MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 1 - Resolución

1. Considere la curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (e^{-t}, e^{-t}, t\sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule el plano osculador de γ en $(1, 1, 0)$.

   (b) Calcule la curvatura y torsión de la curva en $(1, 1, 0)$.

Solución. (a)
Notemos que $\alpha(0) = (1, 1, 0)$.

El plano osculador a la curva en $(1, 1, 0)$ tiene ecuación

$$((x, y, z) - \alpha(0)) \cdot \vec{b}(0) = 0 \quad \boxed{\text{Explicita ecuación plano (1 pto)}}$$

donde $\vec{b}(t)$ es el vector binormal que se calcula como: $\vec{b}(t) = \alpha'(t) \times \alpha''(t)$.

$\boxed{\text{Describe } b(t), \text{ binormal(0,5 pto)}}$

Calculando,

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \sqrt{2}e^{-t}\,(-1, 1, 0) \Rightarrow \vec{b}(0) = \sqrt{2}\,(-1, 1, 0) \quad \boxed{\text{Calcula binormal (1 pto)}}$$

Por lo tanto la ecuación del plano osculador es

$$\sqrt{2}\,(x-1, y-1, z) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\,(y-x) = 0 \quad \boxed{\text{Escribe ecuación plano osculador(0,5 pto)}}$$

Solución. (b)
Primero, $\alpha' \times \alpha'' = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^{-t}, 0)$ $\boxed{\text{Calcula producto cruz(0,5 pto)}}$

y luego

$$\|\alpha'(t)\|^2 = 2e^{-2t} + 2\,, \quad \|\alpha' \times \alpha''\|^2 = 4e^{-2t}\,. \quad \boxed{\text{Calcula los factores (0,5 pto)}}$$

Aplicando la fórmula,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{2e^{-t}}{(2e^{-2t} + 2)^{3/2}} \Rightarrow \kappa(0) = \frac{1}{4} \quad \boxed{\text{Calcula la curvatura (0,5 pto)}}$$

Similarmente para la torsión de la curva en $\alpha(t)$ se necesita $\alpha'''(t) = (-e^{-t}, -e^{-t}, 0)$,

$\boxed{\text{Calcula } \alpha''' \text{ (0,5 pto)}}$

Además, $\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = \sqrt{2}e^{-2t} - \sqrt{2}e^{-2t} = 0$, luego

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = 0 \Rightarrow \tau(0) = 0\,. \quad \boxed{\text{Calcula } \tau \text{ (1 pto)}}$$

Se evita este cálculo si se observa que el plano osculador es el mismo (independiente de t), luego la curva es plana, por lo tanto su torsión es cero.

2. Considere la curva γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (e^t, \text{sen}(e^t), \cos(e^t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine una parametrización por longitud de arco $\vec{x}(s)$ tal que $\vec{x}(0) = \vec{r}(0)$.

Solución.

Consideremos la parametrización $r(t)$ de la curva γ

$$\vec{r}(t) = (e^t, \text{sen}(e^t), \cos(e^t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

La parametrización $\vec{r}(t)$ tiene derivada

$$\dot{\vec{r}}(t) = e^t(1, \cos(e^t), -\text{sen}(e^t)) \qquad \boxed{\text{Calcula } \dot{\vec{r}} \text{ ((1 pto)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{2}\, e^t \qquad \boxed{\text{Calcula } \|\dot{\vec{r}}(t)\| \text{ (1 pto)}}$$

Si $\vec{x}(s)$ es una parametrización por longitud de arco tal que $\vec{x}(0) = \vec{r}(0)$, entonces $s(0) = 0$ obteniendo así

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(u)\|\, du = \sqrt{2}(e^t - 1) \qquad \boxed{\text{Explicita } s(t) \text{ (2 ptos)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \qquad \boxed{\text{Calcula t(s) (1 pto)}}$$

Por lo tanto

$$\vec{x}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \text{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)$$

$$\boxed{\text{Explicita arcoparametrización (1 pto)}}$$

3. Considere C una curva en $\mathbb{R}^3$ contenida en el plano $z = \sqrt{3}\,x$ con $r(s)$ una parametrización por longitud de arco con vector normal $N(s)$ dada por

$$N(s) = (-\frac{1}{2}\cos(s), -\sin(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(s))\,.$$

Pruebe que C está contenida en un círculo de radio 1.

