Pauta Interrogación 3
MAT1630 - Cálculo III

Pregunta 1 (60 puntos)

Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$$f(x,y,z) = \frac{xe^{y\cos(xyz)}}{\ln\left(y^2 + \sqrt[3]{x^2} + 7\right)}$$
$$F(x,y,z) = \left\langle xy\cos(y^3z), \ln((y^2+3)(x^2-3xz+3z^2+2)), e^{\pi}\right\rangle$$

De las siguientes expresiones, calcule la(s) que tenga(n) sentido y para la(s) que no tenga(n) sentido explique por qué.

(a) $\text{rot}(\nabla f)$.

(b) $\nabla(\text{div}\, F)$.

(c) $\nabla(F \cdot \text{div}\, F)$.

Solución y Pauta de Corrección:

Parte (a): $\text{rot}\,\nabla f$ **(20 puntos)**

- (10 puntos) Determinar si tiene sentido: El gradiente de un campo escalar f (es decir, ∇f) es un campo vectorial. El rotor de un campo vectorial (es decir, $\text{rot}(\nabla f)$) es otro campo vectorial. Por lo tanto, la expresión $\text{rot}\,\nabla f$ tiene sentido.
- (10 puntos) Calcular la expresión: Para cualquier campo escalar f que sea de clase C^2 (dos veces continuamente diferenciable), se cumple la identidad vectorial $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$. Las funciones que componen f (polinomios, exponenciales, cosenos, logaritmos, raíces) son C^2 en su dominio. No es necesario calcular explícitamente las derivadas de f. Basta con enunciar la identidad.

  Respuesta esperada: $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$.

Parte (b): $\nabla\,\text{div}\, F$ **(20 puntos)**

- (5 puntos) Determinar si tiene sentido: La divergencia de un campo vectorial F (es decir, $\text{div}\, F$) es un campo escalar. El gradiente de un campo escalar (es decir, $\nabla(\text{div}\, F)$) es un campo vectorial. Por lo tanto, la expresión $\nabla\,\text{div}\, F$ tiene sentido.
- (10 puntos) Calcular $\text{div}\, F$: Sea $F = \langle F_1, F_2, F_3\rangle$.

$$F_1(x,y,z) = xy\cos(y^3z)$$

$F_2(x,y,z) = \ln((y^2+3)(x^2-3xz+3z^2+2)) = \ln(y^2+3) + \ln(x^2-3xz+3z^2+2)$

$F_3(x,y,z) = e^{\pi}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = y\cos(y^3z)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{2y}{y^2+3} + \frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2 - 3xz + 3z^2 + 2) = \frac{2y}{y^2+3} + 0 = \frac{2y}{y^2+3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$$

Sea $g(x,y,z) = \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

$g(x,y,z) = y\cos(y^3 z) + \frac{2y}{y^2+3}$.

- (5 puntos) Calcular

$$\nabla(\operatorname{div} F) = \nabla g = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right\rangle$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\cos(y^3 z) + \frac{2y}{y^2+3}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y\cos(y^3 z) + \frac{2y}{y^2+3}\right) \\ &= (\cos(y^3 z) + y(-\sin(y^3 z)\cdot 3y^2 z)) + \frac{2(y^2+3) - 2y(2y)}{(y^2+3)^2} \\ &= \cos(y^3 z) - 3y^3 z\sin(y^3 z) + \frac{6-2y^2}{(y^2+3)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(y\cos(y^3 z) + \frac{2y}{y^2+3}\right) \\ &= y(-\sin(y^3 z)\cdot y^3) + 0 \\ &= -y^4\sin(y^3 z)\end{aligned}$$

Respuesta esperada: $\nabla(\operatorname{div} F) = \left\langle 0, \cos(y^3 z) - 3y^3 z\sin(y^3 z) + \frac{6-2y^2}{(y^2+3)^2}, -y^4\sin(y^3 z)\right\rangle$.

