Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
3 de abril de 2013

MAT1630 ⋆ Cálculo 3

Solución de la Interrogación # 1.

1. Estudie la existencia de los siguientes límites. Justifique su respuesta.

   a)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

   b)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

   Solución:

   a) Al hacer la sustitución $y^3 = mx$ se obtiene que, de existir el límite,
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2},$$
   luego el límite NO existe.

   b) Se tiene:
   $$0 \leq \Big| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \Big| \leq \frac{|x|x^2+|y|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|(x^2+y^2)+|y|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leq |x|+|y|,$$
   luego, como
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|+|y| = 0,$$
   por el Teorema del Sandwich
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

   Puede también usar coordenadas polares: Hacer la sustitución $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, ver que la expresión se reduce a $r(\cos^3\theta + \mathrm{sen}^3\,\theta)$, y usar usar el T. del Sandwich.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,1). \end{cases}$$

   a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

   b) Pruebe que f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

   Solución:

a) Usando las reglas del producto y cuociente para derivar se tiene que en todo punto distinto de $(0,1)$ f tiene ambas derivadas parciales y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2x(y-1)^2 + x^3)(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4}{(x^2+(y-1)^2)^{3/2}}.$$

Calculamos ahora las derivadas parciales en $(0,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,1)-f(0,1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{y\to 1} \frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{0}{y-1} = 0.$$

b) Las derivadas parciales calculadas en a) son continuas en cualquier punto $(x,y) \neq (0,1)$, luego f es diferenciable en esos puntos.
Veamos ahora la diferenciabilidad en $(0,1)$: Debemos ver si

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{f(x,y)-f(0,1)-0\cdot x - 0\cdot(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = 0.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{f(x,y)-f(0,1)-0\cdot x - 0\cdot(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\frac{x^2(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)}.\end{aligned}$$

Este último límite vale 0 por el Teorema del Sandwich:

$$0 \leq \left| \frac{x^2(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)} \right| \leq |x|.$$

Luego f es diferenciable en $(0,1)$.

3. Si $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^2 que satisfacen

$$u(x,y,z) = v(r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = v''(r) + \frac{2}{r}v'(r) \quad \forall r \neq 0.$$

Solución:

Se tiene por regla de la cadena:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},$$

luego,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v'(r)\frac{x}{r}.$$

Derivando una vez más, se tiene por la regla del producto

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(v'(r)\frac{x}{r}\Big) = \frac{\partial v'}{\partial x}\frac{x}{r} + v'(r)\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r} \\ \text{regla de la cadena y cuociente} &= v''(r)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{r} + v'(r)\frac{(r - x\frac{x}{r})}{r^2} \\ &= v''(r)\frac{x^2}{r^2} + v'(r)\frac{(r^2 - x^2)}{r^3}.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v''(r)\frac{y^2}{r^2} + v'(r)\frac{(r^2 - y^2)}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v''(r)\frac{z^2}{r^2} + v'(r)\frac{(r^2 - z^2)}{r^3},$$

luego sumando se obtiene

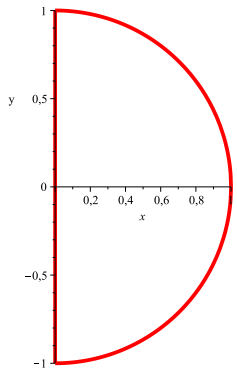
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= v''(r)\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{r^2} + v'(r)\frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} \\ &= v''(r)\frac{r^2}{r^2} + v'(r)\frac{3r^2 - r^2}{r^3} \\ &= v''(r) + \frac{2}{r}v'(r).\end{aligned}$$

4. Calcular los extremos globales (o absolutos) de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y + 5$ en la región

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}.$$

Solución:

La frontera de la región dada es una semi-circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con $x \geq 0$ y la porción del eje Y comprendida entre -1 y 1.



La semi-circunferencia se puede parametrizar por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ y la parte recta por $x = 0$, $y = t$, $t \in [-1, 1]$.

Para calcular los extremos globales de la función en esta región se calculan los puntos críticos de f en el interior de la región y los puntos críticos de f restringida a la frontera de la región. Los puntos críticos en el interior deben satisfacer $\nabla f = (0, 0)$, esto es

$$2x - \sqrt{3} = 0, \quad 2y - 1 = 0, \quad \text{es decir} \quad (x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}),$$

que no es un punto interior.

La función restringida a la frontera semi circular de $\mathcal{R}$ es

$$h(t) = 6 - \sqrt{3}\cos t - \operatorname{sen} t,$$

y sus puntos críticos están dados por $h'(t) = 0$, es decir

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} t - \cos t = 0, \quad \text{o lo que es equivalente, } \operatorname{sen}(t - \pi/6) = 0.$$

cuya única solución en $[-\pi/2, \pi/2]$ es $t = \pi/6$, lo que corresponde al punto $(\sqrt{3}/2, 1/2)$. También se deben analizar los puntos correspondientes a los extremos del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, es decir $(0, -1)$ y $(0, 1)$.

En la parte recta de la frontera f está dada por $f(0, t) = t^2 - t + 5$ y su único punto crítico interior es $t = 1/2$, que corresponde al punto $(0, 1/2)$.

Finalmente evaluamos la función en los puntos encontrados:

$$f(\sqrt{3}/2, 1/2) = 4, \quad f(0, -1) = 7, \quad f(0, 1) = 5, \quad f(0, 1/2) = \frac{19}{4}.$$

Concluímos que f alcanza tanto su máximo como su mínimo global en la frontera, en los puntos $(0, -1)$ y $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ respectivamente, con valores máximo 7 y mínimo 4.