FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Examen
MAT1630 - Cálculo III

1. Sea K la superficie del cubo con vértices en $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ y sea

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\langle x,y,z\rangle.$$

Calcule

$$\iint_K \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Solución: El campo vectorial es $\vec{F}(x,y,z) = \frac{\langle x,y,z\rangle}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.

- **Paso A (20 puntos):** Calcular la divergencia de $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F} &= \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

Calculando una componente (las demás son similares) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) &= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}\\ &= \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.\end{aligned}$$

Sumando las tres componentes:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F} &= \frac{y^2+z^2-2x^2+x^2+z^2-2y^2+x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\ &= \frac{0}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\ &= 0 \quad \text{para } (x,y,z)\neq(0,0,0).\end{aligned}$$

La divergencia es cero en todo punto excepto en el origen.

- **Paso B (20 puntos):** Aplicar el teorema de Gauss. El cubo encierra el origen, donde $\vec{F}$ tiene una singularidad. Si consideramos el sólido ubicado entre el cubo y una esfera (por dentro o por fuera del cubo), el flujo a través de la esfera es el mismo es el mismo que a través del cubo. Para una esfera de radio R centrada en el origen:

$$\iint_{S_R} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_R} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}dS = \iint_{S_R} \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^4}dS = \iint_{S_R} \frac{1}{R^2}dS = \frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi.$$

- **Paso C (20 puntos):** Concluir que el flujo a través del cubo es 4π.

$$\boxed{4\pi}$$

2. Sea P la parte del paraboloide $z = x^2+y^2$ acotada por el plano $2x+z=3$ y sea

$$\vec{F}(x,y,z) = \langle 2xy+yz, x^2+y^2, 2x+z\rangle.$$

Considerando P orientada hacia afuera, calcule

$$\iint_P \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Solución: Usamos el teorema de Stokes: $\iint_P \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint_{\partial P}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde ∂P es la curva de intersección entre el paraboloide y el plano.

- **Paso A (15 puntos):** Identificar la curva de intersección ∂P. Resolver:

$$z = x^2+y^2, \quad 2x+z=3 \implies 2x+x^2+y^2=3 \implies x^2+2x+y^2=3 \implies (x+1)^2+y^2=4.$$

La curva está en el plano $z=3-2x$ y su proyección en el plano xy es una circunferencia con centro en $(-1,0)$ y radio 2.

- **Paso B (15 puntos):** Parametrizar ∂P. La orientación más natural, pero opuesta a la que se necesita, es:

$$x = -1+2\cos(t), \quad y = 2\sin(t), \quad z = 3-2(-1+2\cos(t)) = 5-4\cos(t), \quad t\in[0,2\pi].$$

El vector tangente es:

$$\vec{r}'(t) = \langle -2\sin(t), 2\cos(t), 4\sin(t)\rangle.$$

Observación: Como la superficie está orientada hacia abajo, la curva debe estar orientada en sentido horario (negativo) vista desde arriba.

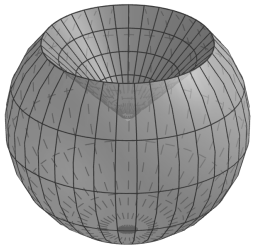
- **Paso C (15 puntos):** Evaluar $\vec{F}$ en la curva:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) = \langle & 2(2\cos(t)-1)(2\sin(t)) + (2\sin(t))(5-4\cos(t)),\\ & (-1+2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2,\\ & 2(-1+2\cos(t)) + 5 - 4\cos(t)\rangle\\ & = \langle 6\sin(t), 5-4\cos(t), 3\rangle.\end{aligned}$$

- **Paso D (15 puntos):** Calcular la integral de línea, considerando el signo por la orientación:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial P} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= -\int_0^{2\pi} \vec{F}\cdot\vec{r}\,'(t)dt\\ &= -\int_0^{2\pi} \left[(6\sin(t))(-2\sin(t)) + (5-4\cos(t))(2\cos(t)) + 3(4\sin(t))\right] dt\\ &= -\int_0^{2\pi} \left[-12\sin^2(t) + 10\cos(t) - 8\cos^2(t) + 12\sin(t)\right] dt\\ &= -\int_0^{2\pi} \left[-8 - 4\sin^2(t) + 10\cos(t) + 12\sin(t)\right] dt\\ &= -\int_0^{2\pi} \left[-10 + 2\cos(2t) + 10\cos(t) + 12\sin(t)\right] dt\\ &= 10t - \sin(2t) - 10\sin(t) + 12\cos(t)\big|_0^{2\pi} = 20\pi.\end{aligned}$$

3. Considere la superficie S del sólido limitado por la esfera de radio 2 centrada en el origen y el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2}$.



Calcule

$$\iint_S z\ dS$$

Solución: La superficie S del sólido limitado por la esfera de radio 2 centrada en el origen ($x^2+y^2+z^2=4$) y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ consta de dos partes: - S_1: la parte de la superficie esférica donde $z < \sqrt{x^2+y^2}$ (es decir, la esfera excluyendo el casquete superior removido por el agujero cónico). - S_2: la superficie cónica del agujero, dada por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con $0 \le x^2+y^2 \le 2$.

