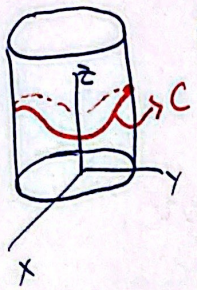
# P1

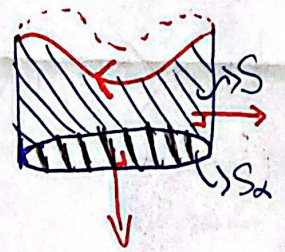



Sea $S$ es suave por tramos con la curva $C$ suave por tramos como borde y además, $\frac{\partial F}{\partial(\cdot)}$ son continuas en $S$.

$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 - z\operatorname{Sen}x & -\cos z\operatorname{Sen}y - x^3 & \operatorname{Sen}z\operatorname{Sen}y + \cos x \end{vmatrix} = \langle 0, 0, -3(x^2+y^2)\rangle$$

Ahora buscamos una superficie $S$ adecuada para $C$.




Podemos tomarla con 2 curvas frontera o cerrarla y despejar. Tomaré la segunda

$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S\cup S_2} \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$$ , parametrizando el plato y la porción de manto.

$\phi_S : \langle 2\cos\theta, 2\operatorname{Sen}\theta, e^{\operatorname{Sen}(\operatorname{Sen}^2 T)}\rangle$ y $\phi_{S_2} : \langle t\cos\theta, t\operatorname{Sen}\theta, 0\rangle$

↳ El vector normal es $n = \hat{r} = \langle R\cos\theta, R\operatorname{Sen}\theta, 0\rangle$ (apunta bien)

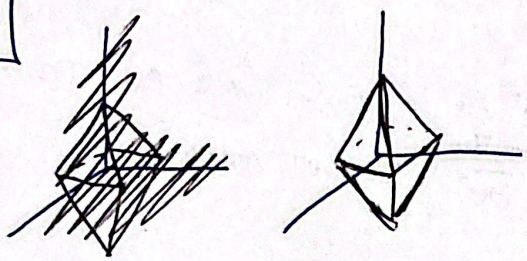
↳ El vector normal es $n = -\hat{k}$ (apuntando bien).

$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \langle 0,0,-3(2^2\cos^2\theta + 2^2\operatorname{Sen}^2\theta)\rangle\cdot\langle R\cos\theta, R\operatorname{Sen}\theta, 0\rangle\, ds + \iint_{S_2}\langle 0,0,-3(t^2\cos^2\theta + t^2\operatorname{Sen}^2\theta)\rangle\cdot(-\hat{k})\, ds$$

$\to 0$

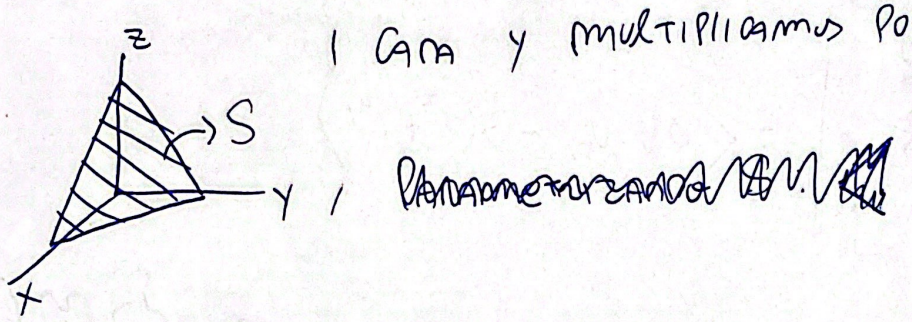
$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} 3t^2\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3t^2\cdot t\, dt\, d\theta \Rightarrow \boxed{\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 24\pi}$$

P2)



→ Bien dibujado en la ayudantía. ☺

PARTE LARGA: Como es simetrico, calculamos el Flujo por 1 cara y multiplicamos por 8.




y parametrizando

Tomando solo el 1er octante queda: $z = 1 - x - y$

y $\phi_S : \langle x, y, 1-x-y \rangle$

$\phi_{Sx} = \langle 1, 0, -1 \rangle \wedge \phi_{Sy} = \langle 0, 1, -1 \rangle \Rightarrow \phi_{Sx} \times \phi_{Sy} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

Entonces: $\iint_S \vec{F}(\phi) \cdot (\phi_x \times \phi_y) \, ds = \iint \langle x, y, 1-x-y \rangle \cdot \langle 1, 1, 1 \rangle \, ds$

$(1-x)$ → obtenido haciendo $z=0$ en $(z = 1-x-y)$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^1 \int_0^{1-x} x + y + 1 - x - y \, dy \, dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

∴ El Flujo total es $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

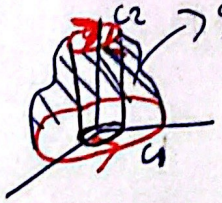
PARTE CORTA: Se tiene región $E$ sólida con frontera $S$ cerrada y $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ continua en $E$.

