PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
11 Junio 2018

MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 3
Primer Semestre 2018

1. Considere el campo $\vec{F}(x,y,z) = (z\arctan(y^2),\, z^3\ln(x^2+1),\, z)$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que se sitúa encima del plano $z=1$ y está orientado hacia arriba.

Solución. Cálculo la divergencia del campo,

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial(z\arctan(y^2))}{\partial x} + \frac{\partial(z^3\ln(x^2+1))}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1\,.$$ Cálculo de divergencia **0.5 ptos**

Llamemos M^* el paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que se sitúa encima del plano $z=1$ y $M=\{(x,y,z) : x^2+y^2\le 1, z=1\}$.

Usando el Teorema de la Divergencia se concluye que

$$\int\int_{M^*}(F\cdot\vec{n})\,dS = \int\int\int_D(\mathrm{div}\vec{F})\,dV - \int\int_M(F\cdot\vec{n})\,dS\,.$$ Aplicación del T.D **1.0 ptos**

Calculando se tiene que

$$\int\int\int_D(\mathrm{div}\vec{F})\,dV = \int\int_{disco}\int_1^{2-x^2-y^2} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\,.$$ Cálculo Integral **2.0 ptos**

Puesto que $\vec{F}\cdot\vec{n} = (\arctan(r^2\sin\theta), \ln(r^2\cos^2+1), 1)\cdot(0,0,-1) = -1$ se obtiene que

Cálculo $\vec{F}\cdot\vec{n}$ **1.0 ptos**

$$\int\int_M(\vec{F}\cdot\vec{n})dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dA = -\pi\,.$$ Cálculo Integral **1.0 ptos**

Por lo tanto

$$\int\int_{M^*}(\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \frac{\pi}{2}+\pi = \frac{3\pi}{2}$$ Explicitar resultado **0.5 ptos**

2. a) Calcule el área de la superficie K que se genera al rotar la gráfica de $f(x) = 1 - x^2$ entre $0 \leq x \leq 1$ en torno al eje OY.

b) Calcule la integral de superficie $\int\int_S (x + z)\, dS$ donde S es la porción del primer octante del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

Solución. Parte a)
Parametrizamos la superficie K que se genera al rotar la gráfica de f con respecto al eje OY por $\phi(u, v) = (x(u, v), t(u, v), z(u, v))$ con

$$x(u, v) = u \cos v\,, \quad y(u, v) = f(u)\,, \quad z(u, v) = u \operatorname{sen} v\,.$$ Parametriza superficie **1.0 ptos**

Por lo tanto, el elemento de área dS se calcula por

$$\begin{aligned} dS &= \|\phi_u \times \phi_v\|\, dA \\ &= |u|\|(f'(u)u\, \cos v\,, -u\,, f'(u)u \operatorname{sen} v)\|\, du\, dv \\ &= |u|\sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du\, dv \end{aligned}$$ Calcula dS **0.5 ptos**

El área de la superficie K es

$$\begin{aligned} A(K) &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} |u|\sqrt{1 + (f'(u))^2} dv \\ &= 2\pi \int_0^1 u\sqrt{1 + 4u^2}\, du = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{p}\, dp \end{aligned}$$ Expresa el área como una integral **1.0 ptos**

De esta manera el área es : $A(K) = \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$. Explicita el valor del área **0.5 ptos**

Solución. Parte b)
Proyectando la superficie S en el plano XY se observa que la superficie es la gráfica de una función.

Luego, una parametrización de S es

$$x(u,v) = u\,, \quad y(u,v) = v\,, \quad z(u,v) = g(u,v) = \sqrt{9-v^2}\,,$$ Parametriza superficie **0.5 ptos**

donde el elemento de área dS es

$$dS = \sqrt{1+(g_u)^2+(g_v)^2}dA = \frac{3}{\sqrt{9-v^2}}\,du\,dv$$ Cálcula dS **0.5 ptos**

Notamos que en $y = 3$ la derivada parcial $g_y = \frac{-v}{\sqrt{9-v^2}}$ no es continua en $y = 3$. Para logra calcularla debemos acercarnos a $y = 3$ Observa la singularidad dS **0.5 ptos**

$$\lim_{a\to 3}\int_0^a \int_0^4 \left(u+\sqrt{9-v^2}\right)\frac{3}{\sqrt{9-v^2}}\,du\,dv$$ Representa integral de superficie como integral impropia **0.5 ptos**

De esta manera se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int\int_S (x+z)\,d\sigma &= 3\lim_{a\to 3}\int_0^a \left(4+\frac{8}{\sqrt{9-v^2}}\right)dv \\
&= 3\lim_{a\to 3}(4a+8\arcsin\left(\frac{a}{3}\right)) \text{ Calcula integral impropia } \textbf{0.5 ptos} \\
&= 36+24\,\frac{\pi}{2} \\
&= 36+12\,\pi \quad \text{Explicita el resultado de la integral } \textbf{0.5 ptos}
\end{aligned}$$

Solución. Parte b) Solución alternativa

Otra parametrización de la superficie es

$$x = x\,, \quad y = 3\cos t\,, \quad z = 3\,\mathrm{sen}\,t\,, \quad x\in[0,4]\,, \quad t\in[0,\pi/2]$$ Parametriza superficie **0.5 ptos**

Se calcula el elemento de área dS con ésta parametrización

$$dS = \|(0,-3\cos t,-3\mathrm{sen}\,t)\|\,dA = 3\,dtdx$$ Calcula dS **0.5 ptos**

