 y 2π. La componente z puede moverse entre 0 y $x^2 - y^2 + 4 = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 4$. Luego, como

$$\mathrm{d}S = 1\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Entonces se tendrá que:

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\cos 2\theta + 4} \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos 2\theta + 4 \,\mathrm{d}\theta \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{S_2 = 8\pi}$$

A partir de estos resultados concluimos que:

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_3 = 1 + \frac{146}{15}\pi}$$

5.1.2. Integrales de superficie sobre campos vectoriales

Consideremos un fluido en movimiento, en el cual se pueden describir sus velocidades a partir del campo $\mathbf{F}$ clase $\mathcal{C}^1$ (la naturaleza suele ser $\mathcal{C}^\infty$). Es decir, existe función $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t$,

Para muchas aplicaciones en mecánica de fluidos se desea saber cuánto de este fluido circula a través de una superficie $\mathcal{K}$. En otras palabras, deseamos saber el flujo neto a través de $\mathcal{K}$, lo cual se mide dimensionalmente como volumen/tiempo.

Digamos que la superficie se parametriza con la función $\mathbf{f}$ de modo que $\mathcal{K} = \mathbf{f}(\mathcal{S})$. Podemos pensar en el problema de flujo de forma diferencial, como siempre se ha hecho a lo largo de los cursos de cálculo. Entonces consideremos un elemento de superficie de área $\mathrm{d}S$. ¿Cuánto fluido está escapando a través de este elemento de superficie? Digamos que este elemento de superficie tiene una normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p})$ donde $\mathbf{p}$ es el punto asociado al diferencial de superficie. Entonces, la velocidad $\mathbf{F}$ en el punto $\mathbf{p}$ puede descomponerse en dos direcciones: una en la dirección de la normal y otra en la dirección perpendicular.

Consideremos la velocidad que va en la dirección paralela a la normal. De lo ya aprendido de álgebra lineal sabemos de inmediato que el valor de la velocidad en esta dirección viene dada por:

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \|\mathbf{F}\| \cos\theta$$

El fluido que escapa en esta dirección viene intuitivamente dado por velocidad del fluido $\times$ área del diferencial de superficie pues en $\mathrm{d}t$ circula $\mathrm{d}x$ fluido a través de un área $\mathrm{d}S$. Entonces un diferencial de flujo en la dirección de la normal viene dado por:

$$\mathrm{d}\Phi_{\parallel} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \,\mathrm{d}S$$

En la dirección perpendicular a la normal no medimos el flujo. Esto se debe a que este flujo no está atravesando el diferencial de superficie pues no nos interesa medirlo. Por lo tanto,

$$\mathrm{d}\Phi_{\perp} \equiv 0$$

Entonces el diferencial de fluido viene dado por:

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\Phi_{\parallel} + \mathrm{d}\Phi_{\perp} = \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S$$

Observe entonces que el flujo total se obtiene integrando estos diferenciales a lo largo de toda la superficie. Es decir, el flujo a través de una superficie puede verse como la integral de superficie escalar de la función $\mathbf{F}(\mathbf{p})\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p})$. Recuerde además que el diferencial de superficie puede escribirse como:

$$\mathrm{d}S = \left\|\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(no confunda: $\mathbf{f}$ es la parametrización, $\mathbf{F}$ el campo) y con ello escribimos la integral de superficie como una integral doble en $\mathcal{S}$. Adicionalmente, el vector normal unitario viene dado por:

$$\hat{\mathbf{n}} = \left\|\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}\right\|^{-1}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}\right)$$

con lo cual notamos que:

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Al igual que como hicimos en integrales de línea definiendo $\mathrm{d}\vec{\ell}$ como un diferencial vectorial que considera magnitud y dirección, definiremos el diferencial de superficie vectorial como:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Es decir,

$$\mathrm{d}\Phi = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Integrando esta fórmula sobre toda la superficie $\mathcal{K}$ concluimos que la integral puede escribirse como:

$$\Phi = \iint_{\mathcal{K}}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Esto ya es más que argumento suficiente para realizar la siguiente definición con claridad:

Definición: Sea $\mathcal{K} = \mathbf{f}(\mathcal{S})$ una superficie simple parametrizada por $\mathbf{f} : \mathcal{S}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, la cual proporciona una orientación dada por el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ en cada punto. Sea $\mathbf{F} : U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo continuo definido en el abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $\mathcal{K}$.

Se define la *integral de superficie* de $\mathbf{F}$ sobre $\mathcal{K}$, llamada también *flujo* de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{K}$ como:

$$\Phi(\mathbf{F},\mathcal{K}) = \iint_{\mathcal{K}}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{K}}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S \tag{5.6}$$

y que puede ser calculada directamente como:

$$\Phi(\mathbf{F},\mathcal{K}) = \iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{5.7}$$

Si la superficie es cerrada se emplea el operador $\oiint$.

En los siguientes problemas nos dedicaremos solamente a aplicar esta definición para calcular integrales de superficie vectoriales.

Problema 5.7 Calcule el flujo hacia afuera del campo $\mathbf{F} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + (1-2z)\,\hat{\mathbf{k}}$ a través del sólido acotado por el plano xy y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solución:

El sólido es fácil de imaginar: un paraboloide cóncavo hacia abajo tapado por el plano xy. Entonces, el flujo a través de la superficie puede escribirse como:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1}_{\Phi_1} + \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_2}_{\Phi_2}$$

donde $\mathcal{S}_1$ es el plano xy que genera la tapa del sólido y $\mathcal{S}_2$ la superficie parabólica que participa en la frontera del sólido.

Dada la simetría cilíndrica del problema, es fácil notar que una parametrización posible para $\mathcal{S}_1$ es:

$$\mathbf{f}_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$$

donde $r \in [0,2]$ (hasta $r=2$ llega la tapa, pues ahí se corta con el paraboloide en $z=0$) y $\theta \in [0, 2\pi]$. Derivando se puede obtener inmediatamente el vector normal:

$$\hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial v}\right) \left\| \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial v} \right\|^{-1}$$

Haciendo los cálculos (se dejan propuestos al lector) se puede notar con facilidad que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$. Este resultado es más que razonable, pues la tapa del plano xy estaba contenida en dicho plano, luego el vector unitario tenía que ser obligatoriamente este. Sin embargo, tengamos presente que esta normal medirá el flujo **hacia adentro del sólido**, pues la normal apunta hacia arriba. Digamos que el flujo obtenido así será:

$$\Phi_1^* = \iint_{\mathcal{S}_1^-} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 \to \Phi_1 = -\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1$$

Evidentemente, $\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = \hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}S_1$ donde $\mathrm{d}S_1$ corresponde al diferencial de área de una circunferencia. Conocido es en este caso entonces que $\mathrm{d}S_1 = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Evaluando en el campo:

$$\mathbf{F} = r\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

$$\to \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Integramos para obtener inmediatamente Φ_1, considerando el signo $-$:

$$\Phi_1 = -\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -4\pi$$

Ahora calculamos Φ_2, partiendo por parametrizar la superficie:

$$\mathbf{f}_2(x,y) = \left(x, y, 4-x^2-y^2\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial y} = \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 1 & 0 & -2x\\ 0 & 1 & -2y\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\2y\\1\end{pmatrix} \rightarrow \left\|\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial y}\right\| = \sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Integramos a lo largo de todo el manto. Para lograr esto, integramos sobre la proyección del manto parabólico sobre el plano xy: $x^2+y^2\leq 4$. Tenemos que de acuerdo a lo ya estudiado:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_2 &= \left(x, y, 2x^2+2y^2-7\right)\cdot(2x, 2y, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \left(4x^2+4y^2-7\right)\end{aligned}$$

Para integrar sobre toda la circunferencia de radio 2, pasamos a polares, con lo cual

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4r^2-7\right) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi\left(\int_0^2 4r^3\mathrm{d}r\right) - 7\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}_{4\pi}\\ &= 32\pi - 28\pi\\ &= 4\pi\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Phi = \Phi_1+\Phi_2 = -4\pi+4\pi$$
$$\rightarrow \boxed{\Phi = 0}$$

Antes de continuar, nos conviene ser prácticos y notar que existen ciertos diferenciales de superficie que pueden calcularse incluso de forma intuitiva o que bien son tan recurrentes que vale la pena memorizarlos:

- **(Porción de) Cascarón esférico de radio** r: Evidentemente conviene trabajar con coordenadas esféricas. Suponiendo que la ecuación

  $$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

  genera una superficie parametrizable tal que

  $$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}}\,r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{5.8}$$

  el cual es un resultado geométricamente razonable: la normal apuntará en el sentido $\hat{\mathbf{r}}$ y el diferencial $\mathrm{d}S$ corresponde a $\mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ sin el espesor $\mathrm{d}r$.

- **Porción de un plano en $\mathbb{R}^3$**: Consideremos el plano dado por la ecuación vectorial

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}) = 0 \longrightarrow ax + by + cz = d \tag{5.9}$$

donde $\mathbf{n}$ no es necesariamente unitario. Parametrizando se puede llegar a la conclusión que el diferencial depende del plano en que estemos integrando (o equivalentemente, de la variable que despejemos en función del resto en el plano). Si despejamos en función de z:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}^* \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad , \quad \text{donde } \hat{\mathbf{n}}^* = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) \tag{5.10}$$

En los otros casos, se dividirá por la letra respectiva en el denominador, y el resultado es el mismo solo porque la región de integración también cambia en función de las otras letras. Es razonable pensar que el diferencial siempre apuntará en la misma dirección, dada por la normal. El escalamiento se deduce de la parametrización, pero también es razonable: a más intensa la normal, más se mide la proyección sobre el campo.

- **Porción de disco sin espesor:** Si consideramos un disco o una porción de él sobre un plano, basta considerar la expresión anterior y llevarla a coordenadas polares (considerando la traslación del plano):

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}\, r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{5.11}$$

Observe que r representa la distancia del punto al elemento de superficie, por lo que hay que tener cuidado con esta parametrización.

- **Sección de manto cilíndrico:** Consideremos el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$. Si deseamos medir un diferencial de superficie en el manto podemos hacer:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}}\, r \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{5.12}$$

Nuevamente, $\hat{\mathbf{r}}$ es razonable pensando en le manto en cuestión. El diferencial $\mathrm{d}S$ simplemente corresponde al $\mathrm{d}V$ cilíndrico sin el espesor $\mathrm{d}r$: $r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z/\mathrm{d}r$.

Cualquier otro diferencial más complejo debe ser calculado.

Problema 5.8 Calcule el flujo hacia afuera producido por el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\left(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

sobre la región $\Omega \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.

Solución:

Es fácil notar que estamos calculando el flujo hacia el exterior de un cascarón esférico, determinado por dos superficies de radio 1 y $\sqrt{2}$ respectivamente. Por calcular

$$\Phi = \oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 + \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_2$$

donde $\mathcal{S}_1$ es la tapa exterior de la región y $\mathcal{S}_2$ la tapa exterior. Partimos por notar que en el problema existe una clara e indiscutible simetría esférica pues se está midiendo la distancia al origen. En efecto, en el sistema (r, θ, φ) se tendrá que:

$$\mathbf{F} = r^2\,\hat{\mathbf{r}}$$

pues $x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ por cómo está definido el sistema polar. De forma análoga, la superficie corresponde a dos cascarones esféricos. Para el interior la normal unitaria apuntando hacia afuera puede obtenerse por los cálculos ya conocidos, pero aquí nos aprovecharemos de la simetría de la figura, y podemos notar que en este caso viene dada por $-\hat{\mathbf{r}}$. Para el cascarón exterior se puede notar también que la normal unitaria es $\hat{\mathbf{r}}$.

Aprovechando la simetría esférica, se puede demostrar que el diferencial de superficie para un radio r viene dado por: $\mathrm{d}S = r^2 \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ (el ya conocido diferencial de volumen, en el cual se prescinde del espesor $\mathrm{d}r$). Luego,

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = 2\hat{\mathbf{r}} \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_2 = -\hat{\mathbf{r}} \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

En otras palabras, integrando en $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$ (para cubrir todo el cascarón) tendremos que:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 2\hat{\mathbf{r}}\cdot 2\hat{\mathbf{r}} \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 16\pi - 4\pi\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\Phi = 12\pi}$$

Problema 5.9 Calcule el flujo hacia afuera del campo $\mathbf{F} = (2xy, z, y)$ a través del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$ con sus normales apuntando hacia el interior.

Solución:

El flujo a través del cilindro puede descomponerse como la suma del flujo en cada una de sus tres tapas:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

donde Φ_1 es el flujo a través del manto cilíndrico, Φ_2 el flujo a través de la tapa superior y Φ_3 es el flujo a través de la tapa inferior.

La simetría es indiscutiblemente cilíndrica y se pueden parametrizar inmediatamente las superficies de acuerdo a como se define:

$$\mathbf{f}_1(z, \theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$$

$$\mathbf{f}_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 1)$$
$$\mathbf{f}_3(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, -1)$$

Luego, es fácil notar que:

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = \hat{\mathbf{r}}\,1\cdot \mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\mathbf{S}_2 = \hat{\mathbf{k}}\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}\mathbf{S}_3 = -\hat{\mathbf{k}}\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

el tercer diferencial se parametrizó con el signo $-$ para hacer notar que el flujo apunta hacia el exterior.

Calculamos el primer flujo: (recordar que $\hat{\mathbf{r}} = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0)$)

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}_1) = (2\cos\theta\ \mathrm{sen}\,\theta, z, \mathrm{sen}\,\theta) \to \Phi_1 = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + z\,\mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta$$

Notamos que ambas integrales se anulan al integrarlas entre 0 y 2π. Luego,

$$\boxed{\Phi_1 = 0}$$

Análogamente,

$$\boxed{\Phi_2 = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0}$$

$$\boxed{\Phi_3 = -\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0}$$

Finalmente, $\boxed{\Phi = 0}$.

5.2. La divergencia y el rotor

Como trabajo de ejercitación previo definiremos los conceptos de divergencia y rotor simplemente como formas diferenciales definidas a partir del operador nabla. Esto para familiarizarnos con algunas de las operaciones y productos que se pueden generar a partir de este.

Por ahora no realizaremos ninguna interpretación física, pues dejaremos estas asociadas a cada teorema en su momento respectivo.

Partamos definiendo el concepto de **rotor**:

Definición: Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. Se define el *rotor* o *campo rotor*, como aquel campo $U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o forma diferencial obtenida a partir de las derivadas parciales de $\mathbf{F}$ mediante la operación:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \vec{\nabla} \times \mathbf{F} \triangleq \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{k}}. \tag{5.13}$$

Adicionalmente, una vez comprendido el Teorema de Kelvin−Stokes, suele definirse como:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \lim_{A(\mathcal{K})\to 0} \frac{1}{A(\mathcal{K})} \oint_{\partial K^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}. \tag{5.14}$$

Y el de **divergencia**:

Definición: Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. Se define la *divergencia* como aquella forma diferencial definida como:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{5.15}$$

Una vez comprendido el Teorema de la Divergencia, suele definirse como:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \lim_{V(\Omega)\to 0} \frac{1}{V(\Omega)} \oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{5.16}$$

Observe que ambas formas diferenciales se definen a partir de operaciones vectoriales con el operador nabla, donde se hace el abuso de notación de considerar la multiplicación escalar de una derivada parcial con una función como la aplicación de la derivada sobre la función.

Por ahora solo nos limitaremos a demostrar algunas propiedades importantes, y que son utilizadas en ocasiones para realizar algunos desarrollos teóricos en mecánica de fluidos y electromagnetismo y a su vez para desarrollar algunos de los problemas a los que nos enfrentaremos próximamente.

Problema 5.10 Muestre las siguientes identidades vectoriales:

(a) si $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$ con $f \in \mathcal{C}^2$, entonces $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$.

(b) si $\mathbf{F} = \vec{\nabla} \times \mathbf{G}$ con $\mathbf{G} \in \mathcal{C}^1$, entonces $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 0$.

(c) $\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{\nabla} g - g\vec{\nabla} f \right) = f\vec{\nabla}^2 g - g\vec{\nabla}^2 f$.

(d) $\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{\nabla} g \right) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + f\vec{\nabla}^2 g$.

(e) $\vec{\nabla} \times (f\mathbf{F}) = \left(\vec{\nabla} f \right) \times \mathbf{F} + f \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F} \right)$.

(f) $\vec{\nabla} \times \left(f\vec{\nabla} g \right) = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$.

Solución:

(a) Reemplazando en $\vec{\nabla} \times \mathbf{F}$:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$$

Aplicamos el rotor componente a componente, pensando que:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Entonces,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \hat{\mathbf{j}} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \hat{\mathbf{k}}$$

Dado que las derivadas parciales cruzadas son iguales pues f es de clase $\mathcal{C}^1$ (gracias al Lema de Schwarz), entonces cada una de las componentes se anulará, concluyendo así que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$$

Sin embargo, observe que este resultado es más que obvio, puesto que si $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo y por lo tanto es obvio que cumplirá la condición necesaria ya estudiada con anterioridad. Este resultado no hace más que demostrar de otra forma el mismo resultado.

Se dice entonces que los campos gradientes son **irrotacionales** pues su rotor se anula.

(b) Digamos que $\mathbf{G} = (G_x, G_y, G_z)$, entonces:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{G} = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

Tomándole la divergencia a este campo:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{G}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_z}{\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial G_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial G_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial G_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial z\partial y}\end{aligned}$$

Observe que los términos el mismo color se cancelarán pues cada G_i es de clase $\mathcal{C}^2$ por hipótesis. Finalmente,

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{G}\right)=0$$

No entraremos en más detalles, pero se dice que entonces existe una *función potencial vectorial* para $\mathbf{F}$, conocida como $\mathbf{G}$, pues $\mathbf{F}=\vec{\nabla}\times\mathbf{G}$. Estas funciones son ampliamente utilizadas en aplicaciones de electromagnetismo, en particular en antenas.

