PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
27 de abril de 2016.

MAT–1630 - CALCULO III
Interrogación N° 2

1. Encuentre una función $\phi(t)$, no no constante, de modo que la curva $\vec{r}(t) = (\cos\, t,\, \text{sen}\, t,\, \phi(t))$ sea plana.

   Solución : Recordemos que una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es plana si y sólo si su torsión $\tau(t) = 0$, para todo $t \in I$

   La torsión τ está dada por

   $$\tau(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

   Realizando los cálculo tenemos que

   $$\begin{aligned}
   \alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t, \phi'(t)) \\
   \alpha''(t) &= (-\cos t, -\sin t, \phi''(t) \\
   \alpha'''(t) &= (\sin t, -\cos t, \phi'''(t)) \\
   \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (\phi''(t)\cos t + \phi'(t)\sin t, \phi''(t)\sin t - \phi'(t)\cos t, 1) \\
   (\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t) &= \phi'(t) + \phi'''(t).
   \end{aligned}$$

   De esta manera α es plana si y sólo si $\phi'(t) + \phi'''(t) = 0$. Una función $\phi(t)$ que satisface lo anterior es de la forma $\phi(t) = a\sin t + b\cos t + c$, donde a, b, c son números reales arbitrarios. Finalmente, cualquier elección de a, b y c produce una función $\phi(t)$ de modo que la curva α es plana. Por ejemplo, $\phi(t) = \cos(t)$ o $\phi(t) = \text{sen}(t)$.

2. Sea $\gamma(s)$ una curva arcoparametrizada en $\mathbb{R}^3$. Suponga que la curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$ de la curva $\gamma(s)$ satisfacen la relación

$$\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)^2 = 1.$$

Si $N(s), B(s)$ denotan el vector normal y binormal unitarios de $\gamma(s)$, pruebe que la curva $p(s)$ dada por

$$p(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s) - \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)B$$

es constante y calcule el valor de $||\gamma(s) - p(0)||^2$.

Solución : Para probar que la curva $p(s)$ es constante calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{ds}(s) &= T(s) + \left(\frac{1}{k}\right)' N(s) + \frac{1}{k}\left(-kT(s) + \tau B(s)\right) - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)' B(s) - \frac{k'}{k^2\tau}\left(-\tau N(s)\right) \\
&= T(s)\left(1 - \frac{k}{k}\right) + N(s)\left(\frac{-k'}{k^2} + \frac{k'\tau}{k^2\tau}\right) + B(s)\left(\frac{\tau}{k} - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'\right) \\
&= B(s)\frac{k^2\tau}{2k'}\left(2\frac{k'}{k^3} - 2\frac{k'}{k^2\tau}\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'\right) \\
&= B(s)\frac{-k^2\tau}{2k'}\left(\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2\right)' \\
&= B(s)\frac{-k^2\tau}{2k'}(1)' = 0.
\end{aligned}$$

Luego la cruva $p(s) = p(0)$ es constante.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
||\gamma(s) - p(0)||^2 &= ||\gamma(s) - p(s)||^2 \\
&= ||\frac{1}{k}N - \frac{k'}{\tau k^2}B||^2 \\
&= \frac{1}{k^2}||N||^2 - 2\frac{k'}{\tau k^3}\langle N, B\rangle + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2 ||B||^2 \\
&= \frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas como:

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (xy + z^2, x^2y - y^2z),$$

$$g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v)) = (e^v, e^u).$$

Muestre que cerca del punto $(x, y, x, u, v) = (1, 1, 0, 0, 0)$ se puede resolver $f(x, y, z) - g(u, v) = (0, 0)$ para u y v como funciones de x, y, z y calcule , en dicho punto, u_x y v_y.

Solución : Definimos:

$$F(x, y, z, u, w) = f_1(x, y, z) - g_1(u, v) = xy + z^2 - e^v,$$

$$G(x, y, z, u, w) = f_2(x, y, z) - g_2(u, v) = x^2y - y^2z - e^u.$$

Queremos encontrar u, v en función de x, y, z tal que $F(x, y, z, u, w) = G(x, y, z, u, w) = 0$.