Luego la integral de superficie se transforma en

$$\int\int_S (x+z)dS = 3\int_0^{\pi/2} dt\int_0^4 (x+3\,\mathrm{sen}\,t)dt$$ Reoresenta $\int\int_S (x+z)dS$ como integral doble **1.0 ptos**

Calculando se obtiene que

$$\int\int_S (x+z)dS = 3\int_0^{\pi/2}(8+12\,\mathrm{sen}\,t)\,dt$$ Calcula integral doble **0.5 ptos**

Finalmente

$$\int\int_S (x+z)dS = 36+12\,\pi$$ Explicita el resultado de la integral **0.5 ptos**

3. Sea S la porción de $x^2+y^2+z^2=4$ comprendida entre $z=-1$ y $z=1$. Calcule el valor de

$$\int\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

siendo $\vec{n}$ el vector normal unitario apuntando hacia afuera y $\vec{F}=(P,Q,R)$ es un campo de clase C^1 con $P(x,y,z)=yz$, $Q(x,y,z)=xz$, $R(x,y,z)=h(z)$.

Solución.
Observemos que la la superficie S tiene dos curvas C_1, C_2 que constituyen su frontera:

$C_1 : x^2+y^2=3,\ z=-1\,, \quad C_2 : x^2+y^2=3,\ z=1$ Describe la frontera **0.5 ptos**

Orientaciones adecuadas de las curvas son respectivamente:

$$\begin{array}{rcl} C_1 & : & (\sqrt{3}\,\cos t, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, -1) \\ C_2 & : & (\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{3}\,\cos t,\ 1) \end{array}$$ Parametriza la frontera **1.0 ptos**

con $0 \le t \le 2\pi$.

Aplicando el Teorema de Stokes, que relaciona la integral de superficie con la integral de línea, rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$,

$$\int\int_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\; dS = \int_{C_1\cup C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ Aplica Teorema de Stokes **1.0 ptos**

Calculamos las integrales de líneas

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \vec{F}\cdot \vec{t}\, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, -\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, h(1)) \cdot (-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{3}\cos t, 0)\, dt \\ &= 3\int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}^2 t - \cos^2 t)\, dt = 0 \end{aligned}$$ Calcula la integral de línea **1.5 ptos**

Ahora para C_2

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \vec{F}\cdot \vec{t}\, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\,\cos t, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t,\ h(1)) \cdot (\sqrt{3}\,\cos t\,, -\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t,\ 0)\, dt \\ &= 3\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t)\, dt = 0 \end{aligned}$$ Calcula la integral de línea **1.5 ptos**

Se concluye que

$$\int\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0\,.$$ Explicita la respuesta **0.5 ptos**

4. Calcule $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde el campo vectorial $\vec{F}$ está definido por

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},e^{\operatorname{sen}^2(z)}\right),$$

y Γ es la curva parametrizada por $r(t)=(2\cos t,2\operatorname{sen} t,\cos^3 t-\operatorname{sen}^5 t), t\in[0,2\pi]$.

Solución.

Observamos que cuando $x^2+y^2\neq 0$ el campo $\vec{F}$ tiene derivadas parciales continuas y

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & e^{\operatorname{sen}^2(z)} \end{vmatrix} \\ &= \left(0,\,0,\,\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= (0,0,0). \qquad \boxed{\text{Calcula el rotor } \mathbf{0.5\ ptos}}\end{aligned}$$

Obsevemos que cualquier superficie (acotada) cuya curva frontera es sólo Γ necesariamente intersecta al eje z, donde $x^2+y^2=0$, es decir donde el campo $\vec{F}$ no es continuo, por lo que no se puede aplicar el Teorema de Stokes directamente.
$\boxed{\text{Explica porqué que no se puede aplicar Teorema de Stokes } \mathbf{0.5\ ptos}}$

Por otro lado, no es difícil encontrar una superficie S que no intersecta al eje z y cuya frontera consiste de: la curva Γ y la circunferencia unitaria C parametrizada por $\gamma(t)=(\cos(t),-\operatorname{sen}(t),0), t\in[0,2\pi]$ con parametrizaciones orientadas adecuadamente.
$\boxed{\text{Descripción de la nueva superficie } S \text{ donde } \mathbf{0.5\ ptos}}$

Tal superficie es por ejemplo la superficie S parametrizada por

$$\sigma(t,\rho)=((\rho+1)\cos(t),(\rho+1)\operatorname{sen}(t),\rho(\cos^3 t-\operatorname{sen}^5 t)), t\in[0,2\pi],\rho\in[0,1].$$

Basta con mencionar que existe tal superficie, no es necesario construir un ejemplo como el de arriba, ejemplo que se presenta solo por completitud.
$\boxed{\text{Descripción de la nueva superficie } S \quad \mathbf{2.0\ ptos}}$

Sobre la superficie S el campo $\vec{F}$ si cumple las condiciones para aplicar el Teorema de Stokes y se obtiene que

$$\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}, \qquad \boxed{\text{Aplica Teorema de Stokes } \mathbf{0.5\ ptos}} \qquad (1)$$

pero $\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=0$, pues $\nabla\times\vec{F}=(0,0,0)$. $\boxed{\text{Calcula } \iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} \quad \mathbf{0.5\ ptos}}$

Luego,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}=\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen} t,\cos t,1)\cdot(-\operatorname{sen} t,-\cos t,0)\,dt=-2\pi. \qquad \boxed{\text{Calcula correctamente la integral } \mathbf{1.0\ ptos}}$$

Reemplazando en (1) concluimos que $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=2\pi$. $\boxed{\text{Explicita la respuesta } \mathbf{0.5\ ptos}}$