(c) Observe que esta propiedad es una especie de regla del producto. En efecto, partamos demostrando que:

$$\vec{\nabla}\cdot(u\mathbf{V})=\vec{\nabla}u\cdot\mathbf{V}+u\vec{\nabla}\cdot\mathbf{V}$$

Por definición:

$$\vec{\nabla}\cdot(u\mathbf{V})=\frac{\partial\left(uV_x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(uV_y\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(uV_z\right)}{\partial z}$$

Aplicando ahora regla del producto:

$$\vec{\nabla}\cdot u\mathbf{V}=\frac{\partial u}{\partial x}V_x+u\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}V_y+u\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}V_z+u\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Reagrupando términos a conveniencia para llegar a lo pedido:

$$\vec{\nabla}\cdot u\mathbf{V}=\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}V_x+\frac{\partial u}{\partial y}V_y+\frac{\partial u}{\partial z}V_z\right)}_{\vec{\nabla}u\cdot\mathbf{V}}+u\underbrace{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}_{\vec{\nabla}\cdot\mathbf{V}}$$

Finalmente,

$$\vec{\nabla}\cdot u\mathbf{V}=\vec{\nabla}u\cdot\mathbf{V}+u\vec{\nabla}\cdot\mathbf{V}\rightarrow(*)$$

Hagamos entonces $u=f$ y $\mathbf{V}=\vec{\nabla}g$. Se sigue que:

$$\vec{\nabla}\cdot u\mathbf{V}=\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g\right)=\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g+f\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}g$$

Notando que $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}g=\vec{\nabla}^2g$:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g\right)=\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g+f\vec{\nabla}^2g\leftarrow\text{¡es la parte (d)!}$$

Análogamente obtenemos que:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(g\vec{\nabla}f\right)=\vec{\nabla}g\cdot\vec{\nabla}f+g\vec{\nabla}^2f$$

Restando ambas ecuaciones, observamos que los primeros términos a la derecha de cada ecuación se cancelarán, obteniendo así:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g\right)-\vec{\nabla}\cdot\left(g\vec{\nabla}f\right)=f\vec{\nabla}^2g-g\vec{\nabla}^2f$$

Como el operador $\vec{\nabla}$ y el producto punto son lineales, concluimos que:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g-g\vec{\nabla}f\right)=f\vec{\nabla}^2g-g\vec{\nabla}^2f}\quad\blacksquare$$

(d) Lo demostramos en la parte anterior usando $(*)$.

(e) Apliquemos por definición el rotor a la función $f\mathbf{F}=fF_x\,\hat{\mathbf{i}}+fF_y\,\hat{\mathbf{j}}+fF_z\,\hat{\mathbf{k}}$. Entonces:

$$\vec{\nabla}\times(f\mathbf{F})=\left[\frac{\partial\left(fF_z\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(fF_y\right)}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{i}}+\left[\frac{\partial\left(fF_x\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(fF_z\right)}{\partial x}\right]\hat{\mathbf{j}}+\left[\frac{\partial\left(fF_y\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(fF_x\right)}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{k}}$$

Revisemos la primera componente:

$$\frac{\partial\left(fF_z\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(fF_y\right)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial y}F_z+f\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}F_y-\frac{\partial F_y}{\partial z}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}F_z-\frac{\partial f}{\partial z}F_y\right)+f\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)$$

Observe que el primer término en paréntesis corresponde en efecto a la primera componente de $\vec{\nabla}f\times\mathbf{F}$ y el término en el segundo paréntesis a la segunda componente de $f\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)$. Se procede por analogía para las componentes adicionales. Concluimos entonces que:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times(f\mathbf{F})=\vec{\nabla}f\times\mathbf{F}+f\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)}$$

Es decir, para este tipo de producto escalar−vector sí existe la regla del producto cruz para el operador nabla. $\blacksquare$

(f) De la ecuación anterior, basta hacer $\mathbf{F}=\vec{\nabla}g$, con lo cual

$$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{\nabla}g\right)=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g+f\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}g\right)$$

Pero ya demostramos en la parte (a) que los campos gradientes son irrotacionales, por lo que $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}g=0$. Concluimos así que:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\left(f\vec{\nabla}g\right)=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g}\quad\blacksquare$$

De la parte anterior, se pueden resumir todas las fórmulas en las siguientes ecuaciones trascendentes:

- El campo gradiente es irrotacional:$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f=0$.
- El campo rotor no diverge: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)=0$.

- Se cumple la regla del producto para funciones escalar−vector:

$$\vec{\nabla} \cdot (f\mathbf{g}) = \vec{\nabla} f \cdot \mathbf{g} + f\vec{\nabla} \cdot \mathbf{g}$$

$$\vec{\nabla} \times f\mathbf{g} = \vec{\nabla} f \times \mathbf{g} + f\vec{\nabla} \times \mathbf{g}$$

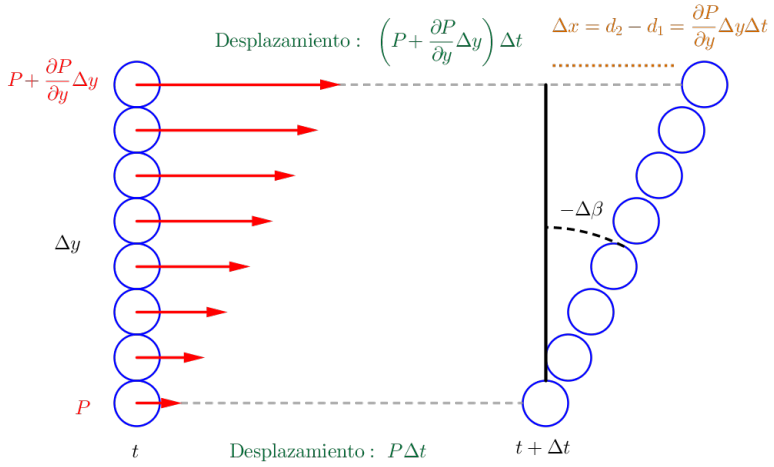
5.3. El Teorema de Kelvin-Stokes

Nota: En esta sección se tratará este teorema de forma práctica, no en toda su rigurosidad matemática. El teorema en cuestión es altamente abstracto, y no tiene absolutamente **ningún** sentido si es que no se interpreta en su sentido físico. Por esta razón es que la demostración −extensa y compleja− se dejará en un documento anexo. En lo que aquí nos enfocaremos es en comprender físicamente el significado del rotor y del Teorema de Kelvin−Stokes.

Lo primero que haremos es comprender con lujo de detalles lo que significa físicamente el concepto de rotor, por lo cual revisaremos esta pregunta que lo aclara. Resolver esta pregunta es requisito para los desarrollos posteriores, pues se asumirán comprendidos.

Problema 5.11 Considere el campo $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ de clase $\mathcal{C}^1$ el cual interpretaremos como un campo de velocidades sobre un fluido. Sobre cada elemento de fluido (un diferencial $\mathrm{d}V$) está actuando la velocidad del campo anteriormente descrito. Considere un campo actuando como el de la siguiente figura, donde la velocidad en el eje x (dada por P) varía a lo largo de y.

Se puede asumir que el movimiento de las partículas se verá como en la siguiente figura transcurrido un instante Δt y considerando un diferencial de fluido de alto Δy:



Se puede decir entonces que los elementos de fluido se están *deformando* o *rotando* por efecto de la velocidad.

Se define la *rotación* en torno al eje z como el promedio de la velocidad angular generada en el eje x y la velocidad angular generada en el eje y por efecto del campo $\mathbf{F}$. En otras palabras,

$$r_z \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} + \frac{\Delta\beta}{\Delta t}\right). \tag{5.17}$$

Ayudándose de la figura, demuestre que:

$$r_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{5.18}$$

Ayuda: Recuerde que para $\theta \to 0$ se tiene que $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta$.

Solución:

De la figura se observa que:

$$\tan(-\Delta\beta) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Usando la aproximación de ángulo pequeño (razonable considerando que es un desarrollo de Taylor y que Δy y Δt siempre serán muy pequeños):

$$-\Delta\beta \approx \frac{\partial P}{\partial y}\Delta t$$

donde se considera el signo $-$ en el $\Delta\beta$ debido a que nuestro sistema de referencia original mide el giro en sentido antihorario y aquí esta ocurriendo claramente en sentido horario, por lo cual el movimiento anteriormente descrito va en el sentido contrario a nuestra convención. Se sigue que:

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} \approx -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{y cuando } \Delta t \to 0\text{: } \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

¿Y dónde quedó el formalismo matemático? Esta última idea se valida matemáticamente a partir del residuo de los desarrollos de Taylor: estos tenderán a cero cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0$. Sin embargo, teniendo conceptualmente claros estos desarrollos, observe el lector lo tedioso que puede resultar tener en mente todas esas consideraciones, no aportando en lo absoluto al desarrollo conceptual. Por esta razón es que se prescinde de dichos detalles, aunque se reconoce su validez, en aplicaciones físicas e ingenieriles. No nunca olvide lo que aprendió de matemáticas, ya que siempre lo acompañará, ¡pero sea práctico!

Análogamente, consideramos la misma situación para la línea horizontal de partículas de fluido. En un punto $\mathbf{p}$ tenemos asociada la velocidad Q hacia arriba, al movernos en Δx hacia la derecha tendremos la velocidad aproximada por Taylor:

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x$$

Transcurridos Δt unidades de tiempo, el desplazamiento en $\mathbf{p}$ será de $Q\Delta t$ hacia arriba y el de el punto a distancia Δx estará desplazado en

$$Q\Delta t + \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x\Delta t \to \Delta y = \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x\Delta t.$$

La diferencia entre ambos desplazamientos genera una diferencia de altura que engendra el $\Delta\alpha$ de la velocidad angular. En este caso la medición es positiva, pues de acuerdo a nuestra convención (asumiendo todo algebraicamente positivo) el giro generado en el diferencial de volumen será en sentido horario. De esta forma,

$$\tan\Delta\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x\Delta t$$

Bajo la misma aproximación:

$$\Delta\alpha \approx \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta t \to \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \approx \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Entonces,

$$r_z = \frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

pues nuestras aproximaciones de Taylor pueden ser reemplazadas en el límite para el cálculo, y generan el mismo resultado que las funciones originales. Observe que gracias a las aproximaciones hemos eliminado la dependencia temporal y de esta forma,

$$\boxed{r_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)} \quad \blacksquare$$

Problema 5.12 Considerando los resultados obtenidos en la pregunta anterior:

(a) Se definen por analogía r_x y r_y. Concluya que:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right). \tag{5.19}$$

(b) A partir del resultado anterior, interprete físicamente el significado del rotor de un campo $\mathbf{F}$.

Solución:

(a) Observe que r_x es la rotación en torno al eje x, por lo cual se considera la variación de ángulo en el plano yz. Ahora consideramos el plano yz en el mismo orden que el desarrollo anterior, pues $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$. Entonces es fácil deducir que las demostraciones son análogas, llegando así a que

$$r_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)$$

Para r_y tenemos que hacer la deducción en el plano xz, pero ahora $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$, por lo cual asociamos el eje z al eje x en nuestra demostración anterior y el eje x al eje y en la misma deducción. Se sigue entonces que:

$$r_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

Ya hemos obtenido $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$. Para finalizar basta compactar la notación de acuerdo a lo que ya sabemos sobre el operador nabla. En particular, recordamos que $\vec{\nabla} \times \mathbf{F}$ es aplicar el operador derivada asociado a cada componente de $\vec{\nabla}$ en el mismo orden del producto cruz. Aprovechando la linealidad de los operadores, concluimos que:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \mathbf{F}$$

(b) Lo importante acá es notar que

$$\mathbf{r} \propto \vec{\nabla} \times \mathbf{F}$$

Es decir, si el rotor de $\mathbf{F}$ es alto, entonces también lo es la rotación. Por esta misma razón, el factor $1/2$ solo cumple un rol de normalización y es irrelevante.

Esto nos lleva a concluir que el rotor de $\mathbf{F}$ es una medida (en cuanto discrimina cuantitativamente el valor de dos campos distintos) de cuánto se está rotando un diferencial de fluido/volumen $\mathrm{d}V$ en el punto dado, en cada uno de los ejes de giro.

Es fácil notar que si el rotor no es nulo, entonces los diferenciales $\mathrm{d}V$ no solo pueden estar eventualmente girando, si no que deformándose por efecto del campo de velocidades. Piense en la primer ilustración: si proyecta esa misma figura en un pequeño rectangulito, transcurrido Δt este claramente se habrá deformado en un paralelógramo. Más aún, si consideramos el efecto en x, puede haberse convertido en cualquier cuadrilátero. Y si el rotor es nulo, este efecto los elementos de fluido −y por lo tanto el campo− no se rotan ni se deforman.

No confundir: El rotor no está midiendo el efecto que produce el campo sobre elementos externos, si no sobre los mismos elementos que constituyen el campo. En este caso, el campo de velocidades está dado por los mismos diferenciales de volumen. El rotor no guarda relación directa con lo que pasaría si soltamos un objeto externo en este campo.

Consideremos ahora un plano paralelo al xy. Su normal claramente puede ser $\alpha\hat{\mathbf{k}}$ con α arbitrario. ¿Qué nos entrega entonces el producto entre estar normal del plano y el rotor en uno de sus puntos? Veámoslo:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \to \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} r_z$$

Es decir, obtenemos una medida de la rotación en el plano xy, ignorando lo que pasa en los demás planos. ¿Qué pasa entonces al multiplicar el rotor por un plano arbitrario de normal $\mathbf{n}$? ¡Obtenemos una medida de cuánto se está rotando el campo en el plano en cuestión! Observe que la medida evidentemente dependerá de la magnitud del vector.

Seamos aún más osados, dada una superficie simple y suave $\mathcal{K}$. ¿Cómo medimos cuánto se está rotando el campo en un punto $\mathbf{p}$ de la superficie? Con lo que ya hemos visto,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\left(\mathbf{p}\right) \cdot \mathbf{N_f}\left(\mathbf{p}\right)$$

sería una medida de la rotación en el punto en cuestión. Si quisiéramos una medida del rotor a lo largo de toda una superficie arbitrario, lo correcto sería que en cada punto asociemos el vector ponderado por una magnitud del diferencial de área. Entonces, es razonable integrar

$$\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Piense en lo que ocurre al integrar esto en términos discretos: cada diferencial está midiendo la rotación del campo en el diferencial de superficie en cuestión. ¿Qué pasa si el diferencial continuo también tiene una rotación similar? Tenderán a hacer una rotación más fuerte. ¿Y si el continuo pasa a tener una rotación negativa? Tenderán a anularse.

Revisemos ahora qué representa una integral de línea en $\mathbb{R}$ inspeccionando su estructura:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Observe que estamos ponderando la tangente de la curva por el campo, o bien estamos tomando $\mathbf{F}$ y obteniendo el valor de su proyección sobre $\mathrm{d}\vec{\ell}$. Esto puede entenderse naturalmente como un torque que ejerce $\mathbf{F}$ sobre la circunferencia osculatriz que describe la curva en el punto para el que se está

tomando el $\mathrm{d}\vec{\ell}$. Por esta razón se dice que la integral de línea es una suma de los torques o bien medida de la circulación de la curva a través del campo.

Al integrar los $\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ sobre una superficie $\mathcal{K}$, observe que todas las rotaciones van superponiéndose entre ellas hasta llegar a la frontera. Es decir, a partir de lo que ocurre al interior de la superficie podemos tener una pista de lo que está ocurriendo en la frontera de ella. ¿Cómo medimos lo que ocurre en la frontera? Dado que la frontera es un conjunto unidimensional, es razonable pensar que será a través de una integral de línea (adivine cuál).

Precisamente esto es lo que hace el Teorema de Kelvin−Stokes. Conecta las rotaciones de la superficie en su interior con lo que ocurre en la frontera de esta. En otras palabras, generaliza a $\mathbb{R}^3$ el concepto que plantea el Teorema de Green, y en analogía al Teorema de la Divergencia, plantea un concepto intuitivo: la "circulación" de un campo en una curva se puede medir como la suma de la circulación en cada punto de tamaño infinitesimal contenido en ella.

Teorema: Teorema de Kelvin−Stokes. Sea $\mathcal{K}$ una superficie simple orientable, parametrizada por la función $\mathbf{f} : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^2$ donde $\mathcal{S}$ es una región del tipo I y II que proporciona a su vez la orientación de $\mathcal{K}$. Adicionalmente, sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en (todo punto de) el conjunto abierto de U tal que $\mathcal{K} \subset U$.

Entonces,

$$\oint_{\partial\mathcal{K}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{K}} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{5.20}$$

Es decir, la circulación a través de una curva es igual a la suma de las rotaciones de cualquier superficie cuya frontera sea igual a la curva. Nuevamente, tenemos la conexión entre un problema de contorno y un problema de área, el cual se agrega a los dos que ya conocíamos: el Teorema de Green y el Teorema Fundamental del Cálculo.

Observación 1: Observe que al ser $\mathcal{K}$ una superficie simple, orientable y no cerrada se puede demostrar con argumentos de geometría diferencial que $\partial\mathcal{K}$ es una curva cerrada simple. Es decir, una curva de Jordan. En otras palabras, el teorema también puede ser visto desde el punto de vista de una curva de Jordan Γ y una superficie cuya frontera coincide con la curva.

Recordar que $\partial\mathcal{K} = \mathbf{f}\left(\partial\mathcal{S}\right)$, la cual es una aplicación no inyectiva. En otras palabras, existen infinitas $\mathbf{f}_i$ de distintas superficies tales que

$$\partial\mathcal{K} = \mathbf{f}_1\left(\partial\mathcal{S}_1\right) = \mathbf{f}_2\left(\partial\mathcal{S}_2\right) = \cdots$$

Si le cuesta visualizar esta observación, piense en una porción de paraboloide cortada por un plano paralelo a su vértice. La frontera será evidentemente una circunferencia. Esta circunferencia, ¿de cuántas superficies es frontera? ¡De infinitas! No solo de paraboloides con distinta concavidad, si no que también de esferas, conos, etc.