Parte (c): $\nabla(F \cdot \operatorname{div} F)$ (20 puntos)

- (20 puntos) Explicar por qué no tiene sentido: La divergencia de F, $\operatorname{div} F$, es un campo escalar (digamos $s(x,y,z)$). La expresión $F \cdot \operatorname{div} F$ se escribiría como $F \cdot s$. El producto punto requiere dos vectores. Sin embargo, $s = \operatorname{div} F$ es un escalar, no un vector. Por lo tanto, el producto punto $F \cdot s$ no está definido.

  Respuesta esperada: La expresión no tiene sentido porque $\operatorname{div} F$ es un campo escalar. El producto punto $F \cdot (\operatorname{div} F)$ no está definido.

Pregunta 2 (60 puntos)

Considere una superficie S definida como $z = f(x,y)$, f diferenciable y $x > 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4$. Suponga además que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq x\sqrt{2}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq x^2.$$

Demuestre que el área de esta superficie es menor o igual a 4π.

Solución y Pauta de Corrección:

- **(A:10 puntos)** Fórmula del área de superficie: El área de una superficie definida por $z = f(x, y)$ sobre una región D en el plano xy está dada por

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

- **(B:15 puntos)** Usar las desigualdades dadas: Se nos da que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq x\sqrt{2}$ y $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq x^2$. Elevando al cuadrado estas desigualdades (lo cual es válido ya que ambos lados son no negativos):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \leq (x\sqrt{2})^2 = 2x^2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \leq (x^2)^2 = x^4$$

Sustituyendo en el integrando del área:

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \leq 1 + 2x^2 + x^4$$

Reconociendo el lado derecho como un cuadrado perfecto:

$$1 + 2x^2 + x^4 = (1 + x^2)^2$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leq \sqrt{(1 + x^2)^2} = |1 + x^2|$$

Como $x^2 \geq 0$, entonces $1 + x^2 > 0$, así que $|1 + x^2| = 1 + x^2$. Entonces, el área A satisface:

$$A \leq \iint_D (1 + x^2)\, dA$$

- **(C:15 puntos)** Describir la región de integración D y plantear la integral en coordenadas polares: La región D está definida por $x > 0$ y $x^2 + y^2 \leq 4$. Esto corresponde a la mitad derecha de un disco de radio 2 centrado en el origen. En coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. La condición $x^2 + y^2 \leq 4$ se traduce en $r^2 \leq 4$, es decir, $0 \leq r \leq 2$. La condición $x > 0$ se traduce en $r\cos\theta > 0$. Como $r \geq 0$ (y $r = 0$ es solo un punto), necesitamos $\cos\theta > 0$, lo que implica $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. El elemento de área $dA = r\, dr\, d\theta$. La integral se convierte en:

$$A \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 (1 + (r\cos\theta)^2) r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 (r + r^3\cos^2\theta)\, dr\, d\theta$$

- **(D:20 puntos)** Calcular la integral: Integrando primero con respecto a r:

$$\int_0^2 (r + r^3\cos^2\theta)\, dr = \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\cos^2\theta\right]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4}\cos^2\theta\right) - 0 = 2 + 4\cos^2\theta$$

Ahora integrando con respecto a θ:

$$A \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + 4\cos^2\theta)\, d\theta$$

Usamos la identidad $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 + 4\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + 2 + 2\cos(2\theta))\, d\theta$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 + 2\cos(2\theta))\, d\theta$$

$$= [4\theta + \sin(2\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(4\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi)\right) - \left(4\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin(-\pi)\right)$$
$$= (2\pi + 0) - (-2\pi + 0) = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $A \leq 4\pi$.

Pregunta 3 (60 puntos)

Sea E la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ limitada por los planos $z = 0$ y $z = 5$ más la tapa superior del cilindro. Calcule

$$\iint_E \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Solución y Pauta de Corrección:

La superficie E consta de dos partes: S_1, la pared lateral del cilindro, y S_2, la tapa superior. La integral es $\iint_E \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS = \iint_{S_1} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS + \iint_{S_2} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS$.

