PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
04 de Julio del 2022

MAT1630 - CÁLCULO III

EXAMEN

1. Considere una curva que se obtiene de intesectar la esfera de radio 1 y centrada en el origen con el plano $ax + by + cz = 0$.

   a) Calcule la torsión y vector binormal a la curva.

   b) Suponga que la curva se puede escribir como $(\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$. Encuentre una ecuación que relacione θ y ϕ. Concluya que si $c \neq 0$, entonces la curva se puede parametrizar utilizando θ como parámetro.

   c) Si $c = 0$, encuentre una parametrización en longitud de arco de la curva, el vector tangente unitario, el vector normal y la curvatura.

   Soución:

   Considere una curva que se obtiene de intesectar la esfera de radio 1 y centrada en el origen con el plano $ax + by + cz = 0$. Suponga que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

   a) Como la curva pertenece al plano $ax + by + cz = 0$ (pues esta en la interseccion), la curva es planar, tiene torsión 0 y su vector binormal es $\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

   b) Como la curva esta incluida en la esfera se puede parametrizar como $\gamma(\theta) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ donde θ y ϕ se relacionan a través de la relación implicita $(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta) = -c\cot\phi$. Si $c \neq 0$ se puede despejar ϕ de la relación anterior.

   c) Si $c = 0$, tenemos que $(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$ o equivalentemente $\theta = -\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ es constante. Por lo tanto, de la parte anterior, la curva esta parametrizada como $\gamma(\phi) = (\cos\bar{\theta}\sin\phi, \sin\bar{\theta}\sin\phi, \cos\phi)$, con $\bar{\theta} := -\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ fijo. Notemos que $\gamma' = (\cos\bar{\theta}\cos\phi, \sin\bar{\theta}\cos\phi, -\sin\phi)$ y $\|\gamma'(\phi)\| = 1$, es decir esta es una parametrización en longitud de arco. Por lo tanto

   $$\kappa\nu = -(\cos\bar{\theta}\sin\phi, \sin\bar{\theta}\sin\phi, \cos\phi).$$

   Concluimos que la curvatura $\kappa = 1$ y la normal unitaria $\nu = -(\cos\bar{\theta}\sin\phi, \sin\bar{\theta}\sin\phi, \cos\phi)$.

2. Sea $\mathcal{C}$ la curva parametrizada por $\gamma(t) = (t\cos(t), t\,\mathrm{sen}(t), t^2), t \in [0, \pi]$ y con la orientación dada por γ y sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial

   $$F(x, y, z) = (-y + \exp(x + z^2),\ x,\ 2z\exp(x + z^2))$$

   a) (2 pts) Encuentre dos campos vectoriales (no identicamente nulos) F_a, F_b tales que $F = F_a + F_b$ y que además cumplan que F_a es conservativo y que la expresión de F_b tiene menos términos que F.

   b) (4 pts) Calcule la integral de trabajo

   $$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$$

   Solución:

   a) Si consideramos $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $\phi(x, y, x) = \exp(x + z^2)$ entonces

   $$\nabla\phi = (\exp(x + z^2),\ 0,\ 2z\exp(x + z^2))$$

   luego, considerando $F_a := \nabla\phi$ y con $F_b := (-y, x, 0)$ tenemos que $F = F_a + F_b$, F_a es conservativo y F_b es más simple que F.

b) Como $F = F_a + F_b$ entonces

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} F_a \cdot dr + \int_{\mathcal{C}} F_b \cdot dr$$

y como $F_a = \nabla\phi$ es conservativo, tenemos

$$\int_{\mathcal{C}} F_a \cdot dr = \phi(\gamma(\pi)) - \phi(\gamma(0)).$$

Como $\gamma(\pi) = (-\pi, 0, \pi^2)$ y $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ entonces

$$\int_{\mathcal{C}} F_a \cdot dr = \exp(\pi^4 - \pi) - 1.$$

Por otro lado $dr/dt = (\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) + t\cos(t), 2t)$ mientra que $F_b(\gamma(t)) = (-t\,\mathrm{sen}(t), t\cos(t), 0)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} F_b \cdot dr &= \int_0^{\pi} F_b(\gamma(t)) \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_0^{\pi} -t\cos(t)\,\mathrm{sen}(t) + t^2\,\mathrm{sen}^2(t) + t\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) + t^2\cos(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^3}{3}.\end{aligned}$$

En resumen

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \exp(\pi^4 - \pi) - 1 + \frac{\pi^3}{3}.$$

3. Sea γ el cuadrilátero con vértices en $(3, -1)$, $(-3, -3)$, $(-2, 5)$ y $(4, 3)$ orientado en sentido horario y sea

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

Calcule $\int_\gamma F \cdot dr$.

Solución: Usaremos el teorema de Green. Escribimos $F = (P, Q)$. Primero, si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \\ &= \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, el campo se indefine en $(0, 0)$.

Sea D la región encerrada por γ, fuera de la circunferencia unitaria centrada en el origen. Llamemos c a esta circunferencia orientada positivamente. Luego, por el teorema de Green (recordando que γ está orientada en sentido horario),

$$-\int_\gamma F \cdot dr - \int_c F \cdot dr = \int_{-\gamma} F \cdot dr - \int_c F \cdot dr = \int\int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right) dA = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_\gamma F \cdot dr = -\int_c F \cdot dr.$$

Para calcular el lado derecho, parametrizamos c con la función vectorial

$$r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Luego, $r'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ y

$$\begin{aligned}\int_c F \cdot dr = 0 &= \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}, \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_\gamma F \cdot dr = -2\pi.$$

4. Considere el solido E ubicado en el semi-plano superior $z \geq 0$, encerrado por el paraboloide de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$ y la esfera centrada en el origen y de radio 1. Sea S la superficie delimitando al solido E, orientada positivamente. Usando el teorema de la divergencia, calcular el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ atravesando a S:

$$\iint_S F \cdot dS$$

Solución:

Denotemos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Observar que para todo $r \in [0, 1]$, $\sqrt{1 - r^2} \in [0, 1]$. El solido E esta delimitado por:

- la esfera en su parte superior, o dicho de otro modo por el grafico de la función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definida sobre D,
- el paraboloide en su parte inferior, o dicho de otro modo por el grafico de la función $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, definida sobre D.

El campo vectorial F es de clase C^1 y div $F = \nabla \cdot F \equiv 3$ en todo punto del espacio $\mathbb{R}^3$. Ocupando el teorema de la divergencia y denotando por $\mathcal{V}(E)$ el volumen del solido E, se obtiene:

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot dS &= \iiint_E \nabla \cdot F\, dV = 3\mathcal{V}(E) \\ &= 3\mathcal{V}(E_1) - 3\mathcal{V}(E_2),\end{aligned}$$

donde

- $\mathcal{V}(E_1)$ denota el volumen del solido E_1 delimitado por el grafico de f y el plano $z = 0$ o sea

$$\mathcal{V}(E_1) = \frac{2\pi}{3},$$

- $\mathcal{V}(E_2)$ denota el volumen del solido E_2 delimitado por el grafico de g y el plano $z = 0$ o sea

$$\mathcal{V}(E_2) = \iint_D g(x, y)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

En resumen,

$$\iint_S F \cdot dS = \frac{\pi}{2}.$$