Observación 2: El Teorema de Green no es más que un caso particular de este teorema. Supongamos que tenemos una curva plana. Pensando que este resultado ocurre en $\mathbb{R}^2$, podemos asociarlo al plano

xy, por lo tanto, asumamos que la curva de Jordan $-$que denotaremos $\gamma-$ está contenida en el plano xy.

Tomemos como superficie el interior de la curva γ, y en particular de las infinitas que nos sirven en el Teorema de Kelvin$-$Stokes, quedémonos con aquella que está contenida también en el plano. Hagamos entonces $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}A$ (diferencial de área en el plano xy) y $\mathrm{d}\vec{\ell} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, 0)$ (la curva no varía en z). Luego, de

$$\oint_{\partial\mathcal{K}^+} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{K}} \left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\to \oint_{\partial\mathcal{K}^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{K}} \left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}A$$

Al lado derecho se observa que solo debemos tomar la componente z del rotor, es decir,

$$\oint_{\partial\mathcal{K}^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{S}} \left(Q_x - P_y\right)\,\mathrm{d}A$$

recuperando así el resultado concluido por el británico George Green.

Observación 3: Para identificar con facilidad la orientación positiva de la curva con respecto a la superficie, podemos usar la regla de la mano derecha. El pulgar nos indicará hacia donde deben apuntar las normales del manto pertinente.

Entonces, dicho todo esto, revisemos una de las primeras aplicaciones del teorema. Si tenemos una integral de línea difícil de calcular, podemos convertir el problema de contorno en uno de área. Sin embargo, ahora podemos escoger infinitas superficies que cumplan lo pedido, ¿con cuál nos quedamos? **Con la que nos convenga.** Esta por lo habitual suele ser una superficie plana, ya que de esta forma calcular el diferencial de superficie suele ser habitualmente muy sencillo.

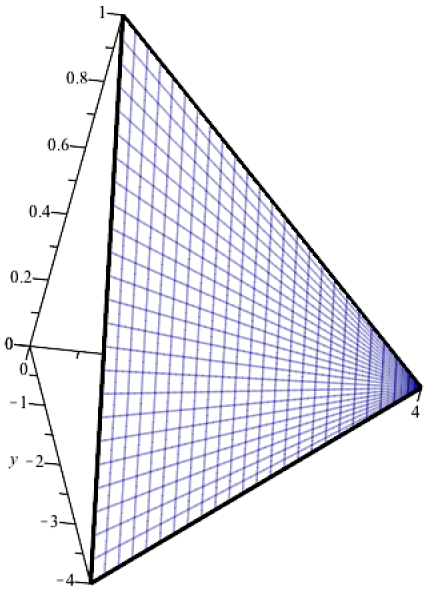
Problema 5.13 Sea la función vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (-z^2, 0, y) = -z^2\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{k}}$ definida en $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{S}$ la parte del plano $x - y + 4z = 4$ incluida en el octante $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$. Verifique el Teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ y $\mathcal{S}$.

Solución:

En otras palabras, deberemos verificar que:

$$\oint_{\Gamma^+} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}^+} \left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

donde $\Gamma^+ = \partial^+\mathcal{S}^+$, calculando cada uno de los miembros de la ecuación por separado. Observando que la normal del plano es $(1,-1,4)$, es fácil imaginar la situación en cuestión:



Haciendo el despeje $z = 1 - x/4 + y/4$ sabemos inmediatamente que:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

y la dirección de la normal es correcta, por inspección del gráfico. Calculando el rotor,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = (1, -2z, 0) \rightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{F}\left(\mathcal{S}\right) = \left(1, \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - 2, 0\right)$$

Es decir,

$$\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

integrando en el plano xy para generar la superficie, hacemos simplemente $z = 0$ en la ecuación del plano, i.e. $x - y = 4$, con lo cual la integral doble se escribe como:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^4 \int_{x-4}^0 \left(\frac{1}{8} - \frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{10}{3}$$

Ahora tenemos que calcular la integral de línea. Siguiendo la mano derecha (de acuerdo a la normal que tomamos anteriormente), se tendrá que la curva debe ir secuencialmente y en línea recta por los puntos $(0, -4, 0) \rightarrow (4, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, -4, 0)$. Por lo tanto, separamos la integral de línea en estos tres tramos, que llamaremos $\vec{\lambda}_1$, $\vec{\lambda}_2$ y $\vec{\lambda}_3$ respectivamente.

Ya sea por inspección o su método favorito, podemos notar que posibles parametrizaciones para cada curva son:

$$\vec{\lambda}_1\left(t\right) = (t, -4 + t, 0) \quad ; \quad t \in [0, 4]$$

$$\vec{\lambda}_2\left(t\right) = \left(4 - t, 0, \frac{t}{4}\right) \quad ; \quad t \in [0, 4]$$

$$\vec{\lambda}_3(t) = \left(0, -t, 1 - \frac{t}{4}\right) \quad ; \quad t \in [0, 4]$$

Calculamos cada una de las integrales de línea por separado.

- $\vec{\lambda}_1$: se tendrá $\mathrm{d}\vec{\ell} = (1, 1, 0)\,\mathrm{d}t$ y $\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}_1\right) = (0, 0, t)$, con lo cual inmediatamente:

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \to \int_{\vec{\lambda}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0,$$

- $\vec{\lambda}_2$: se tendrá $\mathrm{d}\vec{\ell} = \left(-1, 0, \frac{1}{4}\right)$ y $\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}_2\right) = \left(-\frac{t^2}{16}, 0, 4 - t\right)$. Luego,

$$\int_{\vec{\lambda}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^4 \frac{t^2}{16} + 1 - \frac{t}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3} + 4 - 2 = \frac{10}{3}$$

- $\vec{\lambda}_3$: se tendrá $\mathrm{d}\vec{\ell} = \left(0, -1, -\frac{1}{4}\right)$ y $\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}_3\right) = \left(-\left(1 - \frac{t}{4}\right)^2, 0, 0\right)$. Luego,

$$\int_{\vec{\lambda}_3} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

  pues $\mathbf{F}$ y $\mathrm{d}\vec{\ell}$ en este caso son ortogonales.

Finalmente,

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\vec{\lambda}_i} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{10}{3}.$$

En otras palabras, se verifica el Teorema de Kelvin−Stokes. ■

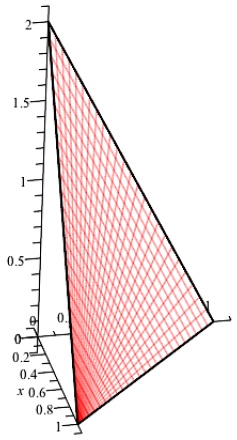
Problema 5.14 Calcular $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ siendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2y + \operatorname{arcsen} x, e^{y^2}, y^2 + \ln\left(z^2 + 4\right)\right)$$

y $\mathcal{C}$ el contorno del triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$ recorrido en el orden indicado por los vértices.

Solución:

Grafiquemos el contorno para no confundirnos con lo que estamos haciendo:



Es evidente la tediosidad que puede significar calcular esta integral de línea mediante su definición. Lo que podemos hacer entonces es convertir el problema de contorno en uno de área mediante el teorema del rotor. La primera pregunta es: ¿con qué superficie nos quedamos? Por ahora, con el triángulo plano que se genera pues las superficies planas son muy sencillas de parametrizar, en el sentido de que la normal nunca varía, y el diferencial de área al considerar la integración en el plano xy viene dado por:

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal del plano (sin normalizar).

El resto del procedimiento es bastante directo, y solo consiste en aplicar correctamente el teorema.

- Calculemos el campo rotor de $\mathbf{F}$ inmediatamente. Si hacemos $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, calculamos el rotor por definición:

  $$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = (R_x - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

  donde

  $$R_y - Q_z = 2y - 0$$
  $$P_z - R_x = 0 - 0$$
  $$Q_x - P_y = 0 - 2$$

  con lo cual $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = (2y, 0, -2)$.

- Ahora busquemos la ecuación del plano, podemos decir que este viene dado por

  $$ax + by + cz = d$$

  con $d \neq 0$ pues el plano no pasa por el origen. Reemplazando con los valores conocidos:

  $$a = d$$

  $$b = d$$

$$2c = d$$

Entonces, considerando la no nulidad de d:

$$dx + dy + \frac{d}{2}z = d \to 2x + 2y + z = 2$$

es la ecuación del plano buscada.

- Para aplicar el teorema, consideramos la orientación que está siguiendo esta curva. Escogiendo el plano como la superficie, la pregunta es: ¿en qué dirección tomamos la normal? Considerando la dirección de la curva, podemos aplicar la regla de la mano derecha y obtener que la normal debe apuntar en dirección positiva de los ejes x, y y z. Luego, una normal posible es:

$$\mathbf{n} = (2, 2, 1) \to \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$$

Se sigue luego de la definición de integral de superficie:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

¿Dónde la integramos? La región $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{K} = \mathbf{f}(\mathcal{S})$ viene dada por la proyección del plano del triángulo en el plano xy ($z = 0$ en la ecuación del plano), i.e. $2x + 2y = 2 \to x + y = 1$. Con esto podemos escribir explícitamente la integral de superficie:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (4y - 2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 2(1-x)^2 - 2(1-x)\,\mathrm{d}x \leftarrow u = 1 - x \\
&= \int_0^1 2u^2 - 2u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Finalmente, gracias al Teorema de Kelvin−Stokes:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{1}{3}}$$

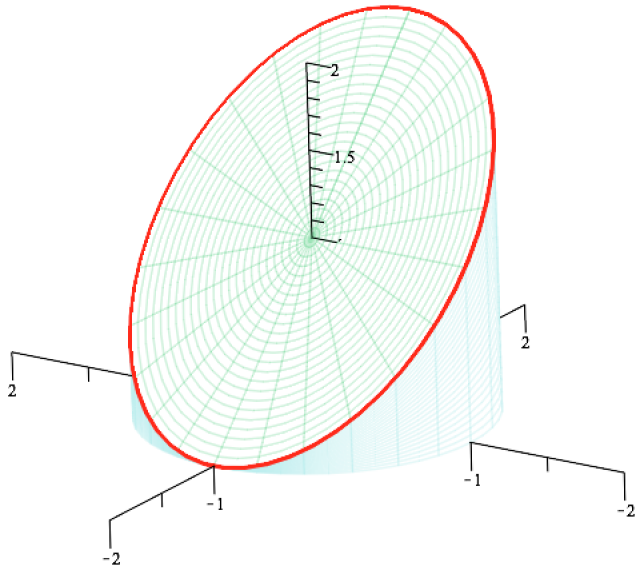
Problema 5.15 Usar el Teorema de Kelvin-Stokes para calcular la integral de línea de un campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, xy^2, z^3)$ a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ obtenida como intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = x + 1$ en $\mathbb{R}^3$, recorrida en sentido contrario al movimiento de los punteros de un reloj.

Solución:

Calculamos el rotor de la curva:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \left(0, 0, y^2 - z^2\right)$$

Consideremos gráficamente el siguiente disco para aplicar el teorema:



Consideremos el disco parametrizado como $\mathbf{f}\,(r,t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t + 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0,1]$. Asimismo, calculamos el rotor:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \left(0, 0, y^2 - x^2\right)$$

Asimismo,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = (-1, 0, 1)$$

Luego, se concluye que:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\, t - \cos^2 t\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos(2t)\mathrm{d}t = 0$$

Concluimos entonces que:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0}$$

Problema 5.16 Sea $\mathcal{S}_+ \subset \mathbb{R}^3$ el cono de ecuación

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad z > 0$$

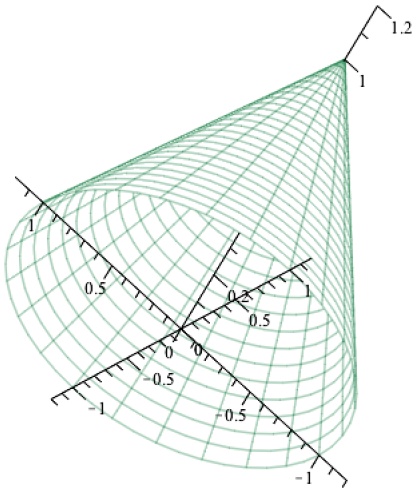
orientado hacia arriba. Sea $\mathbf{F}\,(x, y, z) = (-y, x, 1 + x + y)$.

(a) Calcule el flujo de $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}_+$.

(b) Resuelva la misma pregunta utilizando el Teorema de Stokes.

Solución:

Partamos convenciéndonos que la superficie es un cono. Grafiquémosla:



(a) Por calcular haciendo uso de la definición:

$$\iint_{\mathcal{S}_+} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Partamos por determinar rot $\mathbf{F}$. Se tendrá que:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \vec{\nabla} \times \mathbf{F} = (1, -1, 2)$$

Ahora calculemos $\mathrm{d}\mathbf{S}$, partiendo por tomar una parametrización de la función en cuestión. Recuerde que el cono es muy fácil parametrizarlo en coordenadas cilíndricas. En efecto, hagamos

$x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $z = z$. Con ello, una parametrización posible es:

$$\mathbf{f}\,(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 1-r) \to \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -1 \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\text{sen}\,\theta \\ r \end{pmatrix}$$

El campo rotor es constante para nuestra suerte, y el plano integrador corresponderá a

$$1 - \sqrt{x^2+y^2} = 0 \to x^2 + y^2 = 1$$

Es decir, es una circunferencia de radio 1, con lo cual deducimos que hacemos variar $\theta \in [0, 2\pi]$ para generar todo el manto del cono y $r \in [0,1]$ para cubrir todo el radio en el plano.

Luego,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}_+} (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta + 2r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,(\cos\theta - \text{sen}\,\theta) + 1\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Al integrar coseno y seno entre 0 y 2π se anularán. No hay que ni referirse al segundo término:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}_+} (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi}$$

(b) Tendremos que convertir el problema de área en un problema de contorno. Lo primero que tenemos que hacer es determinar el contorno en cuestión. En este caso, corresponde a un cono, y por lo tanto su frontera está en la circunferencia de la base. Como $z > 0$, entonces el contorno es $x^2 + y^2$, con orientación antihoraria en este caso haciendo uso de la regla de la mano derecha.

Entonces una parametrización de este contorno es:

$$\vec{\lambda}\,(t) = (\cos t, \text{sen}\,t, 0) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

con lo cual

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (-\,\text{sen}\,t, \cos t, 0)\,\mathrm{d}t$$

y $\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = (-\,\text{sen}\,t, \cos t, 1 + \cos t + \text{sen}\,t)$, con lo cual

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \left(\text{sen}^2\,t + \cos^2 t\right)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t$$

Integrando de $[0, 2\pi]$:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

Dado que se cumplen todas las hipótesis del Teorema de Kelvin−Stokes, concluimos que:

$$\iint_{\mathcal{S}_+} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi$$

comprobando así el resultado de la parte anterior.

Problema 5.17 Sea γ la intersección de $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$ recorrida positivamente. Calcule

$$\int_{\gamma} -y^3 \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y - z^3 \mathrm{d}z.$$

Solución:

En analogía al problema anterior, observe que deberíamos intentar obtener una curva con simetría cilíndrica que se encuentra desviada en el plano. No solo es complicado calcular la integral, si no que además intentar siquiera parametrizarla.

Entonces, la única opción que podemos tomar es usar el teorema del rotor. Sea $\mathcal{K}$ la superficie encerrada por la curva de Jordan γ. Debemos calcular el rotor del campo $\mathbf{F} = (-y^3, x^2, -z^3)$. Se tiene que:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \left(0, 0, 3x^2 + 3y^2\right)$$

La superficie que podemos tomar es el círculo contenido en el plano debido a que es muy fácil parametrizarla y calcular la normal. Puede parametrizarse notando la simetría cilíndrica: hagamos en primera instancia $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Reemplazando en la ecuación del plano:

$$r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta + z = 1 \to z = 1 - r\left(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Entonces la parametrización posible es:

$$\mathbf{f}\left(r, \theta\right) = \left(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 1 - r\left(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\right)\right)$$

Si bien no es complicado calcular de aquí el diferencial de superficie vectorial, podemos hacerlo por simple inspección: la normal irá en dirección del plano, el diferencial de superficie es el polar, i.e.

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = (1, 1, 1)\, r\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

¿Ver para creer?

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & -(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & -r(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)\end{vmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cancel{-r\operatorname{sen}\theta\cos\theta}+r\operatorname{sen}^2\theta+r\cos^2\theta\cancel{+r\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\\ \cancel{+r\operatorname{sen}\theta\cos\theta}+r\operatorname{sen}^2\theta+r\cos^2\theta\cancel{-r\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\\ r\cos^2\theta+r\operatorname{sen}^2\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}r\\ r\\ r\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\to \mathrm{d}\mathbf{S} = (1,1,1)\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Luego, $\vec{\nabla}\times\mathbf{F}(\mathcal{K}) = (0,0,3r^2)$, con lo cual

$$\iint_{\mathcal{K}}\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

donde $t\in[0,2\pi]$ para correr la circunferencia completa y $r\in[0,1]$ para considerar toda la superficie y cumplir la condición de estar en el cilindro $x^2+y^2=1$.

Evaluando, se tiene que:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{K}}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{3}{4}\times 2\pi\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\int_\gamma -y^3\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{K}}\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{3\pi}{2}}$$

Problema 5.18 Evalúe

$$\int_\Gamma (y+\operatorname{sen}x)\,\mathrm{d}x+\left(z^2+\cos y\right)\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}z$$

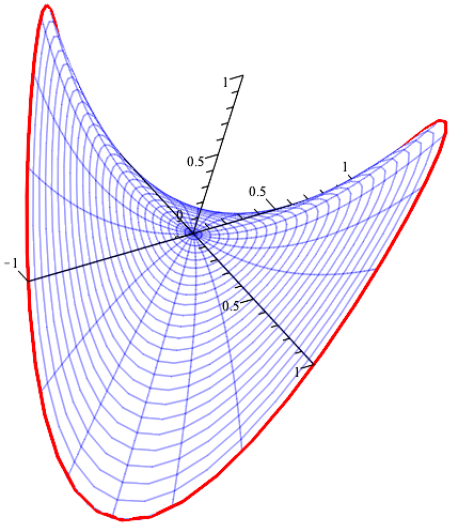
si Γ es la curva parametrizada como $\vec{\lambda}(t) = (\operatorname{sen}t,\cos t,\operatorname{sen}2t)$ con $t\in[0,2\pi]$.