Para esto debemos verificar:

- Claramente $F(1, 1, 0, 0, 0) = G(1, 1, 0, 0, 0) = 0$.
- F y G son diferenciables cerca de $(1, 1, 0, 0, 0)$. Esto se justifica al ser suma y multiplicación de funciones diferenciables, o bien, verificando que todas sus derivadas parciales son continuas. Efectivamente,

$$F_x = y, \quad F_y = x, \quad F_z = 2z, \quad F_u = 0, \quad F_v = -e^v,$$

$$G_x = 2xy, \quad G_y = x^2 - 2yz, \quad G_z = -y^2, \quad G_u = -e^u, \quad G_v = 0.$$

- Finalmente, calculamos $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = -e^{u+v}$. Por lo tanto, obtenemos que

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(1, 1, 0, 0, 0) = -1 \neq 0.$$

Por Teorema de la función implícita, tenemos que existen ϕ_1, ϕ_2 funciones diferenciables tal que $u = \phi_1(x, y, z)$ y $v = \phi_2(x, y, z)$ en una vecindad de $(1, 1, 0, 0, 0)$.

También el Teorema de la función implícita nos dice que:

$$u_x(1, 1, 0, 0, 0) = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}(1, 1, 0, 0, 0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(1, 1, 0, 0, 0)} = \frac{2xy}{e^u}(1, 1, 0, 0, 0) = 2,$$

$$v_y(1, 1, 0, 0, 0) = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(1, 1, 0, 0, 0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(1, 1, 0, 0, 0)} = \frac{x}{e^v}(1, 1, 0, 0, 0) = 1.$$

4. Considere la función $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z, w) = \left(x^2 + yz, y(x + w), z(x + w), yz + w^2\right).$$

Demuestre que F es invertible en una vecindad del punto $P = (1, 0, 0, 1)$ y encuentre la matriz jacobiana de su inversa en el punto $F(P)$.

Solución : Primero calculamos la martiz jacobiana de F en el punto P, esto es

$$\begin{aligned} JF(P) &= \begin{pmatrix} 2x & z & y & 0 \\ y & x+w & 0 & y \\ z & 0 & x+w & z \\ 0 & z & y & 2w \end{pmatrix}(P) \\ &= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notar que $JF(P) = 2\mathrm{Id}_{4\times 4}$, que es invertible pues es una ponderación de la matriz identidad de 4×4 o bien su determinante es $\det(JF(P)) = 2^4 = 16 \neq 0$.
Luego por el teorema de la función inversa F es invertible en una vecindad del punto P.
Por otro lado la matriz jacobiana de F^{-1} en el punto $F(P) = (1, 0, 0, 1)$ es

$$\begin{aligned} JF^{-1}(F(P)) &= (JF)^{-1}(F(P)) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Si las ecuaciones $x + y^2 = u; \quad y + z^2 = v, \quad z + x^2 = w$ determinan a x, y, z como funciones dos veces diferenciables de (u, v, w), calcule $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ en el punto donde $x = y = z = 1;\ u = v = w = 2$.

Solución : Podemos escribir el sistema en la forma

$$\vec{0} \;=\; \vec{F}\,(x, y, z, v, v, w) \;=\; (\underbrace{x + y^2 - u}_{F_1},\ \underbrace{y + z^2 - v}_{F_2},\ \underbrace{z + x^2 - w}_{F_3}).$$

Por la Regla de Cramer,

$$\frac{\partial x}{\partial u} \;=\; -\,\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)/\partial(u, y, z)}{\partial(F_1, F_2, F_3)/\partial(x, y, z)}$$

donde

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 1 + 8xyz$$

y, análogamente,

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(u, y, z)} \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} -1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \;=\; -1.$$

De donde, $\dfrac{\partial x}{\partial u} \;=\; \dfrac{1}{1 + 8xyz}$.

Nota : Una forma alternativa de llegar al resultado anterior es derivar las identidades

$$x + y^2 - u \;=\; 0; \qquad y + z^2 - v \;=\; 0, \qquad z + x^2 - w \;=\; 0$$

con respecto a u teniendo en consideración que tanto x como y y z son funciones (implícitas) de u y luego, despejar del sistema obtenido, la incógnita $\frac{\partial x}{\partial u}$.

Ahora bien, derivando x_u nuevamente con respecto a u obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \;&=\; \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{1 + 8xyz}\right) \\ &=\; -\,\frac{1}{(1 + 8xyz)^2}\,(8x_u yz \;+\; 8xy_u z \;+\; 8xyz_u) \\ &=\; -\,\frac{8\,(x_u yz \;+\; xy_u z \;+\; xyz_u)}{(1 + 8xyz)^2} \end{aligned}$$

Tal como calculamos x_u tenemos que

$$y_u = -\frac{1}{1+8xyz}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1+8xyz}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4xz}{1+8xyz}$$

$$z_u = -\frac{1}{1+8xyz}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial u} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1+8xyz}\begin{vmatrix} 1 & 2y & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2x}{1+8xyz}$$

Por tanto, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{16x^2y - 8yz - 32x^2z^2}{(1+8xyz)^3} = -\dfrac{24}{9^3}$, en el punto dado.