Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 14

Teorema de la divergencia

1. Resumen

Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con una orientación positiva y cerrada. Sea F un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces

$$\iint_S F \cdot \ dS = \iiint_E \nabla \cdot F dV$$

Este potente teorema, plantea que bajo las condiciones dadas, el flujo de F en el límite de la superficie es igual a la triple integral de la divergencia de F sobre E

Además, en muchos casos tendremos superficies que no son cerradas, por lo que tendremos que cerrarla a conveniencia tal cómo lo hacíamos con green.

Problema 1

Considere el campo $F(x,y,z) = (z\ tan^{-1}(y^2)\ , z^3\ ln(x^2+1),\ z)$. Calcule el flujo de F a través del paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que se sitúa encima del plano $z=1$ y está orientado hacia arriba.

Problema 2

Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4, 0 \leq z \leq a\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, z = a\}$ la superficie orientada según los vectores normales apuntando hacia el exterior. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_S F \cdot n\ dS = 10\pi$$

Donde $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ con n la normal apuntando hacia afuera

Problema 3

Calcule el flujo del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (2x^2y, xz^3, 4yz^2)$$

A través de la frontera formada por los planos $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ z=0\ z=3$

Problema 4

Sea S superficie que se obtiene al rotar la curva $r = cos(u), z = sin(2u)$, con $u \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, al rededor del eje Z. Utilice el teorema de la divergencia para encontrar el volumen de la región encerrada por S

Problema 5

La superficie S se obtiene al unir $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-2)^2 = 1, 2 \leq z \leq 3\}$ con $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$ orientada según los vectores normales apuntando al exterior de S. Calcular

$$\int_S F \cdot dS$$

donde $F(x,y,z) = (2x+y^2z, 3y-x^2, 4z-x)$