Ayuda: Observe que Γ está contenida en el manto $z=2xy$.

Solución:

La idea es exactamente la misma: se complica el cálculo de la integral por el simple hecho de la expresión del campo. Entonces, utilizamos el teorema del rotor.

Grafiquemos la curva y la superficie de la ayuda para tener una idea de los elementos con los cuales se está trabajando:



Partimos calculando el rotor del campo $\mathbf{F} = (y + \operatorname{sen} x)\,\hat{\mathbf{i}} + (z^2 + \cos y)\,\hat{\mathbf{j}} + x^3\,\hat{\mathbf{k}}$:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = -2z\,\hat{\mathbf{i}} - 3x^2\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

Integramos sobre una superficie para la cual $\vec{\lambda}$ es frontera. En este caso efectivamente nos sirve el manto en cuestión, pues coincide con la forma de la superficie.

Utilizando la regla de la mano derecha, observamos que las normales tienen que apuntar hacia arriba, por lo cual parametrizamos la superficie con esta consideración. Una parametrización de la superficie viene dada por $\mathbf{f}(x, y) = (x, y, 2xy)$, con lo cual

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ -2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como la componente z apunta en el sentido del eje z, estamos siendo coherentes con la orientación de la superficie. Se tendrá que:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -2y \\ -2x \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Entonces, evaluando en la superficie:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathcal{S}) = \left(-4xy, -3x^2, -1\right)$$

Haciendo el producto punto:

$$\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=8xy^2+6x^3-1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

y la integración en el plano de origen $\mathcal{S}$ corresponde a una circunferencia de radio 1. Es decir,

$$\iint_{\mathcal{K}}\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint_{x^2+y^2\leq 1}8xy^2+6x^3-1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dada la simetría de la región de integración hacemos sustitución a coordenadas polares, con lo cual:

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leq 1}8xy^2+6x^3-1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 8r^3\cos\theta\,\operatorname{sen}^2\theta+6r^3\cos^3\theta-1\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= -\pi\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el teorema:

$$\boxed{\int_\Gamma (y+\operatorname{sen}x)\,\mathrm{d}x+\left(z^2+\cos y\right)\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}z=-\pi}$$

Recuerde el lector que ya demostramos que en $\mathbb{R}^3$ la condición necesaria de conservatividad para un campo de clase $\mathcal{C}^1$ se puede compactar como:

$$\vec{\nabla}\times\mathbf{F}=0$$

En analogía a lo que ya hicimos con el Teorema de Green, partamos por notar que para toda superficie simple se tendrá que

$$\iint_{\mathcal{K}}\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=0$$

con lo cual sumando las hipótesis del Teorema de Kelvin−Stokes concluimos que:

$$\oint_{\partial\mathcal{K}^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=0$$

Es decir, $\vec{\nabla}\times\mathbf{F}=0$ es una condición suficiente (pero no siempre útil) para probar conservatividad, si solo si se cumple **para todo punto** del abierto en el cual se busca probar esta condición del campo.

Veamos un problema en que se revisa la aplicación de estas ideas, desde un punto de vista conceptual.

Problema 5.19 Sea $\mathbf{F}=(-6y^2+6y)\,\hat{\mathbf{i}}+(x^2-3z^2)\,\hat{\mathbf{j}}-x^2\,\hat{\mathbf{k}}$. Pruebe que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada simple contenida en el plano $x+2y+z=1$ es igual a cero.

Solución:

Sea Π el plano en cuestión. Dado que poco y nada podemos decir sobre el trabajo o las integrales de línea en el plano, revisemos qué es lo que ocurre al tomar áreas en el plano. Para ello, debemos usar el teorema del rotor.

En primer lugar, tenemos que la función $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y su rotor viene dado por:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = (6z, 2x, 2x + 12y - 6)$$

Para calcular la integral de superficie del rotor, debemos parametrizar la superficie. Sin embargo, dado que la superficie es un plano, esto podemos hacer con relativa facilidad. En efecto, si parametrizamos el plano como $\mathbf{f}(x, y) = (x, y, 1 - x - 2y)$ entonces es fácil notar que:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \pm (1, 2, 1)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

donde se toma en cuenta el $\pm$ ya que para aplicar el teorema del rotor la orientación de la superficie dependerá del sentido en que se recorre la curva de acuerdo a la mano derecha.

Evaluando el rotor en el la superficie, basta reemplazar en él $z = 1 - x - 2y$

Observe entonces que:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= [6(1 - x - 2y) + 4x + 2x + 12y - 6]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 6(x + 2y + 1 - x - 2y - 1)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 0\end{aligned}$$

Es evidente entonces que:

$$\iint\limits_{\mathcal{K} \subset \Pi} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

Utilizando el teorema del rotor:

$$\to \oint_{\partial K^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

Dado que $\mathcal{K} \subset \Pi \to \partial\mathcal{K}^+ \subset \Pi$, con lo cual concluimos lo que se quería demostrar. Es decir, en efecto el trabajo para toda curva es cero. ■

En los siguientes problemas revisaremos otra aplicación más del teorema del rotor. Dada una superficie $\mathcal{K}$ que cumple todas las hipótesis del teorema, entonces:

$$\iint\limits_{\mathcal{K}} \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial\mathcal{K}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Note lo siguiente: sabemos que esta curva propuesta no es frontera de una única superficie, si no que de infinitas. En particular, será frontera de otra superficie $\mathcal{K}^*$ simple, de modo que también se cumplirá que:

$$\oint_{\partial\mathcal{K}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint\limits_{\mathcal{K}^*} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

* No confunda en la expresión de la integral de línea el signo +, que significa positivamente orientada. En este caso, es positivamente orientada **respecto a la superficie involucrada**, lo cual **no** implica necesariamente un sentido horario/antihorario.

En otras palabras, por transitividad de la igualdad:

$$\iint_{\mathcal{K}^*} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{K}^+} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Es decir, podemos calcular el flujo de la superficie en otra superficie mucho más simple de calcular, lo cual puede resultar muy práctico en los problemas como los siguientes.

Problema 5.20 Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F} = e^{xy}\cos z\,\hat{\mathbf{i}} - x^2 z\,\hat{\mathbf{j}} + xy\,\hat{\mathbf{k}}$ y sea $\mathcal{S}$ la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$ orientada en la dirección del eje x positivo (la normal apuntando hacia afuera de la esfera). Calcule:

$$\int_{\partial \mathcal{S}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

Solución:

La parametrización de la curva no es del todo complicada, pues la frontera corresponde a una circunferencia. Sin embargo, el campo tiene una expresión que puede resultar complicada de trabajar. Por lo tanto, utilizaremos el Teorema de Kelvin−Stokes para mirar el problema en la superficie completa.

Es muy tentador pensar que la superficie a considerar puede ser la superficie $\mathcal{S}$ que se está mencionando. Sin embargo, al parametrizar la integral de superficie también puede aparecer una integral doble compleja. Basta observar la expresión del rotor para notarlo:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \left(x^2 + x, -e^{xy}\operatorname{sen} z + y, y\right)$$

¿Qué hacemos entonces? Tomemos una superficie cuya frontera sea la curva y que nos convenga. ¿Cuál puede ser? ¡Una superficie plana! En este caso esta se obtiene al hacer $x = 0$ en la ecuación de la esfera, obteniendo así la superficie

$$\mathcal{S}^* : y^2 + z^2 = 1 \quad \text{con } x = 0$$

donde siguiendo la regla de la mano derecha, observamos que la normal tiene que apuntar en la dirección y sentido de $\hat{\mathbf{k}}$. Parametrizando la superficie con coordenadas polares, tenemos por ejemplo que:

$$\mathbf{f}(r, \theta) = (0, r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Ahora calcularemos la integral de superficie del rotor. Obtenemos el diferencial de superficie vectorial como:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Calculando el producto cruz:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\hat{\mathbf{i}}$$

con lo cual

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{i}}\, r\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

un resultado más que esperable pensando en la simetría cilíndrica del problema. Adicionalmente, evaluando en esta superficie obtenemos que:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = (0, -\operatorname{sen}(r\operatorname{sen}\theta) + r\cos\theta, r\cos\theta)$$

Observamos aquí que:

$$\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

con lo cual la integral de superficie arrojará cero como resultado. Concluimos entonces que:

$$\boxed{\int_{\partial \mathcal{S}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}^*} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0}$$

Problema 5.21 Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (x + z, y^2, z)$ sobre el arco de hélice parametrizado por $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\operatorname{sen}(t)$, $z(t) = at$ y que une los puntos $\mathbf{a} = (r, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (r, 0, 2\pi a)$.

Solución:

Recordemos nuestras opciones:

- Por conservatividad de campos.
- Por Teorema de Green / Stokes según la dimensión.
- Por definición.

Basta notar que el campo no es conservativo pues,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \to \frac{\partial P}{\partial z} \neq \frac{\partial R}{\partial x}$$

Tampoco resulta sencillo hacerlo por teorema del rotor pues no es fácil encontrar una superficie que cumpla lo pedido. Entonces, nos queda como opción hacerlo por definición:

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t, a) \quad t \in [0, 2\pi]$$

lo cual se deduce del punto final, pues $2\pi a = at$. Evaluando la curva en el campo,

$$\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = \left(r\cos(t) + at, r^2\,\mathrm{sen}^2(t), at\right)$$

Entonces,

$$W = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} -r^2\cos t\ \mathrm{sen}\,t - art\,\mathrm{sen}\,t + r^3\cos t\ \mathrm{sen}^2(t) + a^2 t\,\mathrm{d}t$$

El primer término se anula al integrar pues por linealidad integraríamos $\mathrm{sen}\,(2t)$ en un período. Para el segundo término hacemos integración por partes. Para el tercero, notamos que $\cos t\ \mathrm{sen}^2 t = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2t\ \mathrm{sen}\,t$ función que se anulará al integrarla en $[0, 2\pi]$ pues los senos de distinta frecuencia son ortogonales. El cuarto término se hace por integración polinomial directa. De esta forma,

$$\begin{aligned} W &= -ar\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t + 2\pi^2a^2 = -ar\left(-t\cos(t)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos(t)\,\mathrm{d}t\right) + 2\pi^2a^2 \\ &= 2\pi^2a^2 + 2\pi ar \end{aligned}$$

Entonces concluimos que:

$$\boxed{W = 2\pi^2a^2 + 2\pi ar}$$

Hasta ahora solo hemos usado el teorema del rotor para calcular integrales de superficie. Sin embargo, también puede ser usado para calcular integrales de superficie, o incluso para hacer trucos como el que veremos a continuación.

Problema 5.22 Sea $\mathcal{K}$ la superficie dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z \leq 0$. Considere el campo vectorial:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\hat{\mathbf{i}} + \left(e^y\cos^2 y + x\right)\hat{\mathbf{j}} + \left[z\log(z + 2) + xy\cos x^2 + e^y\,\mathrm{sen}\,x\right]\hat{\mathbf{k}}.$$

Calcule

$$\iint_{\mathcal{K}^+}\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Solución:

¿Es fácil calcular el rotor de $\mathbf{F}$? Sí, pero puede ser una labor tediosa en demasía. Más aún, después si quiera intentar calcular la integral de superficie puede convertirse en un proceso terrible. ¿Qué

podemos hacer entonces? Convertir el problema de área en uno de contorno a través del teorema del rotor.

El campo es de clase $\mathcal{C}^1$, definido en todo punto y la superficie es simple y orientable. La frontera de la superficie viene dada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con $z = 0$. Sin embargo, note que en este caso, siendo coherentes con la regla de la mano derecha, tendremos que en este caso la curva está recorrida en sentido horario (negativo) en el plano xy.

Sin embargo, aparece otra dificultad: si parametrizamos la curva de la forma ya conocida, al evaluarla en el campo la expresión no se simplifica para nada. Por lo tanto, la solución propuesta no es necesariamente del todo útil. ¿Qué hacemos entonces? Escoger otro $\mathcal{K}^*$ cuya frontera coincida con la de $\mathcal{K}$ y cuya integral de superficie del campo rotor sea fácil de calcular.

¿Qué $\mathcal{K}^*$ podemos escoger? Uno que nos convenga. En este caso, hacer plana la superficie puede servir bastante, por lo que podemos describir $\mathcal{K}^*$ como:

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad , \quad z = 0$$

En este caso la normal tiene que apuntar hacia abajo para ser coherentes con la regla de la mano derecha, por lo cual un diferencial de superficie inmediato es:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{k}}\, r\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

donde se tomo $\hat{\mathbf{k}}$ unitario pues el plano en cuestión será $z = 0$ con normal $(0, 0, 1)$. Tendremos que calcular el rotor de $\mathbf{F}$ irremediablemente, pero seamos astutos: $\mathrm{d}\mathbf{S}$ solo es no nula en la dirección z, razón por la cual al hacer el producto punto con $\vec{\nabla} \times \mathbf{F}$ ¡solo *sobrevivirá* la tercera componente de esta! No nos molestamos en siquiera intentar calcular las otras componentes. En efecto,

$$\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right)_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0$$

con lo cual $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$ en este caso. Es decir, sin realizar ningún cálculo:

$$\iint_{\mathcal{K}^*} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \rightarrow \boxed{\iint_{\mathcal{K}^+} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0}$$

Nota: Evidentemente aquí el problema fue bastante amigable en el sentido de que la expresión del campo en la integral de superficie era directamente el rotor. Esto puede no ser necesariamente así, por lo cual si desea usar este tipo de truco dada una integral sobre $\mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ sería buscar $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{G} = \vec{\nabla} \times \mathbf{F}$ ($\mathbf{F}$ en dicho caso se dice *potencial vectorial* y este tipo de potenciales son ampliamente utilizados en electromagnetismo, en particular en los desarrollos teóricos de las antenas). Es obvio que esto puede no resultar ser del todo sencillo, por lo que se aconseja discreción al emplear esta técnica.

Problema 5.23 Considere el plano $\Pi : x+y+z=1$ con normal en la dirección y sentido del vector $(1,1,1)$. Determine $\mathbf{F}$ de modo que para toda curva cerrada simple $\vec{\gamma} \subset \Pi$ se tenga que

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = A\left(\mathcal{D}\right)$$

siendo $\mathcal{D}$ la región encerrada por γ y $A\left(\mathcal{D}\right)$ su área.

Solución:

Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. Por determinar P, Q y R para cumplir lo que se pide en el problema. Dado que la trabajamos con curvas de Jordan, bajo el supuesto de que podemos asumir que $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, podemos convertir el problema de contorno en uno de área utilizando el Teorema de Kelvin−Stokes. Si $\mathcal{K}$ es la superficie correctamente orientada cuya frontera es γ, entonces:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{K}} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

con $\mathrm{d}\mathbf{S} = (1,1,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pues es una parametrización ya conocida para el problema. Digamos, $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = (A, B, C)$. Entonces,

$$\iint_{\mathcal{K}} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} (A + B + C)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Buscamos que esta integral doble anterior sea exactamente igual al área de la superficie, para la cual recordamos que $\mathrm{d}S = \|\mathrm{d}\mathbf{S}\| = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Es decir, A, B y C deben ser tales que $A+B+C = \sqrt{3}$, pues así

$$\iint_{\mathcal{K}} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sqrt{3} \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

que es justamente el área de la superficie en cuestión. Evidentemente las soluciones serán infinitas.

Podemos hacer dos de las componentes arbitrariamente cero y dejar una igual a 1. A modo de ejemplo, hagamos $A = \sqrt{3}$ y $B = C = 0$. Entonces, deberá cumplirse que:

$$A = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \sqrt{3}$$

Nuevamente, podemos aprovecharnos de la arbitrariedad del problema y decir que:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \sqrt{31} \to R\left(y\right) = \sqrt{3}\,y$$

Es decir, $\boxed{\mathbf{F} = \sqrt{3}\,(0,0,y)}$ es un campo que cumple con facilidad las condiciones pedidas. Sin embargo, basta agregar una constante al resultado anterior o jugar con cualquiera de las combinaciones para generar un resultado correcto.

Es habitual mezclar los problemas de rotor y divergencia, meramente diferenciales, con los teoremas integrales −rotor y divergencia -. Revisemos algunos ejemplos básicos de ellos, donde recurriremos a algunas de las identidades ya demostradas.

Problema 5.24 Sea Γ una curva de Jordan suave a tramos y f y g funciones de clase $\mathcal{C}^2$ definidas en todo punto. Demuestre que:

(a) $\displaystyle\oint_\Gamma f\vec{\nabla}f\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}=0.$

(b) $\displaystyle\oint_\Gamma \left(f\vec{\nabla}g+g\vec{\nabla}f\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}=0.$

Solución:

(a) Dado que la curva cumple todas las hipótesis del Teorema de Kelvin−Stokes, podemos aplicarlo para ver qué ocurre con el rotor de la función. En efecto, si $\mathcal{K}$ es la superficie cuya frontera corresponde a la curva Γ, entonces:

$$\oint_\Gamma f\vec{\nabla}f\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}=\iint_{\mathcal{K}}\left(\vec{\nabla}\times f\vec{\nabla}f\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Demostramos en un problema anterior que:

$$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{\nabla}g\right)=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g$$

Si $g=f$, entonces:

$$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{\nabla}f\right)=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}f=0$$

pues ambos vectores son iguales y por lo tanto paralelos. Concluimos entonces que

$$\iint_{\mathcal{K}}\left(\vec{\nabla}\times f\vec{\nabla}f\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

y así

$$\oint_\Gamma f\vec{\nabla}f\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}=0 \quad \blacksquare$$

(b) Análogamente, partimos notando que $f\vec{\nabla}g+g\vec{\nabla}f=\vec{\nabla}\left(fg\right)$ por regla del producto (extensión al operador nabla). Luego, el campo en cuestión es evidentemente conservativo. Es decir,

$$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{\nabla}g+g\vec{\nabla}f\right)=0$$

con lo cual se demuestra por todo lo ya visto que el trabajo sobre cualquier curva cerrada es cero. $\blacksquare$

5.3.1. Aplicaciones avanzadas

Revisemos ahora algunos tipos de problemas de mayor dificultad en los cuales puede ser aplicado el Teorema de Kelvin-Stokes.

