PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
11 de Abril del 2022

MAT1630 - CÁLCULO III
Interrogación 1

Indicación:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen}(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

P1.- Considere la curva espacial

$$r(t) = \left(\frac{1}{t^2+1}\cos(2\pi t), \frac{1}{t^2+1}\operatorname{sen}(2\pi t), \frac{\sqrt{t^4+2t^2}}{t^2+1} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Muestre que la curva yace sobre la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1.
(Indicación: recordar que (x,y,z) está en la esfera unitaria centrada en el origen si y solo si $x^2+y^2+z^2=1$).

b) Muestre que $(0,0,1)$ no pertenece a la curva, pero que hay puntos arbitrariamente cercanos a $(0,0,1)$ en la curva. Para justificar esta última afirmación estudiar el límite cuando $t \to \infty$.

Solución:

a) Para demostrar que todo punto de la curva está en la esfera unitaria centrada en el origen verificamos que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t) = \frac{1}{(t^2+1)^1}\cos^2(2\pi t) + \frac{1}{(t^2+1)^1}\operatorname{sen}^2(2\pi t) + \frac{t^4+2t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{1+t^4+2t^2}{(t^2+1)^2} = 1.$$

b) Como $\cos(2\pi t)$ y $\operatorname{sen}(2\pi t)$ no se anular al mismo tiempo (pues $\cos^2(2\pi t)+\operatorname{sen}^2(2\pi t)=1$) $x(t)$ e $y(t)$ no pueden ser 0 al mismo tiempo y $(0,0,1)$ no puede pertenecer a la cutva. Por otro lado, cuando $t \to \infty$ tenemos que $x(t) \to 0, y(t) \to 0$ y $z(t) \to 1$, es decir $r(t) \to (0,0,1)$ cuanto $t \to \infty$ y por ende hay puntos en la curva arbitrariamente cercanos a $(0,0,1)$.

P2.- Sea $a \geq 1$. Considere la curva Γ, descrita por la parametrización $r : [0,a] \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$r(t) = \left(\frac{2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1} \right).$$

a) Calcule $r'(t)$ y verifique que

$$\|r'(t)\| = \frac{2}{t^2+1}.$$

b) Pruebe que la parametrización en longitud de arco de Γ es $r_0 : [0, \arctan(a)] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$r_0(s) = (\cos(s)+1, \operatorname{sen}(s)).$$

(Hint: recordar que $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)+C$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)$)

Solución:

a) Tenemos que $r'(t) = \left(\frac{-4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2} \right)$. Entonces

$$\|r'(t)\|^2 = \frac{16t^2+4(1-t^2)^2}{(t^2+1)^4} = \frac{4t^2+8t^2+4}{(t^2+1)^4} = \frac{4(t^2+1)^2}{(t^2+1)^4} = \frac{4}{(t^2+1)^2},$$

de aquí se obtiene que

$$\|r'(t)\| = \frac{2}{t^2+1}.$$

b) Para cada $t \in [0, a]$ se define

$$s(t) = \int_0^t \|r'(x)\| dx = 2\int_0^t \frac{1}{x^2+1} dx = 2\arctan(t) - 2\arctan(0) = 2\arctan(t).$$

De esta forma, la inversa de s es la función $t : [0, \arctan(a)] \to [0, a]$ definida por

$$t(s) = \tan\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s/2)}{\cos(s/2)}.$$

Entonces la parametrización en longitud de arco $r_0 : [0, \arctan(a)] \to \mathbb{R}^2$ queda definida como

$$r_0(s) = r(t(s)) = \left(\frac{2}{(\frac{\operatorname{sen}(s/2)}{\cos(s/2)})^2 + 1}, \frac{2\frac{\operatorname{sen}(s/2)}{\cos(s/2)}}{(\frac{\operatorname{sen}(s/2)}{\cos(s/2)})^2 + 1}\right) = (2\cos(s/2)^2, 2\operatorname{sen}(s/2)\cos(s/2)).$$

Aplicando la fórmula de seno para ángulo doble ($\alpha = \beta = s/2$), se obtiene que $\operatorname{sen}(s) = 2\operatorname{sen}(s/2)\cos(s/2)$. Aplicando la fórmula de coseno de ángulo doble ($\alpha = \beta = s/2$) y sumándola a la identidad $1 = \operatorname{sen}^2 + \cos^2$, se obtiene que $\cos(s) + 1 = 2\cos(s/2)^2$. De aquí se deduce la fórmula requerida.

