PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2020

MAT1630 - Control 2

NOMBRE:.....

1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo definido por

$$F(x, y, z) = (ayz, -2bxz, 3c(z^2 + xy))$$

a) Determine las condiciones que deben cumplir las constantes a, b y c para que el campo F sea conservativo en $\mathbb{R}^3$.
Solución:

Si F es un campo conservativo, entonces existe f tal que:

$$F = \nabla f$$

es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ayz \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2bxz \tag{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3c(z^2 + xy) \tag{3}$$

Integrando (1) con respecto a x se obtiene:

$$f(x, y, z) = axyz + g(y, z)$$

derivando lo obtenido parcialmente con respecto a y e igualándolo con (2) obtenemos:

$$axz + \frac{\partial g}{\partial y} = -2bxz$$

de donde se concluye que:

$$a = -2b \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Integrando la segunda igualdad con respecto a y:

$$g(y,z) = 0 + h(z)$$

es decir:

$$f(x,y,z) = axyz + h(z)$$

derivando parcialmente con respecto a z e igualándolo con (3):

$$axy + h'(z) = 3cz^2 + 3cxy$$

de aquí concluimos que:

$$a = 3c \qquad\qquad h'(z) = 3cz^2$$

integrando $h'(z)$, obtenemos f:

$$f(x,y,z) = axyz + cz^3 + K$$

Entonces las condiciones que deben cumplir a, b y c son:

$$a = -2b = 3c$$

b) Determine una función potencial para F en el caso $a = 2$.
Solución:

Si $a = 2$, y descartando K, se obtiene:

$$f(x,y,z) = 2xyz + \frac{2}{3}z^3$$