Parte 1: Integral sobre la pared del cilindro S_1 (30 puntos)

- **(A:10 puntos)** Parametrización de S_1 y cálculo de dS: La pared del cilindro S_1 es $x^2 + y^2 = 9$ para $0 \leq z \leq 5$. Parametrizamos S_1 usando coordenadas cilíndricas: $\vec{r}(\theta, z) = \langle 3\cos\theta, 3\sin\theta, z\rangle$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq z \leq 5$. $\vec{r}_\theta = \langle -3\sin\theta, 3\cos\theta, 0\rangle$

  $\vec{r}_z = \langle 0, 0, 1\rangle$

  $$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin\theta & 3\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle 3\cos\theta, 3\sin\theta, 0\rangle.$$

  $dS = ||\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z||\, d\theta\, dz = \sqrt{(3\cos\theta)^2 + (3\sin\theta)^2 + 0^2}\, d\theta\, dz = \sqrt{9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta}\, d\theta\, dz = \sqrt{9}\, d\theta\, dz = 3\, d\theta\, dz$.

- **(B:5 puntos)** Sustitución en el integrando: En S_1, $x^2 + y^2 = 9$. El integrando es $\frac{1}{9+z^2}$.

- **(C:15 puntos)** Cálculo de la integral sobre S_1:

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \frac{1}{9+z^2} dS &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{1}{9+z^2}(3\,d\theta\,dz) \\ &= \int_0^5 \frac{3}{9+z^2}[\theta]_0^{2\pi}\,dz \\ &= \int_0^5 \frac{3}{9+z^2}(2\pi)\,dz = 6\pi \int_0^5 \frac{1}{9+z^2}\,dz\end{aligned}$$

Para la integral $\int \frac{1}{9+z^2}\,dz$, usamos la sustitución $z = 3u$, $dz = 3du$:

$$\int \frac{1}{9+z^2}\,dz = \int \frac{3du}{9+9u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{3}\arctan(u) = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{z}{3}\right)$$

Entonces,

$$6\pi\left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{z}{3}\right)\right]_0^5 = 2\pi\left(\arctan\left(\frac{5}{3}\right) - \arctan(0)\right) = 2\pi\arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

Parte 2: Integral sobre la tapa superior S_2 (25 puntos)

- **(D:10 puntos)** Parametrización de S_2 y cálculo de dS: La tapa superior S_2 es el disco $x^2 + y^2 \leq 9$ en el plano $z = 5$. Podemos parametrizar S_2 como $\vec{r}(x, y) = \langle x, y, 5\rangle$. El elemento de área $dS = dx\,dy$ ya que la superficie es paralela al plano xy. (Alternativamente, $\vec{r}_x = \langle 1, 0, 0\rangle, \vec{r}_y = \langle 0, 1, 0\rangle, \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \langle 0, 0, 1\rangle$, así $dS = ||\langle 0, 0, 1\rangle||\,dx\,dy = dx\,dy$). En S_2, $z = 5$, por lo que el integrando es $\frac{1}{x^2+y^2+5^2} = \frac{1}{x^2+y^2+25}$.

- **(E:15 puntos)** Cálculo de la integral sobre S_2:

$$\iint_{S_2} \frac{1}{x^2+y^2+25} dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{x^2+y^2+25}\,dx\,dy$$

donde D_{xy} es el disco $x^2 + y^2 \leq 9$. Usamos coordenadas polares para D_{xy}: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{1}{r^2+25} r\,dr\,d\theta$$

Para la integral interna $\int_0^3 \frac{r}{r^2+25}\,dr$, sea $u = r^2 + 25$, $du = 2r\,dr$. Cuando $r = 0, u = 25$. Cuando $r = 3, u = 3^2 + 25 = 34$.

$$\int_{25}^{34} \frac{1}{u}\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}[\ln|u|]_{25}^{34} = \frac{1}{2}(\ln 34 - \ln 25) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{34}{25}\right)$$

La integral completa para S_2 es:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{34}{25}\right)\,d\theta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{34}{25}\right)[\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{34}{25}\right)(2\pi) = \pi\ln\left(\frac{34}{25}\right)$$

Resultado final (F:5 puntos) Sumando las contribuciones de S_1 y S_2:

$$\iint_E \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = 2\pi\arctan\left(\frac{5}{3}\right) + \pi\ln\left(\frac{34}{25}\right)$$

Pregunta 4 (60 puntos)

Sea $\vec{F}(x,y,z) = (z, 0, -x)$, y R la parte del plano $y = 3$ al interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, orientada en la dirección positiva de y. Calcule

$$\iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Solución y Pauta de Corrección:

Se puede resolver usando cálculo directo de la integral de superficie o usando el Teorema de Stokes.

