Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2018

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 3

1. Sea $\boldsymbol{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Si $\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^p}$, determine el o los valores de p para los cuales div $\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = 0$.

   Solución.

$$\text{div } F = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\|\mathbf{r}\|^p} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\|\mathbf{r}\|^p} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\|\mathbf{r}\|^p} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\frac{\mathrm{x}}{\|\mathbf{r}\|^{\mathrm{p}}} = \frac{\|\mathbf{r}\|^{\mathrm{p}} - \mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\|\mathbf{r}\|^{\mathrm{p}}}{\|\mathbf{r}\|^{2\mathrm{p}}}$$

   Se tiene que $\dfrac{\partial}{\partial\, x}\|\mathbf{r}\| = \dfrac{\mathbf{r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$

   Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial\, x}\frac{x}{\|\mathbf{r}\|^p} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^p} - \frac{px^2}{\|\mathbf{r}\|^{p+2}}$$

   Análogamente

$$\frac{\partial}{\partial\, y}\frac{y}{\|\mathbf{r}\|^p} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^p} - \frac{py^2}{\|\mathbf{r}\|^{p+2}} \qquad \frac{\partial}{\partial\, z}\frac{z}{\|\mathbf{r}\|^p} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^p} - \frac{pz^2}{\|\mathbf{r}\|^{p+2}}$$

   Entonces div $F = \dfrac{3-p}{\|\mathbf{r}\|^p}$, luego div $F = 0$ solo si $p = 3$

Puntaje Pregunta 1.

- Sabe lo que es la divergencia **1 punto**
- Calcula correctamente las derivadas parciales **2 puntos**(puede calcular 1 y por analogía obtener las otras)
- Calcula correctamente la divergencia **2 puntos**
- Determina que para $p = 3,$ div $F = 0$ **1 punto**

2. Encontrar la coordenada $\overline{y}$ del centro de masa de una lámina que tiene la forma del cono $y^2 = x^2 + z^2$ entre los planos $y = 1$ e $y = 4$, si su densidad de masa es proporcional a la distancia al eje y.

   Solución. La superficie está parametrizada por $\phi(\theta, y) = (y\cos(\theta),\ y,\ y\,\mathrm{sen}(\theta))$

$$\frac{\partial\,\phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\,\phi}{\partial y} = -(y\cos(\theta),\ y,\ y\,\mathrm{sen}(\theta))$$

   La masa M está dada por

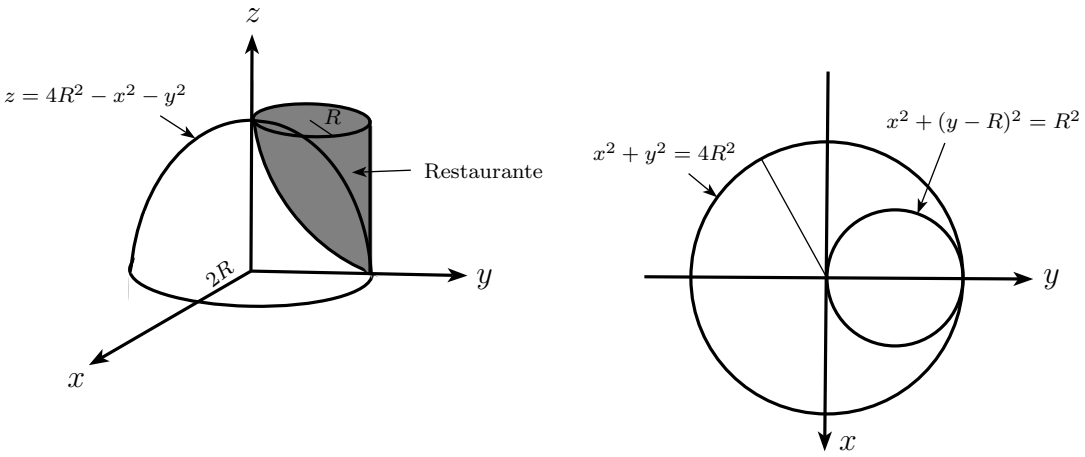
$$M = \iint_S ky dS = \int_1^4 \int_0^{2\pi} ky\sqrt{2y^2}dy\ d\theta = 42\sqrt{2}k\pi$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\iint_S ky^2\ dS = \frac{1}{M}\int_1^4 \int_0^{2\pi} ky^3\sqrt{2}dy\ d\theta = \frac{85}{28}$$

Puntaje Pregunta 2.

