Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2017

Interrogación 4.

MAT 1630. Cálculo 3.

1. Sea S la superficie que se obtiene al unir $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2+y^2-1,\, z \leq 0\}$ con $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\, z \geq 0\}$ orientada según los vectores normales apuntando hacia el exterior de S y sea $\vec{F} = (e^{y^2+z^2}, e^{z^2+x^2}, e^{x^2+y^2})$. Calcular

$$\int_S rot(\vec{F}).$$

Solución. Notar que S es una superficie que encierra el sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2+y^2 \leq 1,\, x^2+y^2-1 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Por lo tanto, por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iint_S \mathrm{Rot}(F) \cdot dS = \iiint_V \mathrm{div}\left(\mathrm{Rot}(F)\right) dV = 0,$$

pues la divergencia de un rotor es siempre cero. □

2. Sea S la porción del plano $2x+y+2z = 2$ en el primer octante cuya orientación esta dada según los vectores normales que apuntan en la misma dirección que $(2,1,2)$. Sea α la curva frontera de S orientada según la orientación de S y $\vec{F} = (x+y^2, y+z^2, z+x^2)$. Calcular

$$\int_\alpha \vec{F}.$$

Solución. Notamos que la superficie S dada por el gráfico de la función $z(x,y) = 1-x-\dfrac{y}{2}$ con $(x,y) \in [0,1] \times [0, 2-2x]$ satisface $\partial S = \gamma$.

Unos cálculos muestran que

$$\phi(x,y) = \left(x, y, 1 - x - \frac{y}{2}\right) \to \phi_x \times \phi_y = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$
$$\mathrm{Rot}(F) = -2\,(z,x,y) \to \mathrm{Rot}(F) \circ \phi = -2\left(1 - x - \frac{y}{2}, x, y\right)$$
$$\mathrm{Rot}(F) \circ \phi \cdot \phi_x \times \phi_y = x - y - 1.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Stokes tenemos

$$\int_\gamma F = \iint_S \mathrm{Rot}(F) \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x - y - 1\, dydx = -\frac{4}{3}.$$

□

3. Sea V el sólido en $\mathbb{R}^3$ definido por $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 1\}$ y sea S su frontera. Calcular

$$\int_S \vec{F},$$

donde $\vec{F} = (y, x, xz)$.

Solución. Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} &= \int\int\int_V div(\vec{F})\, dV \\
&= \int\int\int_V x\, dV \\
&= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_0^1 x\, dz\right) d(x,y) \\
&= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} x\, d(x,y) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2\, dr\right) = 0
\end{aligned}$$

□

4. Sea S la superficie que se obtiene al unir $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+(z-2)^2 = 1,\ 2 \le z \le 3\}$ con $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 1,\ 0 \le z \le 2\}$ orientada según los vectores normales apuntando hacia el exterior de S. Calcular

$$\int_S \vec{F},$$

donde $\vec{F} = (2x + y^2 z, 3y - x^2, 4z - x)$.

Solución. Sea $S_2 = \{(x,y,0) \,:\, x^2+y^2 \le 1\}$. Luego

$$\int_S \vec{F} = \int_{S \cup S_2} \vec{F} - \int_{S_2} \vec{F}.$$

Si V es la región interior de $S \cup S_2$ entonces por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\int_{S \cup S_2} \vec{F} = \int\int\int_V 9\, dV = 9 \cdot Vol(V) = 9\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} \vec{F} &= \int_{u^2+v^2 \le 1} \vec{F}(u,v,0) \cdot (0,0,-1)\, dA \\
&= \int_{u^2+v^2 \le 1} (2u, 3v - u^2, -u) \cdot (0,0,-1)\, dA \\
&= \int_{u^2+v^2 \le 1} u\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2\, dr\right) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_S \vec{F} = 9\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right).$$

□