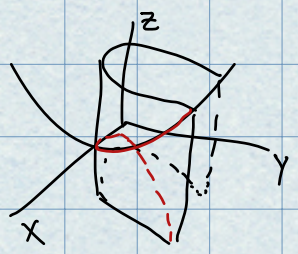
Solución

P11

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = \frac{2}{3}xy \end{cases}$$



Es directo que $x(t) = t \Rightarrow y(t) = t^2$

$$\Rightarrow z = \frac{2}{3} t \cdot t^2 = \frac{2}{3}t^3$$

La parametrización de la intersección es

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = \frac{2}{3}t^3 \end{cases} \quad / \quad t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow r(t) = \left\langle t, t^2, \frac{2}{3}t^3 \right\rangle$$

Longitud de curva

$$r'(t) = \langle 1, 2t, 2t^2 \rangle$$

$$|r'(t)| = \sqrt{1 + (2t)^2 + (2t^2)^2} = 2t^2 + 1$$

→ Busco que t me da $(1, 1, 2/3)$

Desde $(0,0,0)$ A $(1, 1, \frac{2}{3}) \Rightarrow T=0$ A $\left.\begin{matrix} T=1 \\ T^2=1 \\ \frac{2}{3}T^3=2/3 \end{matrix}\right\} T=1$

$$L = \int_0^1 2t^2 + 1 \, dT \quad \Rightarrow L = \frac{2}{3}T^3 + T \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow L = 5/3$$

PARA ARCOPARAMETRIZAR

$$S(T) = \int_0^T 2\tau^2 + 1 \, d\tau \quad \Rightarrow S(T) = \frac{2}{3}\tau^3 + \tau \Big|_0^T$$

$$\Rightarrow S(T) = \frac{2}{3}T^3 + T$$

Como es MAL DE DESPEJAR T, DECIMOS QUE

$$T = \varphi(S) \text{ , DONDE } \varphi(S) = S^{-1}(T).$$

∴ LA ARCOPARAMETRIZACIÓN QUEDA

$$\begin{cases} X(\varphi(S)) = \varphi(S) \\ Y(\varphi(S)) = \varphi(S)^2 \\ Z(\varphi(S)) = \frac{2}{3}\varphi(S)^3 \end{cases} , \quad S \in [0, 5/3]$$

→ Valor de la longitud de arco hasta $T=1$

//

P2

$$f(s) = \left\langle 4\cos\frac{s}{4}, 4\sin\frac{s}{4} \right\rangle$$

$$f'(s) = \left\langle -\sin\frac{s}{4}, \cos\frac{s}{4} \right\rangle$$

$$f''(s) = \left\langle -\frac{1}{4}\cos\frac{s}{4}, -\frac{1}{4}\sin\frac{s}{4} \right\rangle$$

$$\left\langle -\sin\frac{s}{4}, \cos\frac{s}{4} \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{4}\cos\frac{s}{4}, -\frac{1}{4}\sin\frac{s}{4} \right\rangle$$

$$\frac{\sin\frac{s}{4}\cos\frac{s}{4}}{4} - \frac{\sin\frac{s}{4}\cos\frac{s}{4}}{4} = 0$$

$$\therefore f''(s) \perp f'(s)$$

"Devolviendo" la Arcoparametrización

$$T = \frac{s}{4} \Rightarrow s = 4T$$

Reemplazando en $f(s)$

$$f(4T) = \left\langle 4\cos\frac{4T}{4}, 4\sin\frac{4T}{4} \right\rangle = \langle 4\cos T, 4\sin T \rangle$$

Es la parametrización de una circunferencia de radio 4.