P3.- Considere la curva $\gamma : [0,\, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(\theta) = \Big(\operatorname{sen}(2\theta), 1 - \cos(2\theta), 2\cos(\theta)\Big).$$

a) Calcule el vector tangente unitario en cualquier valor de θ.

b) Calcule la ecuación del plano normal en $\theta = \pi$.

c) Encuentre la curvatura de γ para cualquier valor de θ.

Solución

a) Tenemos que

$$\gamma'(\theta) = 2(\cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta), -\operatorname{sen}(\theta)).$$

y

$$\|\gamma'\| = 2(1 + \operatorname{sen}^2(\theta))^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto el vector tangente unitario esta dado por

$$T = \frac{(\cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta), -\operatorname{sen}(\theta))}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(\theta)}}.$$

b) En $\theta = \pi$ tenemos $\gamma(\pi) = (0, 0, 2)$ y $T = (1, 0, 0)$. Por lo tanto la ecuación del plano esta dada por

$$[(x, y, z) - (0, 0, 2)] \cdot (1, 0, 0) = 0.$$

equivalentemente,

$$x = 0.$$

c) De acuerdo a la fórmula vista en clase

$$\kappa = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}.$$

Calculamos

$$\gamma'' = -2(2\operatorname{sen}(2\theta), -2\cos(2\theta), \cos(\theta)).$$

Por lo tanto

$$\gamma' \times \gamma'' = -4(2\operatorname{sen}(\theta)\cos(2\theta) - \operatorname{sen}(2\theta)\cos(\theta), -\cos(2\theta)\cos(\theta) - 2\operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(\theta), -2)$$

y

$$\|\gamma' \times \gamma''\| = 4\sqrt{4\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 4}.$$

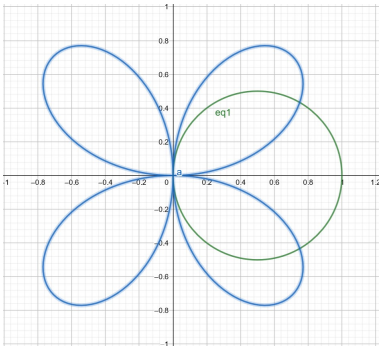
Por lo tanto

$$\kappa = \frac{\sqrt{3\operatorname{sen}^2\theta + 5}}{2(1 + \operatorname{sen}^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}.$$

P4.- En el plano, considere la curva $\mathcal{C}_1$ correspondiente a la circunferencia de ecuación $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ y la curva $\mathcal{C}_2$ dada en coordenadas polares por $\rho=\text{sen}(2\theta)$, con $\theta\in[-\pi,\pi]$. Bosqueje ambas curvas y calcule el largo del segmento de la circunsferencia $\mathcal{C}_1$ ubicado afuera de la curva $\mathcal{C}_2$. (Indicación: El cálculo de longitud se puede hacer sin integrar.)

Solución

La curva $\mathcal{C}_1$ es una circunsferencia de radio $1/2$ centrada en $(1/2,0)$, la curva $\mathcal{C}_2$ es una rosa de cuatro pétalos. El bosquejo de ambas curvas es:



Para calcular el largo requerido necesitamos estudiar la intersección de las curvas. La circunferencia $\mathcal{C}_1$ se puede representar, en polares, por $\rho=\cos(\theta)$, y para encontrar las intersecciones, resolvemos

$$\text{sen}(2\theta)=\cos(\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,\text{sen}(\theta)\cos(\theta)=\cos(\theta). \tag{1}$$

Las intersecciones corresponden a $\cos(\theta)=0$, que indica la intersección de las curvas en el origen, y a $\cos(\theta)\neq 0$, que ocurre cuando a $\text{sen}(\theta)=1/2$, concluyendo que las otras intersecciones de las curvas ocurren cuando $\theta=\pi/6$ y $\theta=-\pi/6$.

Un segmento de circunsferencia de radio r y angulo α tiene una longitud de $r\alpha$. En este caso tenemos una circunsferencia de radio $1/2$ (ecuación de $\mathcal{C}_1$) y el angulo del segmento afuera de la curva $\mathcal{C}_2$ es de un ángulo total de $2\pi/3$ (ver dibujo). Luego la longitud del segmento morado es $\pi/3$.