Problema 5.25 Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $g(x,y,z) = \dfrac{\arctan\left(1+z^2\right)}{1+x^2+y^2}$, calcule:

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

donde $\mathcal{S}$ es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ con la normal apuntando hacia el origen.

Solución:

Si bien es posible calcular $\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$ y luego calcular la integral de superficie por definición, también podemos aprovecharnos de las propiedades de los rotores. Ya demostramos que:

$$\vec{\nabla} \times (f\mathbf{F}) = \vec{\nabla} f \times \mathbf{F} + f\vec{\nabla} \times \mathbf{F}$$

Luego, si hacemos $\vec{\nabla} g$ obtenemos una interesante propiedad para los propósitos de nuestro problema:

$$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{\nabla} g\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g = f + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} g$$

pero por inspección imediatamente $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} g\right) = 0$ pues el campo $\mathbf{G} = \vec{\nabla} g$ es conservativo por engendrarse a través de una función de potencial, con lo cual debe cumplir la condición necesaria de $\vec{\nabla} \times \mathbf{G} = 0$. En otras palabras, la integral a calcular corresponde a:

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \left(f\vec{\nabla} g\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Pero esta última integral es la integral de un campo rotor, por lo cual podemos aplicar el Teorema de Stokes: (es fácil notar que las hipótesis se cumplen:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \left(f\vec{\nabla} g\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}^+} f\vec{\nabla} g \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

donde $\partial\mathcal{S}^+$ corresponde en este caso a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ por simple inspección. Sin embargo, como las normales de la superficie apuntaban hacia el origen, la regla de la mano derecha nos dice que la circunferencia debe ser recorrida con orientación **negativa**.

Luego, una parametrización posible es:

$$\vec{\lambda}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0) \to \mathrm{d}\vec{\ell} = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Esta parametrización surge de tomar la ya conocida para la orientación positiva y reemplazar con $-t$ para cambiar el sentido de recorrido. Asimismo, calcular $\vec{\nabla} g$ es puramente un ejercicio algebraico si dominamos las técnicas de derivación parcial:

$$f\vec{\nabla} g = \left(x^2 + y^2\right)\left(-\frac{2x \arctan\left(1 + z^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}, -\frac{2y \arctan\left(1 + z^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}, \frac{2z}{\left(1 + z^2\right)\left(1 + x^2 + y^2\right)}\right)$$

Observe que reemplazando con la parametrización la expresión del campo se simplifica de forma notable:

$$f\vec{\nabla} g = \left(-\frac{2\cos t}{4}\frac{\pi}{4}, \frac{2\operatorname{sen} t}{4}\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{\pi}{8}(-\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$$

con lo cual

$$\oint_{\partial \mathcal{S}^+} f\vec{\nabla} g \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\pi}{8}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, \cos t - \operatorname{sen} t\, \cos t\, \mathrm{d}t = 0$$

Por lo tanto, por transitividad de todas las igualdades:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0}$$

Problema 5.26 Calcule $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ si $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z\right)$ y Γ es:

(a) La intersección entre el cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

(b) La intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

(c) Una curva arbitaria tal que la superficie de la cual es frontera intersecta al eje z.

Solución:

Observe que si $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, entonces la componente R deberá ser derivada solamente con respecto a x e y y en ambos casos se anulará. Asimismo, en estas componentes en que aparece z, la componente en x y la componente en y del rotor, las componentes P y Q deberán ser derivadas con respecto a z, donde también se anularán. Por lo tanto, tenemos garantizado que la primera y la tercera componente del rotor serán nulas.

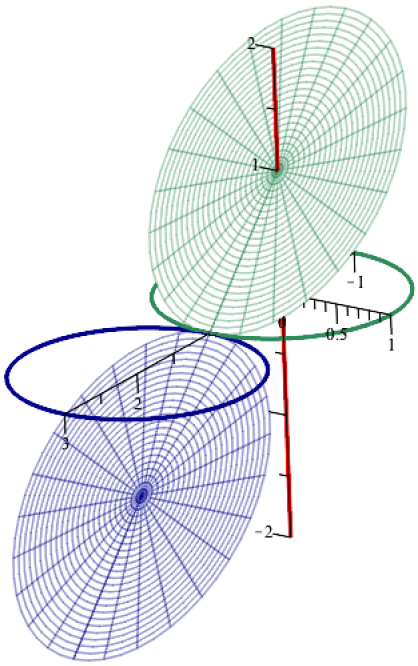
Ahora bien, la tercera componente, $Q_x - P_y$, ya la hemos derivado antes en el Teorema de Green,

donde $Q_x - P_y = 0$ **excepto** en $(x, y) = (0, 0)$. Entonces, concluimos que:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0 \quad \text{para todo } (x, y) \neq 0$$

En este caso, todos los puntos $(x, y) \neq 0$ son una recta con libertad en z, por lo tanto el rotor se anula en todo punto que no sea el eje z. Observe que ambas superficies son circunferencias proyectadas sobre el plano $x + z = 1$, por lo cual imaginarse la situación no es complejo.

Graficando simultáneamente el eje z en rojo, la superficie del problema (a) en azul y la superficie del problema (b) en verde obtenemos así:



(a) Observe que la superficie en azul no encierra en ningún punto al eje z, por lo cual en todo punto $\vec{\nabla} \times \mathbf{F}$ está definido y es cero. Luego, es posible aplicar el teorema del rotor, con lo cual:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0}$$

(b) Ahora no podemos hacer uso del teorema del rotor pues claramente la circunferencia proyectada sí encierra al eje z. Por esta razón es que tendremos que calcular la superficie por definición.

Partimos por parametrizar la curva. Observe que la superficie debe cumplir con la simetría del cilindro, por lo que es razonable hacer $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$, para luego despejar z a partir de la ecuación del plano: $z = 1 - \cos\theta$. De esta forma,

$$\vec{\lambda}\,(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1 - \cos\theta) \rightarrow \mathrm{d}\vec{\ell} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Asimismo, $\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 1-\cos\theta) \to \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

$$\to \oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta + \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta} - \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}$$

por lo que

$$\boxed{\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi}.$$

(c) Para resolver esta pregunta notemos lo siguiente:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)}_{\mathbf{F}_1} + \underbrace{(0,0,z)}_{\mathbf{F}_2}$$

Observe que el primer campo es conservativo para todo punto salvo en el eje z. En cambio, el otro campo es conservativo para **todo** punto en el espacio. Basta notar que la función de potencial es $f(x,y,z) = z^2/2 + c$. Multiplicando por $\mathrm{d}\vec{\ell}$ e integrando en una curva cerrada cualquiera:

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_\Gamma \mathbf{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \cancelto{0}{\oint_\Gamma \mathbf{F}_2\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}$$

Observe que es irrelevante la forma que para la primera integral de línea es irrelevante la forma que tenga esta en z, pues la tercera componente de $\mathbf{F}_1$ es nula y se anulará en el producto punto. En esta segunda integral es factible aplicar el teorema del rotor, pero como vimos en la pregunta anterior, siempre y cuando Γ no encierre al eje z.

- Si Γ no encierra al eje z es inmediato por el teorema del rotor que $\oint_\Gamma \mathbf{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$.
- Si Γ encierra al eje z, entonces podemos hacer un procedimiento similar al Teorema de Green: consideremos la circunferencia Γ^* que corresponde a una circunferencia de radio $\epsilon \to 0$ contenida en el plano xy y centrada en el origen.

  Luego, si consideramos $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^*$, la superficie $\tilde{\mathcal{S}}$ tal que $\partial\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\Gamma}$ no encerrará al eje z, por lo cual se cumple el teorema del rotor y con ello

  $$\oint_{\tilde{\Gamma}^+} \mathbf{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\tilde{\mathcal{S}}} \left(\vec{\nabla}\times \mathbf{F}_1\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

  Pero $\oint_{\tilde{\Gamma}} \mathbf{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_\Gamma \mathbf{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \oint_{\Gamma^*} \mathbf{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$, donde basta calcular la integral de Γ^*.

  Para ello, recordemos que, en analogía al Teorema de Green, esta circunferencia de radio ϵ deberá ser recorrida en sentido antihorario. Hagamos entonces

  $$\vec{\lambda}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0) \to \mathrm{d}\vec{\ell} = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)\,\mathrm{d}t \quad \text{con } t\in[0,2\pi].$$

y $\mathbf{F}_1\left(\vec{\lambda}\right) = (\operatorname{sen} t, \cos t) \to \mathbf{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t \, \mathrm{d}t$ con lo cual

$$\oint_{\Gamma^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = -2\pi$$

Entonces en la igualdad de integrales de línea:

$$0 = \oint_{\Gamma} \mathbf{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - 2\pi \to \boxed{\oint_{\Gamma} \mathbf{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi}$$

En resumen,

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma \text{ no encierra al eje } z, \\ 2\pi & \text{si } \Gamma \text{ encierra al eje } z. \end{cases}}$$

Este resultado es ampliamente utilizado en magnetostática para el estudio de campos magnéticos.

Propuesto Sea $\mathbf{F} = y\,\hat{\mathbf{i}} + 2z\,\hat{\mathbf{j}}$. Determine condiciones sobre a, b, c y d de modo que para cada curva contenida en el plano $ax + by + cz = d$ se cumple que:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0.$$

5.4. El Teorema de la Divergencia

El Teorema de la Divergencia es el primer resultado importante del cálculo vectorial. Partiremos desarrollando su comprensión en $\mathbb{R}^2$ para posteriormente extender estos resultados a $\mathbb{R}^3$, donde el teorema alcanza su máxima utilidad y significado físico.

5.4.1. El Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^2$

Partimos el apartado haciéndonos una pregunta: ¿es posible definir las integrales de superficie en $\mathbb{R}^2$? Para ello, basta imaginarnos que toda la situación de las integrales de superficie solo ocurre en el plano xy y que en vez de trabajar con superficies propiamente tales, deberemos hacerlo con curvas. Hagamos:

$$\mathbf{F} = (P, Q, 0)$$

Y consideremos que la curva que estamos definiendo la extendemos a todo z dejándola como variable libre. Entonces, una curva $\vec{\lambda}$ en $\mathbb{R}^2$ está "contenida" en la supeficie de parametrización $\mathbf{f}(t) =$

$(\lambda_1(t), \lambda_2(t), z)$. Calculando el vector normal:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \mathrm{d}t\mathrm{d}z = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \lambda_1'(t) & \lambda_2'(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathrm{d}t\mathrm{d}z \\ &= (\lambda_2'(t), -\lambda_1'(t), 0)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = (P\lambda_2'(t), -Q\lambda_1'(t), 0)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}z$$

Dado que solo nos interesa lo que ocurre en los planos paralelos a z, nos olvidaremos de integrar en z, ignorando por completo este diferencial, pues con este desarrollo solo nos preocupamos de obtener el comportamiento en el plano xy.

Recuerde además el lector que $\lambda_2'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$ de acuerdo a nuestra notación simbólica y $-\lambda_1'(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ con lo cual

$$\mathrm{d}\Phi = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x$$

Esto es más que suficiente para realizar la siguiente definición:

Definición: Sea Γ una curva simple y suave a tramos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo en $\mathbb{R}^2$ definido en todo punto por el cual pasa la curva Γ.

Se define el *flujo* de $\mathbf{F}$ a través de Γ como la integral de línea:

$$\Phi = \int_\Gamma P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{5.21}$$

donde $\mathrm{d}\mathbf{S} = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x)$.

Consideremos ahora una curva de Jordan (simple y cerrada) suave Γ. Reordenando el flujo:

$$\Phi = \oint_\Gamma -Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y$$

Si sumamos el hecho de que $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y está definido en un abierto simplemente conexo que contiene a Γ, entonces se cumplen todas las hipótesis del Teorema de Green y por lo tanto aplicándolo correctamente[3]:

$$\oint_\Gamma -Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}A$$

lo que no es más que un corolario directo del Teorema de Green que se conoce como Teorema de la Divergencia, en su versión más simple en $\mathbb{R}^2$. El significado físico de este resultado lo analizaremos en más detalle cuando extendamos este resultado a $\mathbb{R}^3$. Por ahora lo trabajaremos como un mero corolario y no dejemos de notar que este teorema está también convirtiendo un fenómeno de contorno en uno de área.

[3]No confunda las letras con las del teorema: siempre es la derivada de la segunda componente de $\mathbf{F}$ respecto a la primera variable menos la primera componente respecto a la segunda variable.

Teorema: Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ definida en el abierto simplemente conexo U de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{R}$ una región compacta. Entonces,

$$\oint_{\partial\mathcal{R}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}A. \tag{5.22}$$

considerando $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$. $\partial\mathcal{R}^+$ señala que las normales apuntan hacia afuera.

Los siguientes problemas son básicos y meramente introductorios, pues concentraremos posteriormente nuestros esfuerzos principalmente en estudiar la versión en $\mathbb{R}^3$.

Problema 5.28 Verifique el Teorema de la Divergencia en el plano en los siguientes casos:

(a) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x)$.

(b) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, x y^2)$.

(c) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$ y $\mathbf{F}(x, y) = (x, \varphi(y))$ con $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$.

Solución:

En todos estos problemas tenemos que demostrar que el flujo en una superficie en $\mathbb{R}^2$ es igual a la integral doble de su divergencia. En otras palabras, tenemos que calcular ambos lados de la siguiente igualdad y demostrar que son iguales:

$$\oint_{\partial\mathcal{R}^+} P \, \mathrm{d}y - Q \, \mathrm{d}x = \iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}A$$

(a) Notamos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 0$$

con lo cual

$$\iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}A = 0$$

Para la integral de flujo, primero parametrizamos la curva con orientación positiva, de modo que:

$$x(t) = \cos(t) \to \mathrm{d}x = -\operatorname{sen}(t) \, \mathrm{d}t$$

$$y(t) = \operatorname{sen}(t) \to \mathrm{d}y = \cos(t) \, \mathrm{d}t$$

con $t \in [0, 2\pi]$, con lo cual

$$\oint_{\partial \mathcal{R}^+} P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t)\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Ambas funciones integran cero en un período, por lo cual

$$\oint_{\partial \mathcal{R}^+} P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = 0$$

demostrando así lo pedido. ■

(b) Análogamente, calculamos la divergencia:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 4xy$$

Integrando sobre toda la circunferencia:

$$\iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}A = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 4xy\,\mathrm{d}A$$

Observe que $4xy$ es simétrica en torno al origen, con lo cual al integrarla sobre una figura simétrica en los 4 cuadrantes nos dará cero como resultado, i.e.

$$\iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 0$$

En este caso la parametrización es la misma, solo cambia el campo. Tenemos que:

$$\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = \left(\cos^2 t\,\operatorname{sen} t, \cos t\,\operatorname{sen}^2 t\right)$$

Entonces,

$$P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = \left(\cos^3 t\,\operatorname{sen} t + \cos t\,\operatorname{sen}^3 t\right)\mathrm{d}t$$

Integrando de 0 a 2π:

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left(\cos^3 t\,\operatorname{sen} t + \cos t\,\operatorname{sen}^3 t\right)\mathrm{d}t = 0$$

comprobando así la validez del teorema. ■

(c) En esta pregunta aumenta significativamente la complejidad. Notemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 1 + \varphi'(y)$$

donde ahora la región es la porción de circunferencia de radio 1 en el primer y cuarto cuadrante. Dado que no conocemos ninguna simetría sobre $\varphi'(y)$, no es prudente realizar la sustitución

polar debido a que tendríamos que hacer $y = r\,\text{sen}\,(t)$ y eso solo complica la situación en vez de solucionarla. Integrando en cartesianas hacemos $y \in [-1, 1]$ y x moviéndose de 0 a $\sqrt{1-y^2}$:

$$\iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}A = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} 1 + \varphi'(y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2} + \varphi'(y)\sqrt{1-y^2}\, \mathrm{d}y$$

La integración del primer término es el área de media circunferencia de radio 1, con lo cual

$$\iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}A = \frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{1} \varphi'(y)\sqrt{1-y^2}\, \mathrm{d}y \to (1)$$

y nada más podemos hacer por ahora pues nada más sabemos sobre φ.

Calculemos ahora la integral de línea. Observe que el contorno orientado positivamente se dividirá en dos curvas: la semi circunferencia y la recta que va desde 1 a -1.

Partiendo por la recta, esta se parametriza como:

$$\vec{\lambda}_r(t) = (0, 1-t) \to \mathrm{d}x = 0 \text{ y } \mathrm{d}y = -\mathrm{d}t$$

con $t \in [0, 2]$. Entonces,

$$\int_{\vec{\lambda}_r} P\, \mathrm{d}y - Q\, \mathrm{d}x = -\int_0^2 0\, \mathrm{d}t = 0$$

Para integrar la circunferencia, nuevamente caemos en el problema de $\varphi(y)$: no es prudente integrar en polares pues nada sabemos sobre las simetrías de φ. Parametrizando en cartesianas:

$$\vec{\lambda}_c(t) = \left(\sqrt{1-t^2}, t\right) \quad \text{con } t \in [-1, 1]$$

Luego, $\mathrm{d}x = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ y $\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$. Es decir,

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\lambda}_c} P\, \mathrm{d}y - Q\, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{\varphi(t)\, t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{1} \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t \to (2) \end{aligned}$$

Tenemos que demostrar que $(1) = (2)$ para verificar el teorema. Es decir,

$$\frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{1} \varphi'(y)\sqrt{1-y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{1} \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$$

pero esto sí es posible realizarlo con lo que sabemos. Tomando el lado izquierdo y haciendo:

$$\begin{cases} u = \sqrt{1-y^2} & \to \mathrm{d}u = -\dfrac{y\, \mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} \\ \mathrm{d}v = \varphi'(y)\, \mathrm{d}y & \to v = \varphi(y) \end{cases}$$

entonces:

$$\int_{-1}^{1} \varphi'(y)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \varphi(y)\sqrt{1-y^2}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{y\varphi(y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$$

donde se cancela el término pues $\sqrt{1-y^2}$ se anulará indistintamente de el valor de $\varphi(y)$. Así hemos demostrado que:

$$\int_{-1}^{1} \varphi'(y)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

y por lo tanto se verifica que:

$$\oint_{\partial\mathcal{R}^+} P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = \iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}A \quad \blacksquare$$

Problema 5.29 Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, simple y suave que encierra una región de área 3. Calcule

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

donde $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}\ell$ siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario normal exterior a $\mathcal{C}$ y $\mathbf{x} = (x, y, z)$ la posición de $\mathrm{d}\mathbf{S}$ con respecto al origen.

