PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE 2013

Interrogación 1
Cálculo III – MAT1630

28 de agosto de 2013

Problema 1.

(i) Sea

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y + \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ a & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinar valores de a, si es que existen, de modo que la función f sea continua en $\mathbb{R}^2$

(ii) Sea

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^6+y^6}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ b & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Es posible elegir $b \in \mathbb{R}$ de tal manera que la función f sea continua en $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta.

Problema 2.

(i) Sea

$$h(x,y) = x^{1/3}y^{1/5}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

¿Es h diferenciable en (0,0)? Justifique su respuesta.

(ii) Sea

$$k(\mathbf{x}) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^{\mathbf{2}}}\right) & \text{si} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Demuestre que k es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y calcule $\dfrac{\partial k}{\partial x_j}(\mathbf{0})$, $j = 1, \ldots, n$.

Problema 3.

i) Determine las ecuaciones de los planos tangentes al elipsoide

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\},$$

que sean paralelos al plano

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y + 6z = 0\}.$$

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función dos veces derivable, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $\gamma(0) = (0, 0)$. Si se sabe que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2,$$

$$x'(0) = 3; \quad y'(0) = 0, \quad x''(0) = 2, \quad y''(0) = 4.$$

calcule $\varphi''(0)$ donde $\varphi(t) := f(\gamma(t))$.

Problema 4. Sea

$$F(x, y) := xy \ln(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

Encuentre los puntos críticos de F y clasifíquelos como máximos locales, mínimos locales o sillas.

UNA SOLUCIÓN

1. (i) Sea

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y + \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ a & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinar valores de a, si es que existen, de modo que la función f sea continua en $\mathbb{R}^2$

(ii) Sea

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^6+y^6}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ b & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Es posible elegir $b \in \mathbb{R}$ de tal manera que la función f sea continua en $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta.

Solución

(i) Para $(x,\ y) \neq (0,0)$, f es suma, producto, composición y división(distinta de 0) de funciones continuas, por lo tanto es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Para que sea continua en $(0,0)$ es necesario que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y)$ exista y sea igual a a.

Se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2y}{x^2+y^2} + \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]$$

Tomando coordenadas polares nos queda, $\lim\limits_{r\to 0}\left[rcos^2(\theta)\ sen(\theta) + \dfrac{sen(r^2)}{r^2}\right] = 1$

Vemos que f es continua en $\mathbb{R}^2$ si $a = 1$.

(ii) Para que g sea continua en $(0,0)$ es necesario que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,\ y)$ exista.

Si nos acercamos a $(0,0)$ por la recta $y = x$ tenemos que

$$\lim_{x\to 0} g(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\sqrt{2x^6}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\sqrt{2}|x|^3}$$

este límite no existe ya que por la derecha tiende a $\sqrt{2}$ y por la izquierda tiende a $-\sqrt{2}$. Vemos entonces que no es posible que g sea continua en $(0,0)$ por lo tanto no lo es en $\mathbb{R}^2$.

2. (i) Sea

$$h(x,y) = x^{1/3}y^{1/5}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

¿Es h diferenciable en (0,0)? Justifique su respuesta.
(ii) Sea

$$k(\mathbf{x}) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^{\mathbf{2}}}\right) & \text{si} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Demuestre que k es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y calcule $\dfrac{\partial k}{\partial x_j}(\mathbf{0})$, $j = 1, \ldots, n$.

Solución
Se tiene que

$$\lim_{k\to 0} \frac{h(k,0) - h(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{k} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to 0} \frac{h(0,k) - h(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

por lo tanto ambas derivadas parciales existen en (0,0) y son 0.

Para que h sea diferenciable en $(0,0$ se debe cumplir

$$\lim_{(k_1,k_2)\to(0,0)} \frac{h(k_1,k_2) - h(0,0) - h_x(0,0)k_1 - h_y(0,0)k_2}{||(k_1,k_2)||} = \lim_{(k_1,k_2)\to(0,0)} \frac{h(k_1,k_2)}{||(k_1,k_2)||} = 0$$

Si nos acercamos por la recta $k_1 = k_2$ tenemos

$$\lim_{k_1\to 0} \frac{h(k_1,k_1)}{||(k_1,k_1)||} = \lim_{k_1\to 0} \frac{k_1^{1/3}k_1^{1/5}}{\sqrt{k_1^2+k_1^2}} = \lim_{k_1\to 0} \frac{k_1^{8/15}}{\sqrt{2}|k_1|}$$

este límite no existe ya que la fracción no es acotada. Vemos así que la función h no es diferenciable en (0,0).

