Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2023

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 3

1. *a*) Determine una representación paramétrica del toro que se obtiene al hacer girar alrededor del eje Z al círculo que se encuentra en el plano XZ y cuyo centro es $(b,0,0)$ y radio $a<b$. **[2 puntos]**

   b) Mediante la representación paramétrica del inciso *a*) determine el área de la superficie del toro. **[4 puntos]**

Solución.

a) La curva generatriz en el plano XZ tiene ecuación $(x-b)^2+z^2=a^2$. Se sigue que una parametrización de este círculo es

$$\alpha(t)=(b+a\cos(t),0,a\,\mathrm{sen}(t))$$

con $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Entonces, una parametrización para el toro es

$$r(t,\theta)=(b+a\cos(t)\cos(\theta),(b+a\cos(t))\,\mathrm{sen}(\theta),a\,\mathrm{sen}(t))\,,$$

con $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

b) Se tiene que

$$\begin{aligned}
r_t &= (-a\,\mathrm{sen}(t)\cos(\theta),-a\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(\theta),a\cos(t))\\
r_\theta &= (-(b+a\cos(t))\,\mathrm{sen}(\theta),(b+a\cos(t)\cos(\theta),0)\\
r_t\times r_\theta &= (-a(b+a\cos(t)\cos(t)\cos(\theta),-a(b+a\cos(t))\cos(t)\,\mathrm{sen}(\theta),-a(b+a\cos(t))\,\mathrm{sen}(t))\\
&= -a(b+a\cos(t))(\cos(t)\cos(\theta),\cos(t)\,\mathrm{sen}(\theta),\mathrm{sen}(t))\\
\|r_t\times r_\theta\|^2 &= a^2(b+a\cos(t))^2[\cos^2(t)\cos^2(\theta)+\cos^2(t)\,\mathrm{sen}^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(t)]=a^2(b+a\cos(t))^2
\end{aligned}$$

Entonces, el área del toro es

$$\begin{aligned}
A(T) &= \iint_D \|r_t\times r_\theta\|\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(b+a\cos(t))\,dtd\theta\\
&= 2\pi a\int_0^{2\pi}(b+a\cos(t))\,dt=2\pi a(2\pi b)=4\pi^2ab\,.
\end{aligned}$$

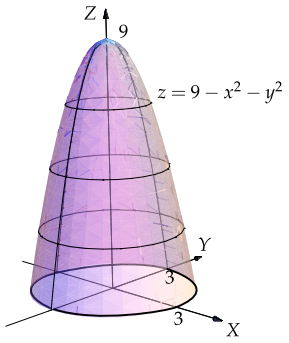
Puntaje Pregunta 1.

- 1 punto por encontrar una parametrización del círculo.
- 1 punto por exhibir una parametrización para el toro.
- 2 puntos por obtener el valor de la condición de regularidad $\|r_t\times r_\theta\|$.
- 2 puntos por calcular la integral doble que permite calcular el área.

2. Calcule la integral de superficie $\iint_S (x^2+y^2+z)\,dS$ donde S es la superficie de ecuación $z = 9-x^2-y^2$, limitada por el plano $z=0$.

Solución.

Notemos que S consiste de 2 superficies: S_1 la superficie lateral del paraboloide y S_2 la tapa en el plano $z=0$. La situación geométrica se aprecia en la figura.



- Para la superficie S_1 considere la parametrización $r(x,y) = (x,y,9-x^2-y^2)$ definida en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 9\}$. Se tiene que $r_x = (1,0,-2x)$, $r_y = (0,1,-2y)$, $r_x \times r_y = (2x,2y,1)$ y $\|r_x \times r_y\| = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$. Entonces,

$$\iint_{S_1} (x^2+y^2+z)\,dS = \iint_D (x^2+y^2+9-x^2-y^2)\|r_x \times r_y\|\,dA = \iint_D 9\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA$$

  Usando coordenadas polares se obtiene que

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (x^2+y^2+z)\,dS_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 9\sqrt{1+4r^2}\cdot r dr d\theta = 18\pi \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr \\ &= 18\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{3\pi}{2}\left[(37)^{3/2}-1\right]\end{aligned}$$