Solución:

Observe que el campo está definido en todo punto y adicionalmente la curva es cerrada, por lo cual se cumplen todas las hipótesis del Teorema de la Divergencia. En este caso $P = x$ y $Q = y$, con lo cual $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{x} = 2$ por simple inspección. Luego,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 2\iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}A$$

Como el área es 6, concluimos finalmente que

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 6}.$$

Problema 5.30 Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, simple y suave y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ un punto fijo tal que $\mathbf{p} \notin \Gamma$. Se define el campo

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2}$$

Calcule la integral

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

donde $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}\ell$ siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario normal exterior a $\mathcal{C}$.

Solución:

Lamentablemente aquí tendremos que distinguir dos casos: uno en que la curva cerrada contiene a $\mathbf{p}$ y otro en que no la contiene. ¿A qué se debe esto? Notemos que aplicando la definición del campo con $\mathbf{x} = (x, y)$ y $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$:

$$\mathbf{F} = \frac{x - p_1}{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y - p_2}{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2}\hat{\mathbf{j}}$$

Sea $\mathcal{R}$ la región que encierra a Γ. Calculemos $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x - p_1}{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y - p_2}{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2} \\
&= \frac{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 - 2(x-p_1)^2}{\left[(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2\right]^2} + \frac{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 - 2(y-p_2)^2}{\left[(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2\right]^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

lo cual es cierto para todo punto **salvo** $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$.

Caso 1: $\mathbf{p} \notin \mathcal{R}$. En este caso, se cumplen todas las hipótesis del Teorema de la Divergencia, con lo cual

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}A = 0$$

Caso 2: $\mathbf{p} \in \mathcal{R}$. No se cumple el caso de que $\mathbf{F}$ esté definida en todo punto, pues no lo está en $\mathbf{p}$. De acuerdo a lo que ya hemos visto en los problemas anteriores, podemos cerrar la superficie con una circunferencia de radio $\epsilon \to 0$ y centrada en $\mathbf{p}$ para eliminar el punto que impide aplicar las hipótesis. Las normales de esta circunferencia tienen que apuntar hacia adentro de ella.

Sea $\mathcal{R}^*$ la región $\mathcal{R}$ con el círculo descartado. En ella, se cumplirá que:

$$\iint_{\mathcal{R}^*} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}A = 0 \to \oint_{\partial\mathcal{R}^{*+}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

donde $\oint_{\partial\mathcal{R}^{*+}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \oint_{\circ^-} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ donde $\circ^-$ es la circunferencia de radio ϵ con sus normales hacia adentro de él. Pero,

$$\oint_{\circ^-} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\oint_{\circ^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

la cual resulta más cómoda de calcular. Para calcularla, parametricemos la circunferencia que gira en torno a $\mathbf{p}$:

$$\vec{\lambda}(t) = (\epsilon\cos t + p_1, \epsilon \operatorname{sen} t + p_2) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Entonces $dy = \epsilon\cos t\, dt$ y $dx = -\epsilon \operatorname{sen} t\, dt$ y

$$\mathbf{F}\left(\vec{\lambda}\right) = \mathbf{F} = \frac{\epsilon\cos t}{\epsilon^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\epsilon \operatorname{sen} t}{\epsilon^2}\hat{\mathbf{j}}$$

con lo cual

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = P\, dy - Q\, dx = \left(\frac{\epsilon^2\cos^2 t}{\epsilon^2} + \frac{\epsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}{\epsilon^2}\right) dt = dt.$$

Nuevamente se elimina la dependencia de ϵ, con lo cual integrar es muy sencillo:

$$\oint_{\circ^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Es decir, en este caso,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\oint_{\circ^-} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\pi$$

Concluimos entonces que:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{p} \notin \mathcal{R} \\ \\ 2\pi & \text{si } \mathbf{p} \in \mathcal{R} \end{cases}}$$

5.4.2. El Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^3$

El concepto de divergencia está naturalmente relacionado con la interpretación del campo como un campo de velocidades en una corriente en un fluido. Extenderemos a $\mathbb{R}^3$ el concepto de divergencia y realizaremos una interpretación en detalle de este concepto.

Partiremos por realizar el análisis en $\mathbb{R}^2$ para establecer naturalmente el concepto y luego poder extenderlo a $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3$.

Desarrollo físico de la divergencia *(solo para interesados)*

La motivación es estimar cuánto es el fluido neto que escapa (*diverge*) por una pequeña porción de U. Por esta razón, definimos la divergencia de un campo $\mathbf{F}$ en un punto $\mathbf{p}$ como el límite cuando V tiende a cero del cociente del flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de V entre el volumen contenido por V,

donde siempre $\mathbf{p} \in V$. Es decir,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \lim_{V \to 0} \frac{\text{flujo del campo a través de } V}{\text{volumen contenido por } V} \tag{5.23}$$

Nuestro propósito es encontrar una expresión general según la dimensión para la divergencia de un campo.

Análisis en $\mathbb{R}^2$**.** Sea el campo $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (M, N)$ definido en el abierto U de $\mathbb{R}^2$ es el campo de velocidades de una corriente de un fluido.

Sea $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$, consideramos el rectangulo R con centro en $\mathbf{p}$ dado por

$$R = \{(x, y) \,|\, x_0 - h \leq x \leq x_0 + h,\ y_0 - k \leq y \leq y_0 + k\}$$

lo cual se puede ejemplicar gráficamente en la siguiente figura:

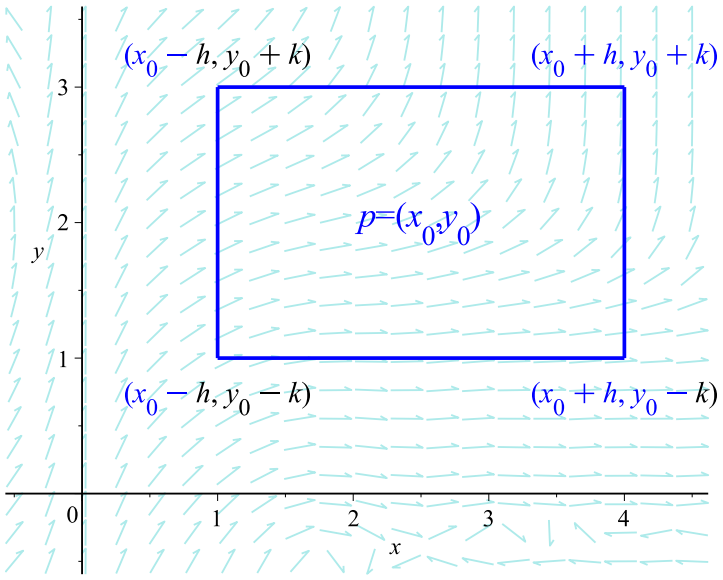


Figura 5.1: Ejemplificación del cálculo de la divergencia en $\mathbb{R}^2$.

Recuerde además que $\mathbf{F} = (M, 0) + (0, N)$, razón por la cual podemos separar el campo en cada una de sus componente. Evidentemente M está asociado a los lados verticales y N a los lados verticales. Además, podemos garantizar que $R \subset U$ haciendo a h y k lo suficientemente pequeños.

Una estimación del fluido que escapa a través del rectángulo R se puede realizar sumando los flujos netos de los lados verticales y horizontales. Es decir, lo que sale menos lo que entra.

Tomando el segmento desde $(x_0 - h, y_0 - k)$ hasta $(x_0 - h, y_0 + k)$, este se ve atravesado solamente por la componente M. Asumiendo un tamaño despreciable para el rectángulo R, podemos suponer que a lo largo del rectángulo el valor del campo es $M(x_0 - h, y_0)$. Multiplicando por el largo del lado, $2k$, obtenemos una aproximación del flujo. Considerando asimismo que al otro lado del rectángulo el valor del campo es aproximadamente $M(x_0 + h, y_0)$, tenemos que el flujo de escape neto está determinado por:

$$\text{flujo vertical} \approx 2k\,[M(x_0 + h, y_0) - M(x_0 - h, y_0)]$$

Razonando análogamente para el flujo horizontal, obtenemos que

$$\text{flujo horizontal} \approx 2h\,[N(x_0, y_0 + k) - N(x_0, y_0 - k)]$$

Por esta razón, el flujo neto total viene dado por

$$\text{flujo neto} \approx 2k\,[M(x_0 + h, y_0) - M(x_0 - h, y_0)] + 2h\,[N(x_0, y_0 + k) - N(x_0, y_0 - k)]$$

Sin embargo, resulta más práctico realizar una medida del flujo por unidad de área, ya que al realizar una suma infinitesimal de estas medidas, se puede obtener el flujo total por medio de una superficie u objeto de dimensión mayor. Entonces, dividimos por el área del rectángulo:

$$\text{flujo } \times \text{ unidad de área} = \frac{M(x_0 + h, y_0) - M(x_0 - h, y_0)}{2h} + \frac{N(x_0, y_0 + k) - N(x_0, y_0 - k)}{2k}$$

Tomando el límite cuando $(h, k) \to 0$ obtenemos lo que se define como divergencia de $\mathbf{F}$ en un punto dado:

$$\begin{aligned}
\text{div } \mathbf{F} &= \lim_{(h,k)\to 0} \underbrace{\frac{M(x_0 + h, y_0) - M(x_0 - h, y_0)}{2h}}_{\text{independiente de } k} + \underbrace{\frac{N(x_0, y_0 + k) - N(x_0, y_0 - k)}{2k}}_{\text{independiente de } h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{M(x_0 + h, y_0) - M(x_0 - h, y_0)}{2h} + \lim_{k\to 0} \frac{N(x_0, y_0 + k) - N(x_0, y_0 - k)}{2k}
\end{aligned}$$

Observe que aquí se nota la validez de haber tomado x_0 e y_0 como invariantes en los lados respectivos cuando se hacia necesario: al tomar el límite, por la continuidad del campo estos hubiesen tendido de todas formas a la componente buscada. Además, cabe notar que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{M(x_0 + h, y_0) - M(x_0 - h, y_0)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{M(x_0 + h, y_0) - M(x_0, y_0) + M(x_0, y_0) - M(x_0 - h, y_0)}{h} \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{M(x_0 + h, y_0) - M(x_0, y_0)}{h}}_{\frac{\partial M}{\partial x}(x_0, y_0)} \\
&\qquad \cdots + \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{M(x_0, y_0) - M(x_0 - h, y_0)}{h}}_{\frac{\partial M}{\partial x}(x_0, y_0)} \\
&= \frac{\partial M}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Procediendo por analogía con N, concluimos finalmente que

$$\boxed{\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}}.$$

Extensión a $\mathbb{R}^3$**.** Ahora consideramos el campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Deseamos nuevamente obtener la divergencia de $\mathbf{F}$, entendida como el flujo neto por unidad de volumen en un punto determinado. Para ello, consideramos el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ y extendemos el paralelógramo de dimensiones hjk cuya región encerrada denotamos por Ω.

En dimensión 3, asociamos el flujo a cada par de caras paralelas en el paralelógramo. Separando por componentes en un desarrollo análogo al anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}\text{flujo en } F_1 &\approx 4jk\left[F_1(x_0+h,y_0,z_0)-F_1(x_0-h,y_0,z_0)\right]\\ \text{flujo en } F_2 &\approx 4hk\left[F_2(x_0,y_0+j,z_0)-F_2(x_0,y_0-j,z_0)\right]\\ \text{flujo en } F_3 &\approx 4hj\left[F_3(x_0,y_0,z_0+k)-F_3(x_0,y_0,z_0-k)\right]\end{aligned}$$

Luego,

$$\text{divergencia en } \Omega \approx \frac{1}{8hjk}\sum_{i=1}^{3}\text{flujo en } F_i$$

Lo cual a su vez, tomando el límite cuando las tres componentes se hacen cero, viene a ser

$$\begin{aligned}\text{div }\mathbf{F} &= \lim_{h\to 0}\frac{F_1(x_0+h,y_0,z_0)-F_1(x_0-h,y_0,z_0)}{2h}+\lim_{j\to 0}\frac{F_2(x_0,y_0+j,z_0)-F_2(x_0,y_0-j,z_0)}{2j}\\ &\quad+\lim_{k\to 0}\frac{F_3(x_0,y_0,z_0+k)-F_3(x_0,y_0,z_0-k)}{2k}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\text{div }\mathbf{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}=\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}} \tag{5.24}$$

Interpretación física del Teorema de la Divergencia **(muy importante)**

Si consideramos el punto (x_0, y_0, z_0) como la región infinitesimal de un volumen de control de un gas, entonces podemos entender la divergencia en dicho punto como una medida de cuánto diverge o escapa el gas en dicho punto. Si div $\mathbf{F} > 0$, entonces el gas se está expandiendo. En caso contrario, si div $\mathbf{F} < 0$, entonces el gas se está contrayendo. Si div $\mathbf{F} = 0$, entonces el fluido/gas se dice *incompresible*.

He aquí un desarrollo importante y fundamental a partir de esta interpretación física. Considere un recipiente con un líquido y una membrana semipermeable en su interior. En cada punto o diferencial ΔV al interior de la membrana se estará escapando un volumen de $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,(\Delta V)$. Sin embargo, en caso de estar escapándose flujo, este debe ser recibido por los ΔV contiguos, por lo cual al considerar varios ΔV junto el flujo neto a través de la superficie que encierra a esta suma de ΔV aledaños puede entenderse como la suma del flujo neto de cada uno de los ΔV. ¿Qué ocurre entonces si sumamos todos los diferenciales de volumen en la membrana semipermeable? ¡Obtenemos el flujo neto a través de la membrana!

El Teorema de la Divergencia sugiere que para medir cuánto flujo escapa a través de la membrana se puede medir el flujo infinitesimal que escapa en cada punto que la membrana encierra y sumar todos estos puntos. Es intuitivo entonces que la suma de cada uno de estos flujos infinitesimales que escapan representan el flujo total que escapa en la membrana.

El teorema

Hecha toda esta interpretación física estamos en condiciones de enunciar y comprender el teorema en $\mathbb{R}^3$:

Teorema: Teorema de la Divergencia. Sea Ω una región en $\mathbb{R}^3$ de tipo I, II y III y sea $\mathcal{K}$ la frontera de Ω con una parametrización $\mathbf{f} : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que orienta a la superficie con sus vectores normales apuntando hacia el exterior.

Si $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C^1 definido en **todo** punto del abierto U tal que $\Omega \subseteq U$. Entonces

$$\oiint_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V. \tag{5.25}$$

Con este teorema hemos obtenido nuevamente un resultado que convierte un problema de contorno (superficie) a uno de interior (volumen). Por lo tanto, este resultado al igual que los anteriores puede ser empleado a conveniencia. A modo de resumen, enunciamos todos los teoremas fundamentales del cálculo en la siguiente tabla:

Teorema Fundamental del Cálculo	$\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
Teorema Fundamental de Campos Conservativos	$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = f\,(\mathbf{b}) - f\,(\mathbf{a})$
Teorema de Green	$\oint_{\partial\mathcal{R}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{R}} \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \, \mathrm{d}A$
Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^2$	$\oint_{\partial\mathcal{R}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}A$
Teorema de Kelvin−Stokes	$\oint_{\partial^+\mathcal{S}^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{F}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$
Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^3$	$\oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V$

Partiremos resolviendo los problemas básicos y típicos del Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^3$, los cuales nos permiten calcular el flujo de una superficie a través de la integral triple del volumen. Para ello,

en muchos casos nos enfrentaremos a superficies que no son cerradas, razón por la cual tenemos que cerrar la superficie a conveniencia, tal como hicimos con el Teorema de Green.

Problema 5.31 Considere la región Ω dada por $x^2 + 2y^2 + 4z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ y un campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ con $P_x + Q_y = 3$ y $R = x^2 + y^2$. Evalúe

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

con la normal apuntando hacia afuera.

Solución:

Este problema es directo en su resolución, pues la frontera es una superficie cerrada. Dado que $\mathbf{F}$ está definido en todo punto por hipótesis, entonces aplicamos el Teorema de la Divergencia. Tenemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \underbrace{P_x + Q_y}_{=3} + \cancelto{0}{R_z} = 3$$

Luego,

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 3 \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V$$

donde el volumen en cuestión es la mitad del volumen del elipsoide. Este puede calcularse mediante sustitución esférica y todo lo aprendido en integración triple. Sin embargo, esto ya lo hicimos y es fácil notar que:

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$$

Finalmente,

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$

Problema 5.32 Calcule

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

siendo $\mathbf{F} = 2xz\,\hat{\mathbf{i}} + yz\,\hat{\mathbf{j}} + z^2\,\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathcal{S}$ la porción de superficie del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ con $z > 0$ y su normal apuntando hacia afuera.

Solución:

Este problema en efecto guarda una similitud sorprendente con aquellos ya aprendidos durante el Teorema de Green. Observe que solo tenemos la tapa de un paraboloide cuya intersección con el plano xy viene dada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ por simple inspección.