PARA TANGENTES VERTICALES O HORIZONTALES

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dT} \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dy}{dT}}{\frac{dx}{dT}}$$

$\therefore$ PARA TANGENTES VERTICALES $\frac{dx}{dT} = 0$

Y PARA TANGENTES HORIZONTALES $\frac{dy}{dT} = 0$

ENTONCES, $r'(T) = \langle -r\operatorname{Sen}T, r\operatorname{Cos}T \rangle$

$\frac{dx}{dT} = 0 \Rightarrow -r\operatorname{Sen}T = 0 \Rightarrow T = 0 \wedge T = \pi$

$\frac{dy}{dT} = 0 \Rightarrow r\operatorname{Cos}T = 0 \Rightarrow T = \pi/2 \wedge T = \frac{3\pi}{2}$

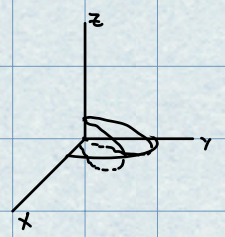
$\therefore$ HAY 2 TANGENTES VERTICALES EN $r(0) = \langle r, 0 \rangle \wedge r(\pi) = \langle -r, 0 \rangle$

Y HAY 2 // HORIZONTALES EN $r(\pi/2) = \langle 0, r \rangle \wedge r(3\pi/2) = \langle 0, -r \rangle$

P3)

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \quad \cap \quad x^2 + z^2 = 1$$

con $y \geq 0$



Parametrizando el cilindro

$$x = \cos t \qquad z = \operatorname{sen} t$$

reemplazando en el semielipsoide

$$\cos^2 t + y^2 + 4\operatorname{sen}^2 t = 4 \Rightarrow y^2 = 4(1 - \operatorname{sen}^2 t) - \cos^2 t$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3\cos^2 t}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ z(t) = \operatorname{sen} t \\ y(t) = \sqrt{3\cos^2 t} \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$r(t) = \langle \cos t, \sqrt{3\cos^2 t}, \operatorname{sen} t \rangle$$

$$r(t) = \langle 1/\sqrt{2}, \sqrt{3/2}, 1/\sqrt{2} \rangle \Rightarrow t = \pi/4$$

$$r'(t) = \left\langle -\operatorname{sen} t, -\sqrt{3}\frac{2\cos t \operatorname{sen} t}{2\sqrt{\cos^2 t}}, \cos t \right\rangle$$

$$r'(\pi/4) = \left\langle -1/\sqrt{2}, \sqrt{3}/2, 1/\sqrt{2} \right\rangle$$

PARA ACELERACIÓN, $r''(\pi/4)$

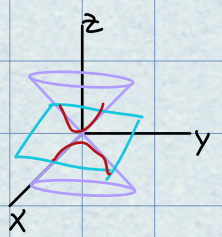
EC. PARAMETRICA RECTA TANGENTE en $\left\langle 1/\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1/\sqrt{2} \right\rangle$

$$r(t) = r(t_0) + t\, r'(t_0)$$

$$r(t) = \left\langle 1/\sqrt{2}, \sqrt{3/2}, 1/\sqrt{2} \right\rangle + t \left\langle -1/\sqrt{2}, \sqrt{3/2}, 1/\sqrt{2} \right\rangle$$

P4)

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = x^2 \\ z + x = 2 \end{cases}$$



SUELE SER DIFICIL PARAMETRIZAR CONO Y PLANO, POR LO QUE SE ASUMIRÁ UNA PARAMETRIZACIÓN CON UNA FUNCIÓN AUXILIAR >0 Y LUEGO SE DESPEJARÁ LA FUNCIÓN

De la 1ra ec. $\rightarrow$ $X^2 + Z^2 = Y^2$

Como tiene pinta de circunferencia se hace

$$X(T) = \varphi(T)\cos T \quad \wedge \quad Z(T) = \varphi(T)\operatorname{Sen} T$$