(ii) Se tiene que

$$\frac{\partial k}{\partial x_j}(\overrightarrow{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{k(\overrightarrow{0} + t\overrightarrow{e}_j) - k(\overrightarrow{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(-\frac{1}{t^2})}{t} = 0$$

Entonces k es diferenciable en 0 si

$$\lim_{\overrightarrow{u}\to\overrightarrow{0}} \frac{k(\overrightarrow{u})}{||\overrightarrow{u}||} = 0$$

Como

$$\lim_{\overrightarrow{u}\to\overrightarrow{0}} \frac{k(\overrightarrow{u})}{||\overrightarrow{u}||} = \lim_{\overrightarrow{u}\to\overrightarrow{0}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right)}{||\overrightarrow{u}||} = \lim_{||\overrightarrow{u}||\to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right)}{||\overrightarrow{u}||} = 0$$

vemos que la función es diferenciable en $\overrightarrow{0}$

3. i) El elipsoide dado, corresponde una superficie de nivel de la función

$$g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2.$$

Los planos tangentes a esta superficie, , en un punto arbitrario de ella,(x_0, y_0, z_0) tienen por vector normal $\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 4y_0, 6z_0)$.
Por otra parte el plano dado posee por vector normal, al vector $n = (1, 4, 6)$. Se buscan determinar todos los puntos que cumplan con

$$(2x_0, 4y_0, 6z_0) = \lambda(1, 4, 6), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

y que a la vez pertenezcan a la superficie, es decir $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$. De la relación de paralelismo se tiene que

$$x_0 = \lambda/2, \quad y_0 = \lambda \quad z_0 = \lambda.$$

Reemplazando en la relación $g(x, y, z) = 21$ se tiene $\lambda^2 = 4$, es decir

$$\lambda = 2 \quad \text{o bien} \quad \lambda = -2.$$

De aquí los puntos buscados serán

$$P_1 = (1, 2, 2), \qquad P_2 = (-1, -2, -2)$$

los cuales poseen respectivos planos tangentes

$$x + 4y + 6z = 21,$$

$$-x - 4y - 6z = 21.$$

ii) En primer lugar notamos que, de la regla de la cadena,

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t).$$

de donde, aplicando nuevamente la regla de la cadena,

$$\varphi''(t) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}y'(t)\right)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}x''(t) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}x'(t)\right)y'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t).$$

Evaluamos en $t = 0$, con lo cual

$$\varphi''(0) = 10.$$

4. Sea

$$F(x,y) := xy\ln(x^2+y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 > 0.$$

Encuentre los puntos críticos de F y clasifíquelos como máximos locales, mínimos locales o sillas.

Solución: Todas las derivadas de F de cualquier orden existen y son continuas en

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 > 0\right\}.$$

Tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}.$$

Por lo tanto los puntos críticos (x,y) de F satisfacen

$$\begin{cases} y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0, \\ x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

Tenemos ocho puntos críticos:

$$p_1^{\pm} = (\pm 1, 0), \quad p_2^{\pm} = (0, \pm 1), \quad p_3^{\pm} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \quad p_4^{\pm} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right).$$

Luego, tenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2x^3y + 6xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy^3 + 6x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \ln(x^2+y^2) + 2\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Sea $H_F(x,y)$ la matriz hesiana de la función F en el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$. Entonces,

$$H_F(p_1^{\pm}) = H_F(p_2^{\pm}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_F(p_3^{\pm}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_F(p_4^{\pm}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det H_F(p_1^{\pm}) < 0,$$

los puntos $p_1^{\pm}$ son puntos de silla.

Del mismo modo, como

$$\det H_F(p_2^{\pm}) < 0,$$

los puntos $p_2^{\pm}$ son puntos de silla.

Como

$$\det H_F(p_3^{\pm}) > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(p_3^{\pm}) > 0,$$

los puntos $p_3^{\pm}$ son puntos de mínimos locales.

Como

$$\det H_F(p_4^{\pm}) > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(p_4^{\pm}) < 0,$$

los puntos $p_4^{\pm}$ son puntos de máximos locales.