Si bien es posible y válido calcular la integral de superficie por definición, esto puede resultar en un proceso tedioso, por lo cual podemos usar el Teorema de la Divergencia para convertir el problema de superficie en uno de volumen. Sin embargo, para ello requerimos en primera instancia una superficie cerrada, condición que no se cumple en este caso. ¿Cómo arreglamos esto? Poniendo una tapa, y en este caso siempre debe ser la más sencilla posible.

Por ejemplo, podemos poner la circunferencia plana $x^2+y^2 \leq 9$, $z = 0$ para tapar el paraboloide. De esta forma, digamos que $\mathcal{S}^*$ es el sólido completo y Ω el paraboloide encerrado. Entonces, aplicando el teorema,

$$\oiint_{\mathcal{S}^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V$$

donde por definición $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 2z + z + 2z = 5z$. Entonces, requerimos calcular

$$\iiint_{\Omega} 5z \, \mathrm{d}V$$

sobre la superficie en cuestión. En este caso, integramos con simetría cilíndrica, de modo que:

$$r \in [0, 3] \quad ; \quad t \in [0, 2\pi] \quad ; \quad 0 \leq z \leq 9 - r^2$$

donde $r = x^2 + y^2$. De esta forma, escribiendo la integral iterada:

$$\iiint_{\Omega} 5z \, \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} 5zr \, \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 5\pi \int_0^3 \left(9 - r^2\right)^2 r \, \mathrm{d}r$$

Hacemos $u = 9 - r^2 \to \mathrm{d}u = -2r \, \mathrm{d}r$ con lo que:

$$\iiint_{\Omega} 5z \, \mathrm{d}V = \frac{5\pi}{2} \int_0^9 (9 - u)^2 \, \mathrm{d}u = \frac{5\pi}{6} 9^3 = \frac{1215\pi}{2}$$

Entonces,

$$\oiint_{\mathcal{S}^*} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1215\pi}{2}$$

pero $\oiint_{\mathcal{S}^*} = \iint_{\mathcal{S}} + \iint_{\mathcal{T}}$ donde $\mathcal{T}$ es la tapa apuntando hacia afuera.

En este caso, como las normales deben apuntar hacia afuera del sólido, las normales de la tapa van en la dirección $-\hat{\mathbf{k}}$. Parametrizamos la tapa para calcular la integral se superficie por definición. En este caso, para la tapa

$$\mathbf{f}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{k}}\, r\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Sin embargo, si notamos que todas las componentes de $\mathbf{F}$ consideran z y este se anula, entonces $\mathbf{F}(\mathcal{T}) = 0$ por lo que

$$\iint_{\mathcal{T}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

Concluimos entonces que:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oiint_{\mathcal{S}^*} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1215\pi}{2}}$$

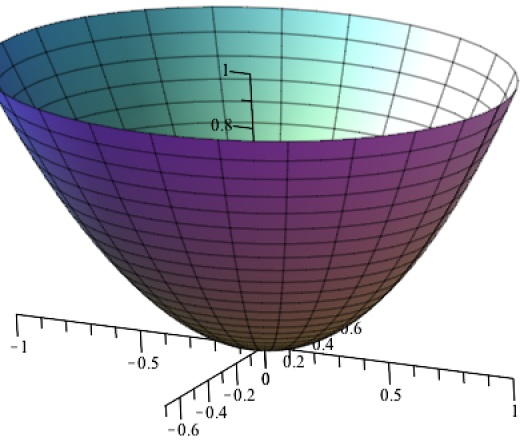
Problema 5.33 Sea $\mathbf{F} = \left(x^3 + ye^z, x^4\sqrt{z^3+1} + 2y^3, x+y\right)$ y $\mathcal{S}$ el manto del paraboloide elíptico $z = x^2+2y^2$, $0 \le z \le 1$ orientado positivamente mediante la normal hacia afuera. Hallar el flujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}$.

Solución:

Puede no resultar para nada cómodo tratar de calcular la integral por definición, más pensando en que la divergencia de $\mathbf{F}$ es significativamente más sencilla:

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F} = 3x^2 + 6y^2 = 3\left(x^2+2y^2\right).$$

Observando la expresión de la superficie, este es un paraboloide que se abre hacia arriba y que no está cerrado, por lo cual para usar el teorema requerimos cerrar la superficie con una tapa. Lo comprobamos gráficamente:



La tapa por excelencia es una plana, que corresponde a la porción de plano $z = 1$ encerrada por el paraboloide, la cual denotaremos por $\mathcal{T}$.

Luego, $\partial\Omega = \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ donde Ω es la región encerrada por el paraboloide y la tapa. En este caso sí será posible aplicar el Teorema de la Divergencia, de modo que:

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \oiint_{\mathcal{T}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V.$$

Calculemos primero la integral de superficie la tapa. En este caso, parametrizando:

$$x^2 + 2y^2 = 1 \to \mathbf{f}\,(r, \theta) = \left(r\cos\theta, \frac{r}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\theta, 1 \right)$$

Dado que la normal apunta hacia afuera, es fácil notar ya sea por definición o inspección que:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{k}} \, \frac{r}{\sqrt{2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Luego,

$$\mathbf{F}\,(\mathcal{T}) = \left(r^3\cos^3\theta + e\frac{r}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\, r^4 \cos^4\theta + \frac{r^3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}^3\theta, r\cos\theta + \frac{r}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\theta \right)$$

con lo cual

$$\iint_{\mathcal{T}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\theta \right) \frac{r^2}{2} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0$$

Finalmente,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 3 \iiint_{\Omega} x^2 + 2y^2 \, \mathrm{d}V$$

donde Ω es la porción de paraboloide en cuestión. Llevando a coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta$$

y $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ con $x^2+2y^2 \leq z \leq 1 \to r^2 \leq z \leq 1$. De esta forma, con $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z/\sqrt{2}$ calculamos la integral:

$$\iiint_{\Omega} x^2 + 2y^2\,\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r^2\,\frac{r}{\sqrt{2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}2\pi\underbrace{\int_0^1 r^3\left(1-r^2\right)\mathrm{d}r}_{\text{polinomial}} = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}$$

Entonces,

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

Revisaremos ahora la tipología de problemas más elaborada, donde se integran las identidades vectoriales con el Teorema de la Divergencia, llegando a resultados importantes y relevantes.

Problema 5.34 Si $\mathcal{S}$ es una esfera en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ definido en todo punto de de la esfera, pruebe que:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Solución:

Dado que tenemos una superficie cerrada con $\mathbf{F}$ definido en todo punto, entonces podemos aplicar el Teorema de la Divergencia, con lo cual:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\mathrm{d}V$$

donde Ω es la región encerrada por la superficie $\mathcal{S}$. Ya demostramos que todo campo rotor tiene divergencia nula, i.e.

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right) = 0 \to \iiint_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\mathrm{d}V = 0$$

concluyendo así que:

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla}\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0} \quad \blacksquare$$

lo cual es cierto incluso para cualquier otro tipo de superficie cerrada siempre y cuando $\mathbf{F}$ esté definido en todo punto.

Problema 5.35

(a) Demuestre que $\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right) = f\vec{\nabla}^2 g - g\vec{\nabla}^2 f$.

(b) Sea $\Omega \subseteq U$ abierto y simplemente conexo. Muestre que si $\vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla}^2 g = 0$ sobre Ω, entonces

$$\oiint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{n}}}\mathrm{d}S = \oiint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{n}}}\mathrm{d}S.$$

Solución:

(a) Ya demostramos esta propiedad en la sección respectiva de propiedades del operador nabla. Sin embargo, recordamos su deducción haciendo la extensión de la regla del producto a los gradientes:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g\right) = \vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g + f\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}g = \vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g + f\vec{\nabla}^2 g$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(g\vec{\nabla}f\right) = \vec{\nabla}g\cdot\vec{\nabla}f + g\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}g\cdot\vec{\nabla}f + g\vec{\nabla}^2 f$$

Si restamos ambas igualdades, aplicamos la linealidad de la divergencia, obteniendo así que:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right) = \vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g + f\vec{\nabla}^2 g - \vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}^2 f$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right) = f\vec{\nabla}^2 g - g\vec{\nabla}^2 f} \quad \blacksquare$$

(b) Observe que de la ecuación anterior, si $\vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla}^2 g = 0$, entonces:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right) = 0$$

Esto quiere decir que en ningún punto el campo en cuestión diverge, por lo cual el flujo neto de cualquier superficie cerrada es cero. En efecto, integrando la divergencia en una región Ω arbitraria:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right)\mathrm{d}V = 0$$

Dado que se cumplen todas las hipótesis del Teorema de la Divergencia, entonces:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right)\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\Omega^+} \left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

Entonces, por linealidad de las integrales de superficie, tendremos que:

$$\oiint_{\partial\Omega^+} f\vec{\nabla}g\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oiint_{\partial\Omega^+} g\vec{\nabla}f\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Recordando la representación simbólica del diferencial de superficie, tenemos que $\mathrm{d}\mathbf{S}=\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S$, con lo cual todo lo anterior se reescribe como:

$$\oiint_{\partial\Omega^+} f\vec{\nabla}g\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S=\oiint_{\partial\Omega^+} g\vec{\nabla}f\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S$$

pero si recordamos las ideas de diferenciabilidad en funciones escalares, asumiendo que g es diferenciable se tendrá que:

$$\vec{\nabla}g\cdot\hat{\mathbf{n}}=\frac{\partial g}{\partial\hat{\mathbf{n}}}$$

y de forma análoga para f. Concluimos entonces que:

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial\hat{\mathbf{n}}}\mathrm{d}S=\oiint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial\hat{\mathbf{n}}}\mathrm{d}S}$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 5.36 Sean $f(x,y,z)=xyz$, $g(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ y el campo vectorial $\mathbf{F}=f\vec{\nabla}g-g\vec{\nabla}f$. Calcule

$$\oiint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

donde $\mathcal{S}$ es la esfera de ecuación $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

Solución:

Debido a lo complejo de calcular el flujo en el contorno, lo hacemos en el interior, con lo cual

$$\oiint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V.$$

Sin embargo, dada la definición de $\mathbf{F}$ y haciendo uso de lo demostrado en el problema anterior tendremos que:

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}=f\vec{\nabla}^2g-g\vec{\nabla}^2f$$

donde solo debemos calcular los laplacianos. Observe que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yz\rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

y se puede concluir lo mismo de las otras dos componentes. Luego,

$$\vec{\nabla}^2 f = 0$$

Se puede demostrar de forma análoga derivando que $\vec{\nabla}^2 g = 0$ en todo punto salvo en el origen. Sin embargo, la esfera no encierra al origen por lo cual es válido aplicar el Teorema de la Divergencia. Se concluye entonces que:

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0}$$

Problema 5.37 Sean f, g funciones de clase $\mathcal{C}^1$ definidas en todo punto de una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{K} = \partial\Omega$ con sus normales apuntando hacia el exterior.

(a) Demuestre que

$$\oiint_{\mathcal{K}} \left(f\vec{\nabla} g\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \left(f\vec{\nabla}^2 g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g\right) \mathrm{d}V.$$

(b) Demuestre que si f es armónica $\left(\vec{\nabla}^2 f = 0\right)$, entonces

$$\oiint_{\mathcal{K}} \left(f\vec{\nabla} f\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \left\|\vec{\nabla} f\right\|^2 \mathrm{d}V.$$

(c) Concluya que adicionalmente si f se anula en $\mathcal{K}$, entonces

$$f\,(x, y, z) \equiv 0.$$

Solución:

(a) Esto ya lo demostramos en el problema anterior, pues:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{\nabla} g\right) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + f\vec{\nabla}^2 g$$

Tomando la integral de Ω a ambos lados:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{\nabla} g\right) \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + f\vec{\nabla}^2 g \,\mathrm{d}V$$

Pero al lado derecho se puede aplicar el Teorema de la Divergencia, pues se cumplen todas las

hipótesis. Entonces, si $\mathcal{K} = \partial\Omega^+$ se tendrá que:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{\nabla} g \right) \mathrm{d}V = \oiint_{\mathcal{K}} f\vec{\nabla} g \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\rightarrow \boxed{\oiint_{\mathcal{K}} f\vec{\nabla} g \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + f\vec{\nabla}^2 g \, \mathrm{d}V} \quad \blacksquare$$

(b) Dado que se pide demostrar un resultado para $f\vec{\nabla} f$, entonces hagamos $g = f$, con lo cual en la ecuación anterior:

$$\oiint_{\mathcal{K}} f\vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} f + f\vec{\nabla}^2 f \, \mathrm{d}V$$

Pero f es armónica y $\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} f = \left\| \vec{\nabla} f \right\|^2$, con lo cual:

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{K}} \left(f\vec{\nabla} f \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} f \right\|^2 \mathrm{d}V} \quad \blacksquare$$

(c) Si f se anula en $\mathcal{K}$, entonces para todo punto que esté en $\mathcal{K}$ se tendrá que $f(\mathcal{K}) = 0$. Luego, en $\mathcal{K}$ se tendrá que $f\vec{\nabla} f = 0$. Es decir, de la ecuación anterior:

$$\iiint_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} f \right\|^2 \mathrm{d}V = 0$$

Observe que esta es una suma de elementos siempre positivos y en el peor de los casos nulos (son normas en $\mathbb{R}^3$), por lo cual la única combinación de valores posibles es que:

$$\left\| \vec{\nabla} f \right\|^2 = 0 \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \Omega$$

y no puede serlo en un número finito de puntos pues f es $\mathcal{C}^1$. Cualquier otra combinación en que esta función no se anule generaría necesariamente una integral no nula.

Luego, como las normas siempre son semidefinidas positivas (nulas en el peor de los casos), entonces $\vec{\nabla} f$ no tiene más opción que anularse en todo punto, i.e.:

$$\rightarrow \vec{\nabla} f = 0 \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \Omega$$

De la ecuación anterior se deduce que todas las derivadas parciales de f se anula, por lo que $f(x, y, z) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ a determinar. Dado que f es $\mathcal{C}^1$ en todo Ω (no genera discontinuidades en ningún punto), entonces f está obligado a tomar el mismo valor que el que tomó en $\mathcal{K}$, que es cero. Entonces,

$$\boxed{f(x, y, z) \equiv 0} \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \Omega. \quad \blacksquare$$

Propuesto Resuelva los siguientes problemas:

(a) Sin utilizar el Teorema de Stokes, calcule el flujo de $\vec{\nabla} \times \mathbf{F}$ a través del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ si $\mathbf{F} = (z - xy, y - z, x^3 + y)$.

(b) Sea u una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $\vec{\nabla}^2 u = x + y + z$ y la región Ω encerrada por el cono $(z-2)^2 = 3(x^2+y^2)$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4/3$. Calcule el flujo neto del campo gradiente de u a través de Ω.

5.4.3. Aplicaciones del Teorema del a Divergencia en $\mathbb{R}^3$

El Teorema de la Divergencia puede ser utilizado íntegramente para llegar a desarrollos y conclusiones importantes tanto en mecánica de fluidos como en electromagnetismo. Partiremos revisando aplicaciones en hidrostática a continuación:

Problema 5.39 **El teorema del gradiente.** Sea f una función escalar de clase $\mathcal{C}^1$ y Ω una región compacta. Demuestre que:

$$\oiint_{\partial\Omega} f \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} f \, \mathrm{d}V.$$

Observe que $f\,\mathrm{d}\mathbf{S}$ es una ponderación de f por el diferencial vectorial $\mathrm{d}\mathbf{S}$, por lo cual el resultado es un vector. En otras palabras, estamos haciendo la operación componente a componente.

Ayuda: Aplique el Teorema de la Divergencia a $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$ con $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ fijo y arbitrario.

Solución:

Siguiendo las indicaciones, hagamos $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$. Luego,

$$\oiint_{\partial\Omega^*} \mathbf{c} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{c} f \right) \mathrm{d}V$$

Si hacemos $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S_x \hat{\mathbf{i}} + \mathrm{d}S_y \hat{\mathbf{j}} + \mathrm{d}S_z \hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, entonces al lado derecho se tendrá que:

$$\iiint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{c} f \right) \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} c_1 \frac{\partial f}{\partial x} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y} + c_3 \frac{\partial f}{\partial z} \, \mathrm{d}V$$

Entonces se sigue que:

$$\oiint_{\partial\Omega^*} \mathbf{c} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} c_1 \frac{\partial f}{\partial x} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y} + c_3 \frac{\partial f}{\partial z}\, \mathrm{d}V$$

Observe que como $\mathbf{c}$ es arbitrario, esta es una igualdad que debe cumplirse para cualquier valor de $\mathbf{c}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{c} = (1,0,0) \to \oiint_{\partial\Omega^*} f \cdot \mathrm{d}S_x = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}\, \mathrm{d}V$$

$$\mathbf{c} = (0,1,0) \to \oiint_{\partial\Omega^*} f \cdot \mathrm{d}S_y = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}\, \mathrm{d}V$$

$$\mathbf{c} = (0,0,1) \to \oiint_{\partial\Omega^*} f \cdot \mathrm{d}S_z = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z}\, \mathrm{d}V$$

Es decir, estas tres identidades siempre deben ser ciertas. Más aún, las tres pueden resumirse en una igualdad vectorial en la cual, si asumimos que integrar un vector es integrarlo componente a componente, entonces de acuerdo a la notación convenida:

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega^+} f\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} f\, \mathrm{d}V} \quad \blacksquare$$

Problema 5.40 **El principio de Arquímedes.** Un sólido ocupa una región Ω con superficie $\partial\Omega$ y se encuentra sumergido en un líquido con densidad constante ρ. Definimos un sistema de coordenadas tal que el plano xy coincide con la superficie del líquido y los valores positivos de z son medidos hacia abajo del líquido.