Solución. 1

Como la curva C está contenida en un plano su torsión es cero, $\tau(s) = 0$ para todo s, y luego la binormal unitaria es la normal unitaria del plano $z = \sqrt{3}\,x$, es decir, $B = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}, 0, -1)$. Calcula la binormal unitaria (**1 pto**)

Aplicando las ecuaciones de Frenet-Serret:

$$T = (N \times B) = \pm(-\frac{1}{2}\sin(s), \cos(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(s)) \quad \text{Calcula } T \text{ (**1.5 ptos**)}$$

Como $r(s)$ es la parametrización por longitud de arco, la curvatura de γ en $r(s)$ está dada por $\kappa(s) = \|\frac{d}{ds}T(s)\|$. Calcula T' (**0.5 pto**)

Calculando, $\frac{dT}{ds} = \pm(-\frac{1}{2}\cos(s), -\sin(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(s))$ Calcula T (**1.5 ptos**) tiene longitud 1 por lo que $\kappa(s) = 1$ para todo s. Calcula κ (**0.5 pto**)

Como C es una curva plana con curvatura constante igual a 1, C debe ser estar contenida en un círculo de radio 1. Deduce contenida en círculo (**1 pto**)

Solución. 2 Como la curva C está contenida en un plano su torsión es cero, $\tau(s) = 0$ para todo s. Argumenta $\tau(s) = 0$ (**1.0 ptos**)

Por hipótesis $N(s)$ es normal y además es un vector de norma 1,

$$\|N(s)\|^2 = (\frac{1}{4}\cos^2(s) + \sin^2(s) + \frac{3}{4}\cos^2(s) = \cos^2(s) + \sin^2(s) = 1 \quad \text{Comprueba } \|N(s)\| = 1 \text{ (**1.0 ptos**)}$$

por lo tanto $N(s)$ es la normal unitaria.

Además sabemos que para para todo s : $\frac{dN}{ds}(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$ donde $T(s)$ es la tangente unitaria en $r(s)$ y $B(s)$ es la binormal unitaria en $r(s)$. Plantea igualdad (**1.0 ptos**)

$\tau(s) = 0 \Rightarrow |\kappa(s)|\,\|T(s)\| = \|\frac{dN}{ds}(s)\|$. Luego, $\kappa(s) = \|\frac{dN}{ds}(s)\|$, pues $T(s)$ es la tangente unitaria en $r(s)$ para todo s. Explicita $\kappa(s)$ (**1.0 ptos**)

Calculando, para todo s:

$$\left\|\frac{dN}{ds}(s)\right\| = \|(\frac{1}{2}\sin(s), -\cos(s), \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}(s))\| = 1 \quad \text{Calcula } \|dN/ds\| \text{ (**1.0 ptos**)}$$

Lo cual prueba que la curvatura es constante igual a 1. Luego, la curva planar está contenida en un círculo de radio 1. Concluye (**1.0 ptos**)

4. Sea γ un curva suave cerrada que no pasa por p. Pruebe que en los puntos q en γ donde la distancia a p es máxima o mínima, la recta tangente a γ en q es perpendicular a $q - p$.

Solución.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que la curva γ está arcoparametrizada por $\beta(s)$, con $s \in [0, L]$.

Sea $\beta(s_0) = q$ un punto en γ donde la distancia a p es máxima (o mínima].
Entonces la función $\varphi(s) = \|\beta(s) - p\|^2$ tiene un máximo (o mínimo) local en s_0.

Describe función φ (**1 pto**)

Se deduce que s_0 es un punto crítico de $\varphi(s)$. Argumenta punto critico de φ (**1 pto**)

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}\|\beta(s) - p\|^2\Big|_{s_0} \\ &= \frac{d}{ds}(\beta(s) - p) \cdot (\beta(s) - p)\Big|_{s_0} \\ &= \beta'(s_0) \cdot (\beta(s_0) - p) + (\beta(s_0) - p) \cdot \beta'(s_0) \\ &= 2\beta'(s_0) \cdot (q - p)\,. \end{aligned}$$

Calcula derivada de φ (**2 ptos**)

Además la recta tangente a la curva en q tiene vector director $T(s_0) := \beta'(s_0)$.

Argumenta recta tg (**1 pto**)

Por lo tanto, la condición $(q - p) \cdot T(s_0) = 0$ muestra que la recta tangente a γ en q es perpendicular al vector $q - p$.

Argumenta perpendicularidad (**1 pto**)