Reemplazando

$$(\varphi(T)\cos T)^2 + (\varphi(T)\operatorname{Sen} T)^2 = Y^2$$

$$\Rightarrow \varphi(T) = Y$$

Ahora, de la 2da ecuación se tiene

$$\varphi(T)\cos T + \varphi(T)\operatorname{Sen} T = 2$$

$$\Rightarrow \varphi(T) = \frac{2}{\cos T + \operatorname{Sen} T}$$

$\therefore$ la parametrización es:

$$F(T) \begin{cases} X(T) = \dfrac{2}{\cos T + \operatorname{Sen} T} \cdot \cos T \\ Y(T) = \dfrac{2}{\cos T + \operatorname{Sen} T} \end{cases}, \quad T \in [0, 2\pi]$$

$$z(T) = \frac{2}{\cos T + \operatorname{sen} T} \cdot \operatorname{sen} T$$

¿ PARA QUE $r(t) = (1, \sqrt{2}, 1)$?

ES DIRECTO VER QUE $T = \pi/4$ (REEMPLAZANDO)

AHORA,

$$r'(T) = \left\langle \frac{2}{(\cos T + \operatorname{sen} T)^2}, \frac{-8(\cos T - \operatorname{sen} T)}{(\cos T + \operatorname{sen} T)^2}, \frac{2}{(\cos T + \operatorname{sen} T)^2} \right\rangle$$

$$r'(\pi/4) = \langle -1, 0, 1 \rangle$$

↳ $\langle -1, 0, 1 \rangle \cdot \langle 1, 2, -1 \rangle = 0$

$$\| r'(\pi/4) \| = \sqrt{2}$$

$$\therefore T = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 0, 1 \rangle$$

PARA TANGENTE H. $\frac{dy}{dT} = 0$

$$\frac{-8(\cos t - \operatorname{sen} t)}{(\cos t + \operatorname{sen} t)^2} = 0 \quad \Rightarrow \cos t - \operatorname{sen} t = 0$$

$$\cos t = \operatorname{sen} t \quad \Rightarrow t = \pi/4 \quad \wedge \; t = \frac{5\pi}{4}$$

PARA TANGENTE V $\quad \frac{dx}{dt} = 0$

$$\frac{2}{(\cos t + \operatorname{sen} t)^2} = 0$$

NO HAY t QUE HAGA CERO LA EXPRESIÓN

SI QUIEREN, PUEDEN CALCULAR LA ECUACION DE LA RECTA TANGENTE EN EL PUNTO DEL VECTOR TANGENTE UNITARIO $\vec{U}$.

P5

Al ser una curva polar, la relación entre componentes rectangulares y polares es

$$X = r\cos\theta \quad \wedge \quad Y = r\operatorname{Sen}\theta$$

AQUÍ, $r = r(\theta)$

$$\Rightarrow X(\theta) = r(\theta)\cos\theta \quad \wedge \quad Y(\theta) = r(\theta)\operatorname{Sen}\theta$$

$$\vec{F}(\theta) = \langle r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\operatorname{Sen}\theta \rangle$$

$$\vec{F}'(\theta) = \langle r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{Sen}\theta,\ r'(\theta)\operatorname{Sen}\theta + r(\theta)\cos\theta \rangle$$

$$|\vec{F}'(\theta)| = \sqrt{(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{Sen}\theta)^2 + (r'(\theta)\operatorname{Sen}\theta + r(\theta)\cos\theta)^2}$$

$$|\vec{F}'(\theta)| = \sqrt{(r'\cos\theta)^2 - 2r'r\cos\theta\operatorname{Sen}\theta + (r\operatorname{Sen}\theta)^2 + (r'\operatorname{Sen}\theta)^2 + 2r'r\operatorname{Sen}\theta\cos\theta + (r\cos\theta)^2}$$

$$= \sqrt{r'^2(\cos^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta) + r^2(\cos^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta)}$$

$$= \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}$$

Por definición de longitud de Arco

$$L = \int_a^{\vec{r}} |r'(t)| \, dt$$

Reemplazando los valores

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} \, d\theta \quad //$$