- Parametriza correctamente la superficie **2 puntos**
- Calcula correctamente M **2 puntos**
- Calcula correctamente $\overline{y}$ **2 puntos**

3. Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran en la figura



Durante un típico día de verano los alrededores del restaurante están sujetos a un campo de temperatura dado por

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2 \, .$$

Una densidad de flujo de calor $V = -k\nabla T$ (k es una constante que depende del grado de aislamiento a usarse) a través de todos los lados del restaurante (incluyendo el techo y sin incluir el contacto con la ladera) produce un flujo de calor. ¿Cuál es el flujo total de calor hacia afuera?

Solución. El flujo F estạdo por

$$F = \iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

con $\mathbf{V} = -k(6x, 2(y - R), 32z)$, S_1 el techo y S_2 la superficie parametrizada por

$$\phi(\theta, z) = (R\cos(\theta), R + R\,\mathrm{sen}(\theta), z) \qquad 0 \leqslant \theta \leq 2\pi, \quad 2R^2(1 - \mathrm{sen}(\theta)) \leq z \leq (2R)^2$$

con esta parametrización se obtiene la orientación pedida.
El techo del restaurante está altura $z = 4R^2$ entonces

$$\iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \, d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \hat{k} dS = -k \iint_{S_1} 128 \cdot R^2 \, dS = -128kR^2(\pi R^2) = -128k\pi R^4 \, .$$

Ahora bien, el flujo del restaurante en la parte cilindrica es

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_{2R^2(1-\text{sen}(\theta))}^{(2R)^2} -k(6R\cos(\theta), 2R\,\text{sen}(\theta), 32z) \cdot (\phi_\theta \times \phi_z)\, dzd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{2R^2(1-\text{sen}(\theta))}^{(2R)^2} -k(6R\cos(\theta), 2R\,\text{sen}(\theta), 32z) \cdot (R\cos(\theta), R\,\text{sen}(\theta), 0) dzd\theta \\
&= -k\int_0^{2\pi} (6R^2\cos^2\theta + 2R^2\,\text{sen}^2\,\theta)(4R^2 - 2R^2(1-\text{sen}\,\theta))d\theta \\
&= -k\int_0^{2\pi} (6R^2\cos^2\theta + 2R^2\,\text{sen}^2\,\theta)(2R^2 + 2R^2\,\text{sen}\,\theta)d\theta \\
&= -k\int_0^{2\pi} (12R^4\cos^2\theta + 4R^4\,\text{sen}^2\,\theta + 12R^4\cos^2\text{sen}\,\theta + 4R^4\,\text{sen}\,\theta(1-\cos^2\theta))d\theta \\
&= -16k\pi R^4
\end{aligned}$$

Por lo tanto $F = -144k\pi R^4$.

Puntaje Pregunta 3.

- Sabe tranformar una integral de superficie en una integral doble **1 punto**
- Calcula correctamente el flujo a traves de S_1 **2 puntos**(-1 punto si la orientación no corresponde)
- Parametriza correctamente S_2 con la orientación pedida **1 punto**
- Calcula correctamente $(\phi_\theta \times \phi_z)$ **1 punto**
- Calcula correctamente el flujo a traves de S_2 **1 punto**

4. Sea $\mathcal{S}$ la parte del plano $z = 4 + x + y$ que se ubica dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   a) Calcule $\iint_S f(x, y, z)\, dS$, donde $f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z$.

   b) Calcule $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, donde $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, donde la superficie $\mathcal{S}$ tiene orientación hacia arriba.

Solución. Una parametrización de S es

$$\phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), 4 + r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta)) \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2.$$

El vector normal a S con la orientación pedida es $(-1, -1, 1)$

$$\frac{\partial\,\phi}{\partial\, r} \times \frac{\partial\,\phi}{\partial\,\theta} = (-r, -r, r)$$

a)

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2(4 + r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta))\sqrt{3}r\; d\theta dr = 2\pi \int_0^2 4\sqrt{3}r^3\; dr = 32\sqrt{3}\pi\,.$$

b)

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2\cos^2(\theta), r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta), 4 + r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta)) \cdot (-r, -r, r)\; d\theta\, d\, r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-r^3\cos^2\theta - r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 4r + r^2\cos\theta + r^2\,\mathrm{sen}\,\theta) d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^2 \left(-\frac{r^3}{2} + 4r\right) dr = 12\pi
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 4.

- Parametriza correctamente S con la orientación pedida **2 puntos**
- Calcula correctamente la primera integral **2 puntos**
- Calcula correctamente la segunda integral **2 puntos**