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot ds = \iiint_E \nabla \cdot F \, dV \Rightarrow \iint_S F \cdot ds = \iiint_E 3 \, dv = 3 \iiint_E dv \Rightarrow \text{Flujo} = 3 \cdot \text{Volumen } E.$$

$E$ es ~~una~~ dos pirámides de base cuadrada, entonces $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 1 = 4 \Rightarrow \text{Flujo} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ //

# P3)

Para usar Stokes debo aislar la singularidad en el eje z (elijo la elección)




$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times F \, dS = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Da lo mismo cual superficie sea, lo importante es aislar con una superficie (como en green) (con borde limpio)

Calculando $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \uparrow & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & e^{\operatorname{Sen}^2(z)} \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

Entonces usando Stokes

$$\iint_S \nabla \times F \, dS = \int_C F \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} F \cdot d\vec{r} \Rightarrow 0 = \int_C F \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} F \cdot d\vec{r} \Rightarrow -\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Entonces si $C_2$ es la circunferencia de radio 1, se parametriza como: $\phi_{C_2} : \langle \cos\theta, \operatorname{Sen}\theta, \text{Alguna altura} = \text{Numero} \rangle$, $\theta \, [2\pi, 0]$

$$\phi'_{C_2} : \langle -\operatorname{Sen}\theta, \cos\theta, 0 \rangle$$

$\Rightarrow$ [illegible] $\int_{C_2} F \cdot d\vec{r} = \int F(\phi_{C_2}) \cdot \phi'_{C_2} \, dr$

$$\Rightarrow \int_{2\pi}^{0} \langle -\operatorname{Sen}\theta, \cos\theta, e^{\operatorname{Sen}^2(\text{Alguna})} \rangle \cdot \langle -\operatorname{Sen}\theta, \cos\theta, 0 \rangle \, d\theta = \int_{2\pi}^{0} \operatorname{Sen}^2\theta + \cos^2\theta = \cdots = -2\pi$$

$$\therefore \int_C F \cdot d\vec{r} = -\int_{C_2} F \cdot d\vec{r} = -(-2\pi) = 2\pi \; //$$

P4)

UN CAMPO ~~ANTIGUO~~ ARBITRARIO QUE CUMPLA $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ Y $DIV(\nabla f)=0$ es: $f(x,y)=x+y$.

1) USANDO TEOREMA DIV. en 2D (Green)

$$\oint_{C_r} \nabla F \cdot ds = \iint_A DIV(\nabla f)\, dA \Rightarrow \oint_{C_r} \nabla f \cdot ds = \iint_A 0\, dA = 0 \quad //$$

2) El FLUJO en 2D está DADO POR

$$\oint_{C_r} \vec{\nabla F}\cdot\vec{ds} = \oint_{C_r} \nabla f(\phi)\cdot \hat{n}(\phi)\,|\phi'|\,dT$$

Como $C_r$ es la circunferencia centrada en $(0,0)$ con radio $r$:

$$\phi_{C_r}(T) = \langle r\cos T, r\sin T\rangle,\quad \phi'_{C_r}(T) = \langle -r\sin T, r\cos T\rangle \Rightarrow |\phi'(T)| = r$$

y su vector Normal es $\hat{n}=\langle x,y\rangle \Rightarrow \hat{n}(\phi(T)) = \langle \cos T, \sin T\rangle$

Reemplazando: $\oint_{C_r} \vec{\nabla F}\cdot\vec{ds} = \oint_{C_r} \nabla f(\phi(T))\cdot\langle \cos T, \sin T\rangle\, r\, dT$

↳ esto es $\langle 1,1\rangle$, ya que $\nabla f(x,y)=\langle 1,1\rangle$

$$= \oint_{C_r} (\cos T + \sin T)\, r\, dT$$

esto no es más que $\frac{\partial f(\phi)}{\partial r}$, ya que:

$$f(r\cos T, r\sin T) = r\cos T + r\sin T \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = \cos T + \sin T$$

Entonces: $\oint_{C_r} \nabla f \cdot ds = \oint_{C_r} \frac{\partial f}{\partial r}\, dT = r\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}\, dT.$

3) Recordando de 1) que $\oint_{C_r} \nabla f \cdot ds = 0$, vemos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}\, dT = 0$$

Ahora, usando el HINT, $\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}\, dT\, dr = 0$