La presión a una profundidad z se mide como la función escalar $P(z) = \rho g z$ donde g es la aceleración gravitatoria. De acuerdo a la ley hidrostática, en equilibrio la fuerza total en el sólido para la distribución de presiones está dada por la integral

$$\mathbf{F} = -\oiint_{\partial\Omega} P\, \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Demuestre que $\mathbf{F} = -W\,\hat{\mathbf{k}}$ donde W es el peso del *líquido* desplazado por el sólido.

Solución:

Ya sabemos que:

$$\mathbf{F} = -\oiint_{\partial\Omega} P \, \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Para obtener el peso del líquido requeriríamos expresar esa misma fuerza como una integral triple que entregue como resultado la masa. La fuerza anterior la podemos escribir como una integral triple usando el teorema del gradiente visto en el problema anterior. Entonces,

$$\oiint_{\partial\Omega} P \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} P \, \mathrm{d}V,$$

donde de la definición de P se tiene que $\vec{\nabla} P = -\rho g \hat{\mathbf{k}}$ con lo cual

$$\mathbf{F} = -g\hat{\mathbf{k}} \iiint_{\Omega} \rho \, \mathrm{d}V,$$

pero dado que ρ es la densidad del líquido, entonces la integral triple corresponde a la masa del líquido que encierra el sólido Ω , la cual denotaremos por M. Luego,

$$\mathbf{F} = -gM\hat{\mathbf{k}} = -W\,\hat{\mathbf{k}},$$

donde W es el peso del líquido desplazado por Ω. ■

Ahora revisaremos uno de los desarrollos más importantes de este teorema en el electromagnetismo. Para ello partiremos desarrollando y demostrando el principio matemático que sustenta toda la electrostática:

Problema 5.41

(a) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región acotada. Demuestre la Ley de Gauss:

$$\oiint_{\partial\Omega^+} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{si } 0 \in \Omega, \\ 0 & \text{si } 0 \notin \Omega. \end{cases}$$

(b) Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3} + \frac{(x-1,y-1,z-1)}{\|(x-1,y-1,z-1)\|^3}.$$

Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de cualquier superficie cerrada orientable en $\mathbb{R}^3$.

Indicación: Separe por casos: conteniendo y/o no conteniendo a $(0,0,0)$ y/o $(1,1,1)$.

Solución:

(a) Como primera observación, partamos notando que esta es una integral de superficie para el campo

$$\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=\frac{\left(x,y,z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

el cual presenta simetría radial (esférica) y es el campo eléctrico típico y prácticamente único de electricidad y magnetismo, pues en el se basan todos los demás. Entonces, si escribimos el mismo campo en coordenadas esféricas, tenemos que:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{\mathbf{r}}{\left\|\mathbf{r}\right\|^3}=\frac{1}{\left\|\mathbf{r}\right\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\left\|\mathbf{r}\right\|}=\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\left\|\mathbf{r}\right\|^2}$$

Asimismo, de la primera definición del campo es fácil notar mediante los procedimientos algebraicos habituales que:

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}=0$$

para todo punto salo $(x,y,z)=0=\mathbf{r}$. Por lo tanto, se puede aplicar el Teorema de la Divergencia, siempre y cuando la superficie en cuestión no encierre al origen. Es necesario entonces separar en dos casos:

1) La superficie no encierra al origen, en otras palabras $0\notin\Omega$. Entonces, dado que se cumplen todas las hipótesis del teorema:

$$\oiint_{\partial\Omega^+}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V=0$$

2) En este caso no se cumple la condición del teorema. Sin embargo, podemos realizar un procedimiento similar al ya realizado con el Teorema de Green y agregar una superficie esférica $\mathcal{S}_\epsilon$ de radio $\epsilon\to 0$ centrada en el origen de modo que $\mathcal{S}^*=\partial\Omega\cup\mathcal{S}_\epsilon$ sí sea una superficie cerrada a pesar de que ambas superficies no estén conectadas. Luego, es inmediato bajo el mismo argumento anterior que:

$$\oiint_{\mathcal{S}^*}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oiint_{\partial\Omega^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}+\oiint_{\mathcal{S}_\epsilon}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=0$$

La primera integral de línea del miembro central de la ecuación es el que deseamos calcular y el segundo lo podemos calcular por definición. Consideramos que es una esfera de radio ϵ, pero siguiendo el teorema, las normales deben apuntar hacia afuera del **sólido** encerrado, lo que se traduce en este caso que las normales apunten hacia el origen o bien hacia el interior de esta esfera.

Luego, usamos la parametrización habitual para este caso:

$$\mathbf{f}=\epsilon\hat{\mathbf{r}}\to\mathbf{F}\left(\mathcal{S}_\epsilon\right)=\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\epsilon^2}$$

pues la distancia al origen de esta esfera es siempre constante e igual a ϵ^2. Asimismo, recordamos que el diferencial de superficie viene dado por:

$$\mathrm{d}\mathbf{S}=-\epsilon^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\hat{\mathbf{r}}$$

donde se antepone el signo $-$ para tener la orientación hacia el origen y además θ se mueve entre 0 y π y φ entre 0 y 2π. De esta forma,

$$\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Integrando,

$$\oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = -4\pi.$$

Entonces, deberá cumplirse que:

$$\oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - 4\pi = 0 \rightarrow \boxed{\oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi}$$

En resumen,

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega^+} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}\|^2}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{si } 0\in\Omega, \\ 0 & \text{si } 0\notin\Omega. \end{cases}} \quad \blacksquare$$

El comentario importante: Observe que para **este** tipo de campos (¡solo para este tipo!), el flujo de una superficie cerrada es una medida de si se está encerrando al punto singular (en que se indetermina el campo) o no. En efecto, si la singularidad se ubica ahora en $\mathbf{p}$ es fácil notar que el campo adquiere la forma

$$\mathbf{F}_\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^3}$$

(no unitario el numerador pues el denominador está al cubo). Y en dicho caso,

$$\oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}_\mathbf{p}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \mathbf{p}\in\Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{p}\notin\Omega. \end{cases}$$

(b) Si se comprendió de forma adecuada el apartado anterior, esta pregunta tiene respuesta evidente. Digamos que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

donde:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{x}-\vec{0}}{\left\|\mathbf{x}-\vec{0}\right\|^3} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = \frac{\mathbf{x}-(1,1,1)}{\|\mathbf{x}-(1,1,1)\|^3}$$

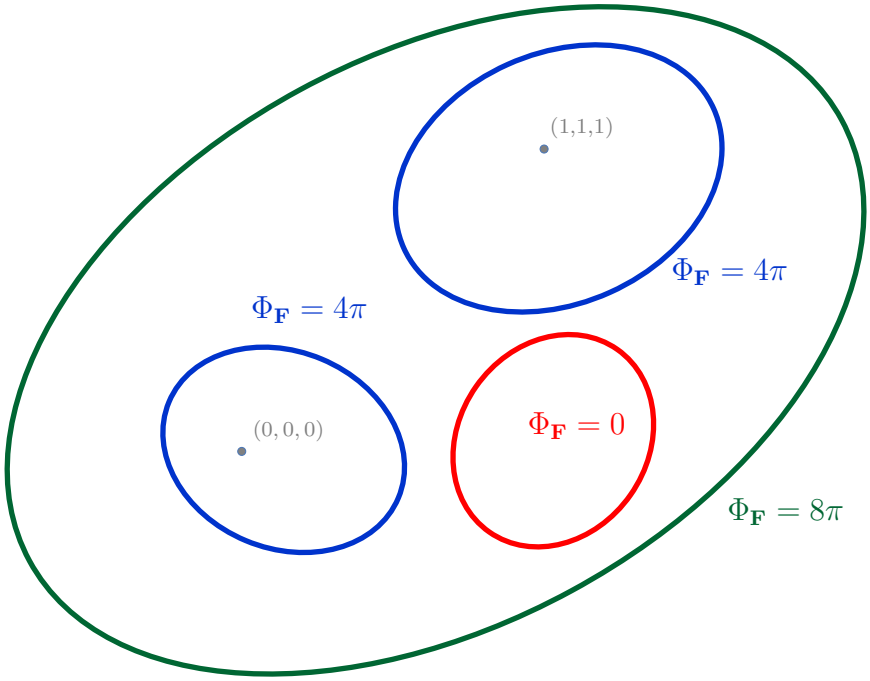
Entonces tenemos por linealidad de las integrales de superficie que:

$$\begin{aligned}\oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} + \oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}_2\cdot d\mathbf{S}\\ &= \begin{cases} 4\pi & \text{si } \vec{0}\in\Omega,\\ 0 & \text{si } \vec{0}\notin\Omega.\end{cases} + \begin{cases} 4\pi & \text{si } (1,1,1)\in\Omega,\\ 0 & \text{si } (1,1,1)\notin\Omega.\end{cases}\end{aligned}$$

De aquí es evidente que se pueden distinguir cuatro casos dependiendo si la superficie encierra o no encierra a los puntos singulares:

$$\oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } (0,0,0)\notin\Omega\wedge(1,1,1)\notin\Omega,\\ 4\pi & \text{si } (0,0,0)\in\Omega\wedge(1,1,1)\notin\Omega,\\ 4\pi & \text{si } (0,0,0)\notin\Omega\wedge(1,1,1)\in\Omega,\\ 4\pi+4\pi\,(=8\pi) & \text{si } (0,0,0)\in\Omega\wedge(1,1,1)\in\Omega.\end{cases}$$

Esto se puede resumir gráficamente en la siguiente figura, donde se simplifica la situación a 2D y se asume que las superficies cerradas son aproximadamente elípticas, sin embargo pueden tener una forma absolutamente arbitraria:



Se puede concluir entonces que si tenemos la garantía de que:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}_k}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_k\|^3}$$

Entonces $\oiint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ indica la cantidad de singularidades que se está encerrando.

Todo el desarrollo anteriormente visto es más que un ejercicio conceptual, pues es el fundamento matemático de toda la electrostática básica que se estudia en el curso de Electricidad y Magnetismo. En este último problema resuelto a continuación realizaremos la conexión matemática entre la Ley de Gauss y los contenidos de electrostática:

Problema 5.42 **Aplicación en electrostática.** Para una partícula puntual de carga q ubicada en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ se define el campo eléctrico en un punto $\mathbf{x}$ como

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

con $r^2 = (x-p_1)^2+(y-p_2)^2+(z-p_3)^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|$ y $\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{x}-\mathbf{p})/\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|$ el vector unitario que apunta en la dirección desde el origen hacia $\mathbf{p}$.

(a) Utilizando la Ley de Gauss, demuestre que:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

siendo $\mathcal{S}$ una superficie simple y orientable, no necesariamente acotada. Observe que si la superficie cerrada no encierra a la carga q, entonces $q = 0$, lo cual es coherente con el resultado anterior.

(b) Para una distribución de carga continua (no puntual, a diferencia del caso anterior) se define el diferencial de campo como:

$$\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \to \mathbf{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{\Omega}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\mathrm{d}q,$$

donde r y $\hat{\mathbf{r}}$ están ahora referidos a $\mathrm{d}q$ y al punto $\mathbf{x}$. Si definimos el diferencial de carga como $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V$ siendo ρ la densidad volumétrica de carga (carga/unidad de volumen), entonces pruebe que en este caso:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_{\partial\Omega}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_{\Omega}\rho\,\mathrm{d}V = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde Q es la carga encerrada por la superficie $\mathcal{S} = \partial\Omega$.

(c) Utilizando el Teorema de la Divergencia y el Teorema del Valor Medio para integrales triples, pruebe que:

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}.$$

Este resultado se conoce como Ley de Gauss diferencial y es la Primera Ecuación de Maxwell, una de las cuatro leyes que gobiernan el electromagnetismo clásico.

Solución:

(a) La expresión de $\mathbf{E}$ es puramente empírica, por lo que solo la trabajaremos matemáticamente.

Observe que en forma es exactamente igual al problema anterior, solo que se agregan factores empíricos para obtener los valores y unidades de deseadas. En efecto,

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^3} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

De la pregunta anterior ya sabemos la respuesta a esto:

$$\to \Phi_{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} 4\pi & \text{si } \mathbf{p} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{p} \notin \Omega. \end{cases}$$

Observe entonces que si se encierra la carga q, entonces el flujo será q/ϵ_0 y 0 en caso contrario. Consideremos entonces la carga q ubicada en $\mathbf{p}$, definiremos la carga encerrada por la superficie como:

$$q_{\text{enc}} = q \cdot \begin{cases} 4\pi & \text{si } \mathbf{p} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{p} \notin \Omega. \end{cases}$$

En otras palabras,

$$\boxed{\Phi_{\mathbf{E}} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon}}.$$

Es decir, **el flujo eléctrico es una medida de la cantidad de carga que está encerrando la superficie.**

A modo de ejemplo, si tenemos una carga $\mathbf{q}_1$ en $\mathbf{p}_1$ y una carga $\mathbf{q}_2$ en $\mathbf{p}_2$, entonces su campo eléctrico viene dado, por principio de superposición, por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_1\|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_2\|^3}$$

Por lo tanto, para una superficie cerrada que encierre a $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ tendremos que el flujo eléctrico vendrá dado por $(q_1+q_2)/\epsilon_0$, si encierra solo a $\mathbf{p}_1$ será q_1/ϵ_0 y puede razonarse así de forma análoga. Entonces, en efecto el flujo eléctrico es una medida de la cantidad de carga eléctrica encerrada por la superficie.

(b) Consideremos ahora una colección de cargas Δq. Su campo puede escribirse como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \Delta q_k \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}_k}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_k\|^3}$$

Observe que si hacemos los Δq_k cada vez de un tamaño más cercano al infinitesimal y los ubicamos a distancias próximas entre ellas, entonces el campo anterior se convierte en una integral y el conjunto de cargas en una distribución continua de carga. Es decir,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{U}} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^3} \mathrm{d}q$$

Supongamos que esta distribución de carga contiene una carga total Q distribuida uniformemente en un volumen V. Entonces podemos definir la densidad de carga volumétrica como:

$$\rho = \frac{Q}{V} \to \mathrm{d}q = \rho \, \mathrm{d}V$$

Con ello,

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint\limits_{\mathcal{U}} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\left\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\right\|^3} \, \rho \, \mathrm{d}V.$$

donde ρ en general puede no ser homogéneo y por lo tanto depende de $\mathbf{p}$ en el que se está integrando. Siguiendo la intuición, ¿qué pasará al tomar una superficie cerrada? ¡Nos indicará cuánto de esta carga en la distribución está siendo efectivamente encerrada! Eso es lo que demostraremos aquí. Partamos tomando la definición de flujo eléctrico:

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint\limits_{\mathcal{S}} \iiint\limits_{\mathcal{U}} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\left\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\right\|^3} \, \rho \, \mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Asumiendo alternancia entre operadores (generalmente estas hipótesis se cumplen):

$$\begin{aligned} \oiint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint\limits_{\mathcal{U}} \left(\oiint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\left\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\right\|^3} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \right) \rho \, \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint\limits_{\mathcal{U}} \rho \cdot \begin{cases} 4\pi & \text{si } \mathbf{p} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{p} \notin \Omega. \end{cases} \mathrm{d}V \end{aligned}$$

Definimos entonces la densidad de carga efectiva como aquella carga efectivamente encerrada por Ω:

$$\rho_{\text{enc}} = \rho \cdot \begin{cases} 4\pi & \text{si } \mathbf{p} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{p} \notin \Omega. \end{cases}$$

o en otras palabras,

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint\limits_{\mathcal{U}} \rho_{\text{enc}} \, \mathrm{d}V$$

Es decir, el flujo eléctrico es una medida de la carga encerrada incluso para distribuciones de carga continuas. Observe que $\mathcal{U}$ es la integración con respecto al sólido y Ω es la región encerrada por $\mathcal{S}$. Dado que ρ_{enc} se anula donde no haya carga encerrada por Ω, entonces no hay ningún problema en integrar en Ω en vez de hacerlo en $\mathcal{U}$, lo que por una parte nos permite conectar el fenómeno de contorno de $\mathcal{S}$ con lo que pasa en su interior, en Ω. Más aún, es evidente que en todos aquellos puntos donde no hay carga inmediatamente $\rho = \rho_{\text{enc}} = 0$.

$$\to \oiint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint\limits_{\Omega} \rho_{\text{enc}} \, \mathrm{d}V$$

Finalmente, la integral de la densidad de carga encerrada por Ω puede simplemente notarse como la carga total encerrada por Ω, Q_{enc}:

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon}} \quad \blacksquare$$

Esta es la expresión general para distribuciones de carga puntuales, continuas, superficiales, lineales, etc.

(c) Acabamos de demostrar que:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho_{\text{enc}} \, \mathrm{d}V$$

donde en realidad ρ_{enc} es redundante en este caso pues ya estamos tomando toda la densidad de carga encerrada por Ω, de ahí que $\rho_{\text{enc}} = \rho$ en este caso. Tomando el Teorema de la Divergencia al lado derecho tenemos que:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, \mathrm{d}V$$

Las hipótesis en este caso se cumplen pues las estamos compensando al lado derecho al incluir todas las singularidades encerradas por Ω. Observe que esto es en todo momento para Ω absolutamente arbitrario, por lo tanto se cumple **para todo** Ω que:

$$\iiint_{\Omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \mathrm{d}V = 0$$

Si la integral triple de una función es **para toda** región de integración Ω nula, se puede demostrar a partir de los conocimientos de cálculo de una variable sin mayor dificultad que:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}\,(\mathbf{x}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}\,(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \blacksquare$$

Esta es la primera de cuatro ecuaciones diferenciales que en su conjunto permiten explicar cualquier fenómeno electromagnético clásico, desde propagación por cables hasta antes, ondas electromagnéticas y el comportamiento de la luz. En su conjunto generan las ecuaciones diferenciales parciales que permiten cuantificar los fenómenos electromagnéticos para cualquier caso y/o distribución.

Y cómo no terminar con un último problema propuesto para aquellos interesados en revisar todas las aplicaciones que tienen estas expresiones.

Propuesto Considere la distribución de carga esférica con densidad constante ρ_0 y radio R. Usando los resultados del problema anterior, calcule el campo eléctrico $\mathbf{E}$ un un punto cualquiera del espacio.