Método 1: Cálculo Directo de la Integral de Superficie (Recomendado)

- **(A:20 puntos)** Calcular $\nabla \times \vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial(-x)}{\partial y} - \frac{\partial(0)}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(z)}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(z)}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(-1-1) + \mathbf{k}(0-0) = \langle 0, 2, 0\rangle$$

- **(B:20 puntos)** Describir la superficie R y determinar $d\vec{S}$: La superficie R es parte del plano $y = 3$. La condición $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ se convierte en $x^2 + 3^2 + z^2 = 25$, es decir, $x^2 + z^2 = 25 - 9 = 16$. Así, R es un disco de radio 4 en el plano $y = 3$, centrado en $(0, 3, 0)$. La superficie está orientada en la dirección positiva de y. El vector normal unitario es $\vec{n} = \langle 0, 1, 0\rangle$. El elemento de superficie vectorial $d\vec{S} = \vec{n}\, dS_p$, donde dS_p es el elemento de área en el plano xz. Así, $d\vec{S} = \langle 0, 1, 0\rangle\, dx\, dz$.

- **(C:20 puntos)** Calcular la integral de superficie:

$$\iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{D_{xz}} \langle 0, 2, 0\rangle \cdot \langle 0, 1, 0\rangle\, dx\, dz$$

donde D_{xz} es el disco $x^2 + z^2 \leq 16$ en el plano xz.

$$= \iint_{D_{xz}} 2\, dx\, dz = 2 \iint_{D_{xz}} dx\, dz$$

La integral $\iint_{D_{xz}} dx\, dz$ es el área del disco D_{xz}, que es $\pi(\text{radio})^2 = \pi(4^2) = 16\pi$. Por lo tanto,

$$\iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 2 \cdot (16\pi) = 32\pi$$

Método 2: Usando el Teorema de Stokes El Teorema de Stokes establece que $\iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C es la frontera de R, orientada consistentemente.

- **(A:20 puntos)** Describir la curva C y su parametrización: La frontera C de R es el círculo $x^2+z^2=16$ en el plano $y=3$. La normal a R es $\vec{n}=\langle 0,1,0\rangle$. Por la regla de la mano derecha, C debe ser orientada en sentido antihorario cuando se mira desde el lado positivo del eje y. Una parametrización para C es $\vec{r}(t)=\langle 4\sin t, 3, 4\cos t\rangle$ para $0\le t\le 2\pi$. Entonces $d\vec{r}/dt=\langle 4\cos t, 0, -4\sin t\rangle$, y $d\vec{r}=\langle 4\cos t, 0, -4\sin t\rangle dt$.

- **(B:20 puntos)** Evaluar $\vec{F}$ en C y calcular $\vec{F}\cdot d\vec{r}$: En C, $\vec{F}(x,y,z)=\langle z,0,-x\rangle = \langle 4\cos t, 0, -4\sin t\rangle$.

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \langle 4\cos t, 0, -4\sin t\rangle \cdot \langle 4\cos t, 0, -4\sin t\rangle dt \\ &= ((4\cos t)(4\cos t)+(0)(0)+(-4\sin t)(-4\sin t))dt \\ &= (16\sin^2 t + 16\cos^2 t)dt = 16(\sin^2 t+\cos^2 t)dt = 16dt\end{aligned}$$

- **(C:20 puntos)** Calcular la integral de línea:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (16)\,dt = 16t\,|_0^{2\pi} = 16(2\pi) = 32\pi$$