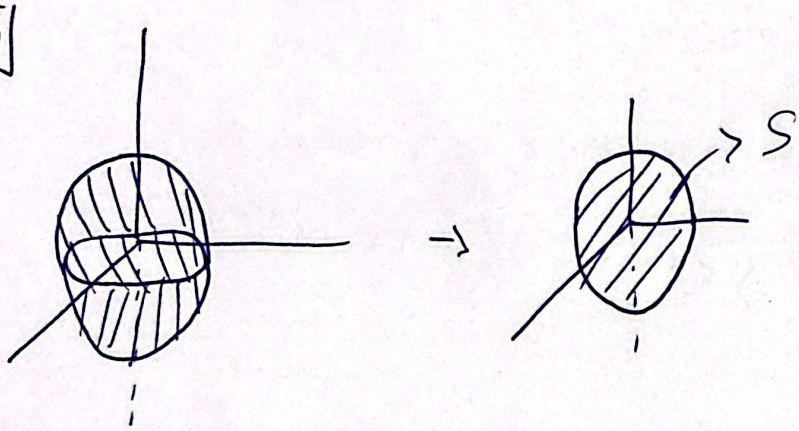
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\partial f}{\partial r}\, dr\, dT \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(R\cos T, R\sin T) - f(0,0)\, dT = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(R\cos T, R\sin T)\, dT - 2\pi f(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(R\cos T, R\sin T)\, dT = f(0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\cos T, R\sin T)\, dT$$

P5




Nota que S encierra una UNA región SÓLIDA E, donde las $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son continuas, Entonces usamos Teorema DIV.

$$\iint_S \nabla \times F \, dS = \iiint_E \text{DIV}(\nabla \times F) \, dV$$

Pero Sabemos que PARA TODO CAMPOVECTORIAL que provenga del rotor de otro, la DIVERGENCIA DE este es cero, entonces

$$\iint_S \nabla \times F \, dS = \iiint_E 0 \, dV = 0 \; //$$

## P6

Denotando $r = (x, y, z)$ y $|r| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

Se pide mostrar que:

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds = \begin{cases} 4\pi, & \text{si } \vec{0} \in \Omega \\ 0, & \text{si } \vec{0} \notin \Omega \end{cases}$$

Notar que $\vec{0}$ indefine el campo vectorial. Entonces, si $\vec{0} \notin \Omega$, entonces se tiene una región $\Omega$ donde $f$ tiene $\frac{\partial F}{\partial(\cdot)}$ continuas (clase $C^1$). Por lo tanto, por T. Divergencia

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{DIV}\left(\frac{r}{|r|^3}\right) dV$$

Ahora, $\operatorname{DIV}\left(\frac{r}{|r|^3}\right) = -\frac{3x^2}{|r|^5} - \frac{3y^2}{|r|^5} - \frac{3z^2}{|r|^5} + \frac{3}{|r|^3} \Rightarrow \operatorname{DIV}\left(\frac{r}{|r|^3}\right) = \frac{-3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 3(x^2+y^2+z^2)}{|r|^5} = 0$

$\therefore \iint_{\partial\Omega} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds = \iiint_{\Omega} 0 \, dV = 0.$

Ahora, si $\vec{0} \in \Omega$, tenemos una singularidad y hay que excepturarla.

Sea la esfera de radio $\varepsilon$ contenido a $\vec{0}$, se tiene una nueva región sin $\vec{0}$

$\Rightarrow$ por diversencia, $\iiint_E \operatorname{DIV}\left(\frac{r}{|r|^3}\right) dV = \iint_{\partial\Omega} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds - \iint_{\partial B} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds$

Por el resultado anterior se sabe que $\operatorname{DIV}\left(\frac{r}{|r|^3}\right) = 0$, entonces

$$\iint_{\partial B} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds = \iint_{\partial\Omega} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds \Rightarrow \iint_{\partial B} \frac{r}{|r|^3} \cdot n \, ds \Rightarrow \iint_{\partial B} \frac{r}{|r|^3} \cdot \frac{r}{|r|} ds = \iint_{\partial\Omega} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds \Rightarrow \iint_{\partial B} \frac{|r|^2}{|r|^4} ds = \iint_{\partial\Omega} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds$$

Y como $\partial B$ es la frontera de la esfera de radio $\varepsilon$, $|r|^2 = \varepsilon^2$ y $|r|^4 = \varepsilon^4 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B} ds$

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2}$ Área esfera radio $\varepsilon^2 = \frac{4\pi}{\varepsilon^2}\varepsilon^2$

$\therefore \iint_{\partial B} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds = \iint_{\partial \Omega} \frac{r}{|r|^3} \cdot ds = 4\pi$ //