Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 4

Frenet-Serret

1. Problemas

Problema 1

Demuestre las fórmulas de Frenet-Serret

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N$$
$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B$$
$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

Problema 2

Sea α : [a,b] $\to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco. Se define la curva

$$\beta(t) = \int_a^t T(s) \times T'(s) ds$$

Calcule κ y τ

Problema 3

Una curva arcoparametrizada tiene una torsión τ y curvatura κ. Muestre que

$$|\frac{dT}{ds} \times \frac{d^2T}{ds^2}| = \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

Problema 4

Considere una curva contenida en el plano $z = \sqrt{3}x$ con $r(s)$ su arcoparametrización y con vector normal $N(s)$ dado por

$$N(s) = (-\frac{1}{2}cos(s), -sen(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}cos(s))$$

Pruebe que la curva está contenida en un círculo de radio 1

Problema 5

Demuestre que la curvatura de una curva cumple con

$$\kappa'(s)^2 = \kappa(s)^2\tau^2(\kappa(s)^2 - 1)$$

Sí y solo sí la el gráfico de la curva se encuentra sobre la esfera unitaria.

Hint: Recuerde que la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ es

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|B|} \cdot \vec{B}$$