

Longitud de Arco

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

4 de enero de 2023

Longitud de Arco

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$. La longitud de α está definida por

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt \, .$$

EJEMPLO 1 Determine la longitud de arco de una circunferencia de radio r.

EJEMPLO 2 Determine la longitud de arco de la hélice que está parametrizada por $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in [0, 4\pi]$.

Longitud de Arco

EJEMPLO 3 Calcule la longitud de arco de la Cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

Solución Observe la figura de la cicloide. Cuando el círculo rueda sin resbalar en un ángulo θ, el centro del círculo es movido a $(r\theta, r)$. Notemos que $b = r\sin\theta$ y $c = r\cos\theta$. Entonces la parametrización es $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(\theta) = (r\theta - r\sin\theta, r - r\cos\theta) = r(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta)$$

Tenemos que $\alpha'(\theta) = r(1 - \cos\theta, \sin\theta)$ y $\|\alpha'(\theta)\|^2 = 2r^2(1 - \cos\theta)$. Entonces, la longitud de arco de la cicloide correspondiente a una rotación completa del disco es

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(\theta)\| d\theta = \sqrt{2}r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta} d\theta \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} d\theta = 2r \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8r\,. \end{aligned}$$

Longitud de Arco

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 4 Determine la longitud de la cardioide $r = 1 + \sin\theta$.

Solución $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\sin\theta}\, d\theta.$

Longitud de Arco

Definición.

Dada una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ regular, definimos la función longitud de arco $s : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du \, .$$

Notemos que si la curva α es regular entonces $\dfrac{ds}{st} = \|\alpha'(t)\| > 0$ lo que implica que la función longitud de arco es una función creciente en el intervalo $[a, b]$. Se sigue entonces que la función longitud de arco de cualquier curva regular es una función invertible, es decir, existe $s^{-1} : [0, \ell] \to [a, b]$.

Longitud de Arco

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es llamada arco-parametrizada (o parametrizada por longitud de arco o de rapidez 1) si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Longitud de Arco

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema.

Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Considere la curva $\beta : [0, \ell] \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\beta(t) = \alpha(s^{-1}(t)) \, .$$

Entonces, β está arco-parametrizada.

Longitud de Arco

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 5 Determine la arco-parametrización de la hélice $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$.

Longitud de Arco

EJEMPLO 6 Parametrice por longitud de arco
$\lambda(t) = (e^{2t}\cos(2t), e^{2t}\sin(2t), 5), \quad t \geq 0.$

Solución Tenemos que

$$\lambda'(t) = (2e^{2t}\cos(2t) - 2e^{2t}\sin(2t), 2e^{2t}\sin(2t) + 2e^{2t}\cos(2t), 0)$$

Entonces, $\|\lambda'(t)\|^2 = 8e^{2t}$ y la función longitud de arco viene dada por

$$s(t) = \int_0^t \|\lambda'(u)\|\, du = 2\sqrt{2}\int_0^t e^{2u}\, du = \sqrt{2}(e^{2t} - 1)\,.$$

La inversa de la función longitud de arco es

$$s^{-1}(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1\right)\,.$$

Entonces, la parametrización por longitud de arco queda:

$$\lambda(s) = (\omega\cos(\ln(\omega)), \omega\sin(\ln(\omega)), 5)\,, \qquad s \geq 0$$

donde $\omega = s/\sqrt{2} + 1$.