Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo Semestre de 2024

Interrogación 1
Cálculo III - MAT 1630

1. Encuentre la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = xy$ y el cilindro elipsoidal
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ z \in \mathbb{R}.$$

2. Considere la curva $r(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 4t)$ con $t \in \mathbb{R}$.
   a) Calcule el vector normal unitario $\mathbf{N}(t)$ para todo t.
   b) Encuentre todos los valores de t en que el plano osculador es paralelo al plano $4y - 3z = 0$.

3. Sea $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ la curva $r(t) = (2t^{3/2}, \cos(2t), \sin(2t))$. Encuentre la función de longitud de arco $s(t)$ (con punto de inicio $t = 0$).

4. Considere curva $r : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$r(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}\right),$$
   a) Verifique que $r(t) \cdot \langle 1, -4, 2\rangle$ es constante.
   b) Calcule la torsión de la curva en todo punto.
   c) Calcule la curvatura en el punto $r(0)$.

5. Sea $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una funcion vectorial tal que $r(s) \cdot r(s) = 1$ para todo s. Asumiento que r está parmetrizada de acuerdo a su longitud de arco, verifique las siguientes afirmaciones:
   a) $\mathbf{T} \cdot r = 0$.
   b) $\mathbf{N} \cdot r = -\frac{1}{\kappa}$, donde κ es la curvatura.
   c) $r = -\frac{1}{k}\mathbf{N} + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\mathbf{B}$, donde $\kappa' = \frac{d\kappa}{ds}$ es la derivada con respecto a s y τ la torsión.

Solución interrogación 1
MAT1630 - Cálculo III

1. El cilindro puede parametrizarse como $x = 3\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi)$. Utilizando la segunda ecuación tenemos que $z = 6\cos\theta\ \sin\theta$.

   Obtenemos la curva $r(\theta) = (3\cos\theta, 2\sin\theta, 6\cos\theta\sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.

2. *a*) Tenemos que
$$r'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 4).$$
   Por lo tanto $\|r'(t)\| = 5$ y el vector tangente unitario está dado por
$$\mathbf{T} = \frac{1}{5}(-3\sin t, 3\cos t, 4).$$
   El vector normal se puede calcular como $\frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|}$, obteniendo
$$\mathbf{N} = \frac{1}{3}(-3\cos t, -3\sin t, 0) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

   b) El vector binormal está dado por
$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{1}{5}(4\sin t, -4\cos t, 3).$$
   El plano osculador es aquel que pasa por el punto dado y cuyo vector normal coincide con el vector binormal a la curva.

   La condición requerida es equivalente a que $\mathbf{B}$ sea paralelo al vector $(0, 4, -3)$ o equivalentemente $\sin t = 0$, $-4\cos t = 4\alpha$ y $3 = -3\alpha$. Es decir, $\alpha = -1$ y $t = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ cumple con la condición requerida.

3. Para esta curva tenemos que
$$r'(t) = \left(3t^{\frac{1}{2}}, -2\sin(2t), 2\cos(2t)\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{9u+4}du \\ &= 2\,\frac{(9u+4)^{\frac{3}{2}}}{3\times 9}\Bigg|_0^t \\ &= 2\frac{(9\,t+4)^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{16}{27}. \end{aligned}$$

4. *a*) Observamos que

$$\begin{aligned} r(t)\cdot\langle 1,-4,2\rangle &= \frac{1+t}{1-t} - \frac{4}{1-t^2} + \frac{2}{1+t} \\ &= \frac{(1+t)^2 - 4 + 2(1-t)}{1-t^2} \\ &= \frac{1+2t+t^2-2-2t}{1-t^2} \\ &= \frac{t^2-1}{1-t^2} = -1. \end{aligned}$$

   Es decir, es constante igual a -1.

   b) La ecuación anterior determina que la curva esta sobre un plano (con vector normal $(1,-4,2)$ y que pasa por el punto $(1,1,1)$), por lo tanto su torsión es 0

   c) Calculemos

$$r'(t) = \left(\frac{2}{(1-t)^2}, \frac{2t}{(1-t^2)^2}, -\frac{1}{(1+t)^2}\right).$$

   Luego

$$r''(t) = \left(\frac{4}{(1-t)^3}, \frac{2(3t^2+1)}{(1-t^2)^3}, \frac{2}{(1+t)^3}\right).$$

Evaluando en 0 tenemos

$$\begin{aligned} r'(0) &= (2,\, 0,\, -1) \\ r''(t) &= (4,\, 2,\, 2) \\ r' \times r''(0) &= (2,\, -8,\, 4) \\ \|r' \times r''(0)\| &= 2\sqrt{21} \\ \|r'(0)\| &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Luego la curvatura está dada por

$$\kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{21}}{5^{\frac{3}{2}}}$$

5. *a*) Derivando la relación $r(s) \cdot r(s) = 1$ y usando la regla del producto tenemos que

$$2\frac{dr}{ds} \cdot r = 0.$$

Concluimos lo pedido observando que $\frac{dr}{ds} = \mathbf{T}$.

b) Derivando la relación anterior tenemos

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot r + \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 0.$$

Como $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$ y $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ concluimos

$$\kappa\mathbf{N} \cdot r + 1 = 0.$$

Despejando, tenemos $\mathbf{N} \cdot r = -\frac{1}{\kappa}$.

c) Derivando la ecuación anterior tenemos que

$$\frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} \cdot r + \kappa\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot r + \kappa\mathbf{N} \cdot \frac{dr}{ds} = 0.$$

Como $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ concluimos

$$\frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} \cdot r + \kappa\left(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\right) \cdot r + \kappa\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0.$$

Como $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ concluimos

$$-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa\tau\mathbf{B} \cdot r = 0$$

Como $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ es una base ortonormal

$$r(s) = (r \cdot \mathbf{T})\,\mathbf{T} + (r \cdot \mathbf{N})\,\mathbf{N} + (r \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{B}.$$

Utilizando las partes anteriores

$$r(s) = -\frac{1}{\kappa}\mathbf{N} + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\,\mathbf{B}.$$