- Para S_2 considere la parametrización $\varphi(x,y) = (x,y,0)$ definida en D. Se tiene que $\varphi_x = (1,0,0)$, $\varphi_y = (0,1,0)$, $\varphi_x \times \varphi_y = (0,0,1)$ y $\|\varphi_x \times \varphi_y\| = 1$. Luego,

$$\iint_{S_2} (x^2+y^2+z)\,dS_2 = \iint_D (x^2+y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\cdot r dr d\theta = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81\pi}{2}\,.$$

Entonces,

$$\iint_S (x^2+y^2+z)\,dS = \iint_{S_1} (x^2+y^2+z)\,dS_1 + \iint_{S_2} (x^2+y^2+z)\,dS_2 = \frac{3\pi}{2}(37)^{3/2} + \frac{78\pi}{2}\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 3 puntos por calcular el flujo en el paraboloide.
- 2 puntos por calcular el flujo en la tapa $z=0$.
- 1 punto por obtener el flujo total.

3. Considere el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ y la curva C dada por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+z=0$.

   a) Determine una parametrización de C y calcule $\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\alpha$.

   b) Compruebe el teorema de Stokes para una superficie S a elección, cuya frontera sea C.

Solución.

a) Sustituyendo $z=-x$ en la ecuación de la esfera se obtiene $x^2+y^2+(-x)^2=1 \Longleftrightarrow 2x^2+y^2=1$. Entonces podemos considerar la parametrización con ecuaciones paramétricas

$$C: \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi] \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t) \\ dy = \cos(t) \\ dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

Entonces la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\alpha &= \int\limits_C ydx+zdy+xdz = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^2(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2(t)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)\cos(t)\right)dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right)dt = -\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

b) Sea S la superficie acotada por la elipse $2x^2+y^2=1$ en el plano $x+z=0$. El vector normal para la superficie coincide con el vector normal del plano $x+z=0$, es decir es $\mathbf{N}=(1,0,1)$. Se tiene que

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)\,.$$

Por el Teorema de Stokes se cumple que

$$\begin{aligned} \int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\alpha &= \iint\limits_S \operatorname{rot}(\mathbf{F})\cdot dS = \iint\limits_D (-1,-1,-1)\cdot(1,0,1)\,dA \\ &= -2\iint\limits_D dA = -2\text{Área(Elipse)} = -2\cdot\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 = -\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

este resultado con lo obtenido en el inciso *a*) comprueba el teorema de Stokes.

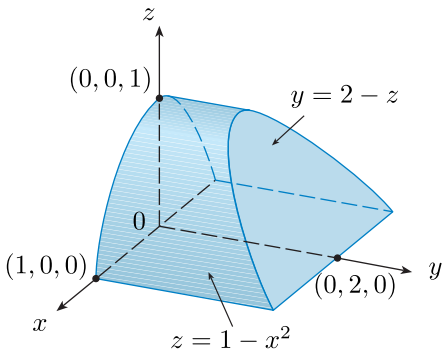
Puntaje Pregunta 3.

- 1,5 puntos por encontrar una parametrización de C.
- 1,5 puntos por calcular la integral de línea.
- 1 punto por calcular el rotacional y el vector normal de la superficie S.
- 1 punto por calcular la integral doble como el área de la elipse.
- 1 punto por comprobar el teorema de Stokes.

4. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$, donde

$$F(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy)\mathbf{k}\,.$$

y S la superficie de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ y $y + z = 2$ (ver figura).



Solución. Se tiene que la divergencia del campo vectorial es

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen}(xy)) = y + 2y = 3y\,.$$

La región E se puede describir como una región tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\}\,.$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot dS &= \iiint_E \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iiint_E 3y\, dV \\
&= 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} y\,dy\,dz\,dx = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\,dx\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[(x^2+1)^3 - 8]\,dx \\
&= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\,dx = \frac{184}{35}\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1 punto por calcular la divergencia del campo $\mathbf{F}$.
- 2 puntos por describir la región E como una región tipo 3.
- 3 puntos por aplicar el teorema de la divergencia y calcular la integral triple.