Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
7 de Noviembre del 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Solución Interrogación 3

1. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas. Si S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, demuestre que

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = 0$$

siendo $\mathbf{N}$ la normal unitaria a S apuntando hacia afuera.

Solución. Sean $S_- : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con $z \leq 0$ y $S_+ : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con $z \geq 0$. Luego,

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_{S_-} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{S^+} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

Por el teorema de Stokes se tendrá que

$$\iint_{S_-} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = -\int_\Omega \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$
$$\iint_{S_+} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_\Omega \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

siendo Ω la circunferencia $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. Por lo tanto, $\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = 0$.

2. La superficie S está dada por la parte positiva de la función $f(t) = \sqrt{-t^2 + 3t - 2}$ girando alrededor del eje y.

   a) Determine las ecuaciones paramétricas de S.

   b) Calcule el área de S.

Solución

a) Una superficie de revolución se puede parametrizar como

$$x = f(t)\cos\theta, \qquad y = t, \qquad z = f(t)\,\text{sen}\,\theta.$$

La función $f(t)$ es positiva para $1 \leq t \leq 2$, entonces el dominio es $1 \leq t \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

b) El área está dada por

$$\begin{aligned}
A(S) &= 2\pi \int_1^2 f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}dt \\
&= 2\pi \int_1^2 \sqrt{-t^2+3t-2}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\frac{-2t+3}{\sqrt{-t^2+3t-2}}\right)^2}dt \\
&= 2\pi \int_1^2 \sqrt{-t^2+3t-2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{4t^2-12t+9}{-t^2+3t-2}}dt \\
&= 2\pi \int_1^2 \sqrt{-t^2+3t-2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(-t^2+3t-2)+(4t^2-12t+9)}{-t^2+3t-2}}dt \\
&= \pi \int_1^2 \sqrt{-t^2+3t-2}\sqrt{\frac{1}{-t^2+3t-2}}dt \\
&= \pi \int_1^2 1dt = \pi
\end{aligned}$$

3. La superficie S es la parte del cono $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ que se encuentra por arriba de la esfera de radio 2 y por debajo del plano $z = 2$. Calcule la masa total de la superficie S si su densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$.

Solución La intersección del cono y la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ es una circunferencia en el plano $z = \sqrt{3}$. Entonces, una parametrización de S es $\mathbf{r}(r, \theta) = (x, y, z)$ con

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = \sqrt{3}r$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $1 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. La masa de S está dado por

$$m(S) = \iint_S \rho(x, y, z)dS = \iint_D \rho(\mathbf{r}(r, \theta))|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|dA.$$

Tenemos

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & \sqrt{3} \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{array} \right\| = \sqrt{4r^2} = 2r$$

entonces

$$\begin{aligned}
m(S) &= \iint_S \rho(x,y,z)\, dS \\
&= \iint_D (r\cos(\theta))^2\, 2r\, dA \\
&= 2\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta dr \\
&= 2\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)) d\theta dr \\
&= \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r^3 \left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta))\right]_0^{2\pi} dr \\
&= \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r^3 2\pi dr \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{7}{18}\pi
\end{aligned}$$

4. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (2y, zy, 3z)$ a través de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ acotada en el primer octante por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$.

Solución: Una parametrización para la superficie cilíndrica es $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{\phi}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z)$$

donde $\Omega = \{(\theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\,,\ 0 \leqslant z \leqslant 5\}$. Los vectores tangentes a la superficie son

$$\begin{aligned}
\vec{\phi}_\theta(\theta, z) &= (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0) \\
\vec{\phi}_z(\theta, z) &= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

El vector normal a la superficie es:

$$\vec{\phi}_\theta \times \vec{\phi}_z = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)\,.$$

Entonces, el flujo de F a través de esta superficie es:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_\Omega \vec{F}(\vec{\phi}(\theta,z))\cdot(\vec{\phi}_\theta\times\vec{\phi}_z)dA \\
&= \iint_\Omega (4\operatorname{sen}\theta, 2z\operatorname{sen}\theta, 3z)\cdot(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)d\theta dz \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^5 4(\operatorname{sen}(2\theta)+z\operatorname{sen}^2\theta)dzd\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\left(5\operatorname{sen}(2\theta)+\frac{25}{2}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)\right)d\theta \\
&= 20\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2}+50\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 20+\frac{25}{2}\pi\,.
\end{aligned}$$

5. Calcular $\iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}$ siendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2+z^2}, zx, x^2e^{z^2y})$ y S la porción del elipsoide $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{12}=1$ fuera del cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de modo que las normales apuntan hacia afuera del elipsoide.

Solución:

En el elipsoide si $x^2+y^2=1, z^2=9$, por lo tanto S es la porción del elipsoide entre los planos $z=-3$ y $z=3$. La frontera de S orientada positiva es $\lambda_1+\lambda_2$, con $\lambda_1(t)=(\cos(t),-\operatorname{sen}(t),3),\ t\in[0,\ 2\pi]$ y $\lambda_2(t)=(\cos(t),\operatorname{sen}(t),-3),\ t\in[0,\ 2\pi]$. Por el Teorema de Stokes,

$$\iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \int_{\lambda_1}\overrightarrow{F}\cdot d\vec{\lambda}+\int_{\lambda_2}\overrightarrow{F}\cdot d\vec{\lambda}$$

Por lo tanto

$$\iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi}(\sqrt{10}, 3\cos(t), \cos^2(t)e^{-9\operatorname{sen}(t)})\cdot(-\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 0)dt$$

$$+\int_0^{2\pi}(\sqrt{10}, 3\cos(t), \cos^2(t)e^{9\operatorname{sen}(t)})\cdot(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)dt = -2\int_0^{2\pi}\sqrt{10}\operatorname{sen}(t)\,dt = 0$$