Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 12

Integrales de superficie de campos vectoriales

1. Resumen

Si S es una superficie suave y orientable dada en forma paramétrica por medio de una función vectorial $r(u, v)$, su orientación queda definida por el vector unitario normal n

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

Notar que la orientación opuesta $-n$ se obtiene invirtiendo el orden del producto cruz $r_u \times r_v = -r_v \times r_u$

La integral de superficie de un campo vectorial sobre S se calcula como

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_S F \cdot n dS = \int\int_D F \cdot (r_u \times r_v) dA$$

También denominado flujo de F a través de S

Problema 1

Evalúe

$$\int\int_S F \cdot dS$$

Donde $F = (y, -z)$ y la superficie S consiste en el paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ y el disco $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$

Problema 2

Sea la parte del plano $z = 4 + x + y$ que se ubica dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

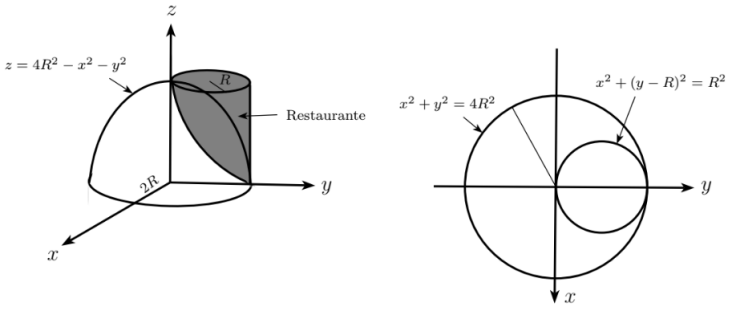
1. Calcule $\int\int_S f(x, y, z)dS$ con $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$
2. Calcule $\int\int_S F \cdot dS$ con $F(x, y, z) = (x2, xy, z)$, donde la superficie tiene orientación hacía arriba.

Problema 3

Calcule el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ a través de la porción del plano contenido en el interior del triángulo de vertices $(4, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$ y $(0, 0, 10)$, donde el flujo positivo es definido en la dirección positiva de OY.

Problema 4

Está construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran a continuación



Durante los días de verano, el campo de temperatura que rodea al restaurante está dado por

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$$

Además, una densidad de flujo de calor $V = -\kappa\nabla T$ produce un flujo de calor. ¿Cuál es el flujo total de calor hacia afuera?