La integral $\iint_S z dS$ se calcula sumando las integrales sobre S_1 y S_2.

*** Cálculo sobre S_1 (superficie esférica)

** Paso A (10 puntos): Parametrización en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = (2\sin\varphi\cos\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 2\cos\varphi), \quad \theta\in[0,2\pi], \quad \varphi\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right].$$

y $dS = |r_\varphi \times r_\theta| = 4\sin\varphi\ d\varphi\ d\theta$.

** Paso B (10 puntos): Escribir la integral iterada con límites de integración correctos:

$$\iint_{S_1} z dS = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} (2\cos\varphi)(4\sin\varphi)\ d\varphi\ d\theta$$

** Paso C (10 puntos): Cálculo de la integral:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi} 8\cos\varphi\sin\varphi\ d\varphi &= 8\cdot\frac{1}{2}\left[\sin^2\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi}\\ &= 4\left(\sin^2\pi-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 4\left(0-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\\ &= 4\left(0-\frac{1}{2}\right)=-2.\end{aligned}$$

Luego:

$$\int_0^{2\pi}(-2)\ d\theta = -2\cdot 2\pi = -4\pi.$$

*** Cálculo sobre S_2 (superficie cónica)

** Paso D (10 puntos) Parametrización en coordenadas cilíndricas (también se puede resolver en coordenadas esféricas):

$$\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, r),\quad \theta\in[0,2\pi],\quad r\in[0,\sqrt{2}].$$

$$\begin{aligned}dS &= \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\\ &= \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy\\ &= \sqrt{1+1}dxdy=\sqrt{2}dxdy.\end{aligned}$$

En coordenadas polares, $dxdy = rdr\ d\theta$, así que $dS=\sqrt{2}rdr\ d\theta$.

** Paso E (10 puntos): Escribir la integral iterada con límites de integración correctos:

$$\iint_{S_2} z dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\cdot\sqrt{2}rdr\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2}r^2dr.$$

** Paso F (10 puntos): Cálculo de la integral:

$$\int_0^{\sqrt{2}} r^2dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Luego:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\, d\theta = \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{3}.$$

Finalmente

$$\iint_S z\, dS = -4\pi + \frac{8\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$$

*** Alternativa para álculo sobre S_2 (superficie cónica)

** Paso D (10 puntos) Parametrización en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \sin(\varphi)\cos(\theta), \rho \sin(\varphi)\sin(\theta), r), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \rho \in [0, 2].$$

$$dS = |r_\rho \times r_\theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\, d\rho\, d\theta$$

** Paso E (10 puntos): Escribir la integral iterada con límites de integración correctos:

$$\iint_{S_2} z dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \cdot \frac{\sqrt{2}2}{\cdot} \frac{\sqrt{2}2}{\rho}\, d\rho\, d\theta.$$

** Paso F (10 puntos): Cálculo de la integral:

$$\int_0^2 \frac{\rho^2}{2} d\rho = \left[\frac{\rho^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Luego:

$$\int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\, d\theta = \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{3}.$$

4. Calcule la longitud de la porción de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ que se encuentra dentro de la circunferencia $r = \frac{1}{2}$.

Solución: **Paso A (10 puntos):** Hallar los puntos de intersección:

$$1 - \cos(\theta) = \frac{1}{2} \implies \cos(\theta) = \frac{1}{2} \implies \theta = \pm\frac{\pi}{3} \quad (\text{en } [0, 2\pi)).$$

La cardioide está dentro del círculo para $|\theta| \leq \pi/3$.

- **Paso B (20 puntos):** Fórmula de longitud de arco en polares:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta, \quad r = 1 - \cos(\theta), \quad \frac{dr}{d\theta} = \sin(\theta).$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = 1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 2 - 2\cos(\theta).$$

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \quad \text{(usando } 1-\cos(\theta) = 2\sin^2(\theta/2)\text{)}.$$

- **Paso C (20 puntos):** Simplificar la integral. Para $\theta \in [-\pi/3, \pi/3]$, $\theta/2 \in [-\pi/6, \pi/6]$, donde $\sin(\theta/2)$ cambia de signo, pero $|\sin(\theta/2)|$ es par:

$$L = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \, d\theta = 4\int_0^{\pi/3} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \, d\theta \quad \text{(por simetría)}.$$

- **Paso D (10 puntos):** Calcular la integral:

$$\int_0^{\pi/3} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \, d\theta = \left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi/3} = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos(0) = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot 1 = 2 - \sqrt{3}.$$

$$L = 4(2-\sqrt{3}) = \boxed{8 - 4\sqrt{3}}.$$

Instrucciones:

- Cada pregunta vale 60 puntos.
- Justifique cada paso en las demostraciones.
- Duración: 120 minutos.