Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo Semestre de 2024

Examen
Cálculo III - MAT 1630

1. Sea C la curva definida por la parametrización

$$r(t) = \langle \sqrt{3}\sqrt{t}, \sin\sqrt{t}, -\cos\sqrt{t} \rangle, 1 \leq t \leq 9.$$

   a) Encuentre la parametrización con respecto al parámetro de longitud de arco de C.

   b) Encuentre el largo de la curva C.

   c) Encuentre el vector tangente unitario en todo punto de C.

   d) Encuentre la curvatura de C en todo punto.

2. Considere la superficie S definida por la ecuación $4z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 10$.

   a) Encuentre el área de la superfice S.

   b) Escriba una ecuación para el plano tangente a S en el punto $(3, -4, 5/2)$.

3. Considere la curva C definida por la ecuación $x = 1 - y^2$ con $y \in [-1, 1]$. Calcule

$$\int_C (e^x \sin x + 2xy)\, dx + (y^2 + x^2) dy.$$

4. Considere la superficie S definida por la ecuación $x^2 + y^2 = z + 4$, con $z \leq 5$, y el campo $F = (yz,\ xz,\ z^2 e^z)$.

   a) Calcule el rotacional $\nabla \times F$.

   b) Calcule el flujo (de acuerdo a la normal exterior) del campo $\nabla \times F$ a través de la superficie S.

5. Considere un volumen V encerrado por una superficie S y el campo $F = (0, y, z)$.

a) Utilice el teorema de la divergencia para mostrar que

$$2\text{Vol}(V) = \iint_S F \cdot dS.$$

b) Suponga que se obtiene una superficie de rotar la curva $(x, f(x))$ con $x \in [a, b]$ alrededor del eje x. Muestre que el volumen encerrado por esta curva esta dado por

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

Examen
Cálculo III - MAT 1630

1. *a*) Por definición

$$s(t) = \int_1^t \|r'(u)\| du.$$

En este caso

$$r'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}(\sqrt{3}, \cos\sqrt{u}, \sin\sqrt{u}).$$

Por lo tanto

$$\|r'(u)\| = \sqrt{\frac{3+1}{4u}} = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Concluimos que

$$s(t) = 2(\sqrt{t}-1), \text{ y } r(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \sqrt{3}, \sin\left(\frac{s}{2}+1\right), -\cos\left(\frac{s}{2}+1\right)\right).$$

b) Esto es equivalente a $s(9) = 4$

c) Del calculo anterior tenemos que

$$T = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, \cos\sqrt{t}, \sin\sqrt{t}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}, \cos\left(\frac{s}{2}+1\right), \sin\left(\frac{s}{2}+1\right)\right).$$

d) Calculamos $\|\frac{dT}{ds}\|$:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{4}\left(0, -\sin\left(\frac{s}{2}+1\right), \cos\left(\frac{s}{2}+1\right)\right)$$

Por lo tanto, la curvatura es $\frac{1}{4}$ en todo punto.

2. Primero parametrizamos la superficie:

$$S(z,\theta) = (2z\cos\theta, 2z\sin\theta, z) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi),\ z \in [0, 10]].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} T_\theta &= (-2z\sin\theta, 2z\cos\theta, 0) \\ T_z &= (2\cos\theta, 2\sin\theta, 1) \\ T_\theta \times T_z &= (2z\cos\theta, 2z\sin\theta, -4z) \end{aligned}$$

a) El área esta dada por

$$\text{Area } = \int_0^{2\pi}\int_0^{10} \|T_\theta \times T_z\| dz d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{10} 2z\sqrt{1+4} dz d\theta = 100\sqrt{5}\times 2\pi.$$

b) Notemos que el punto corresponde a $z = 5/2$ y $\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ (alternativamente, se puede observar que $T_\theta \times T_z = (x, y, -4z)$).
El vector normal esta dado por $T_\theta \times T_z$ en ese punto, es decir $(3, -4, -10)$. Por lo tanto la ecuación esta dada por

$$(3, -4, -10) \cdot (x - 3, y + 4, z - 5/2) = 0.$$

Esto es,

$$3x - 4y - 10z = 25.$$

3. Queremos usar el teorema de Green para lo cual cerramos la región agregando la curva $L(y) = (0, y)$ con $y \in [-1, 1]$. Notamos que tiene la orientación opuesta a la deseada, por lo tanto el teorema de Green nos dice que si D es el dominio encerrado por $-L \cup C$ entonces

$$\begin{aligned}\int_C (e^x \sin x + 2xy)\, dx + (y^2 + x^2) dy & \\ - \int_L (e^x \sin x + 2xy)\, dx + (y^2 + x^2) dy & \\ = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2 + x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin x + 2xy)\right) dx dy = 0.&\end{aligned}$$

Calculamos

$$\int_L (e^x \sin x + 2xy)\, dx + (y + x^2) dy = \int_{-1}^{1} (0 + y^2) dy = 2/3.$$

Por lo tanto

$$\int_C (e^x \sin x + 2xy)\, dx + (y^2 + x^2) dy = 2/3.$$

4. Considere la superficie S definida por la ecuación $x^2 + y^2 = z + 4$, con $z \leq 5$, y el campo $F = (yz,\ xz,\ z^2 e^z)$.

a)

$$\begin{aligned}\nabla \times F &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2e^z) - \frac{\partial}{\partial z}(xz), \frac{\partial}{\partial z}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2e^z), \frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right) \\ &= (-x, y, 0)\end{aligned}$$

b) Vamos a utilizar el teorema de Stokes. Es decir,

$$\iint_S \nabla \times F \cdot dS = \int_C F \cdot dr,$$

Donde C es la curva cuando $z = 5$ orientada negativamente. Es decir $x^2 + y^2 = 9$, orientada negativamente. $-C$ se puede parametrizar como $(3\cos\theta, 3\sin\theta, 5)$. Por lo tanto la integral buscada es

$$-\int_0^{2\pi} (-3\cos\theta,\ 3\sin\theta,\ 0)\cdot(-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0)d\theta = -18\int_0^{2\pi} (\cos\theta\sin\theta)d\theta = 0$$

5. Considere un volumen V encerrado por una superficie S y el campo $F = (0, y, z)$.

a) El teorema de la divergencia afirma

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint \text{ div } F dV.$$

Como div $F = \frac{\partial}{\partial x}0 + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 2$ tenemos que

$$\iiint \text{ div } F dV = 2\text{Vol}(V).$$

De esto concluimos el resultado.

b) Parametrizamos la superficie como $(x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)$ y usamos la parte anterior. Necesitamos caclular

$$\begin{aligned}T_x &= (1, f'(x)\cos\theta, f'(x)\sin\theta) \\ T_\theta &= (0, -f(x)\sin\theta, f(x)\cos\theta) \\ T_x \times T_\theta &= f(x)(f'(x), -\cos\theta, -\sin\theta)\end{aligned}$$

Esta normal es interior, por lo tanto usamos la contraria. Por la parte anterior,

$$\begin{aligned}
2\text{Vol}(V) &= \int_0^{2\pi}\int_a^b (0, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)\cdot f(x)(-f'(x), \cos\theta, \sin\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_a^b f^2(x)dxd\theta \\
&= 2\pi\int_a^b f^2(x)dx.
\end{aligned}$$

A partir de esto concluimos el resultado.