FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Examen Final
MAT1630 - Cálculo III

Instrucciones:

- El examen tiene una duración de 120 minutos.
- La prueba consta de dos partes:
  - **Parte I: Selección Múltiple (120 puntos).** 8 preguntas, 15 puntos cada una. Marque la alternativa correcta en la portada. No se requiere desarrollo.
  - **Parte II: Desarrollo (120 puntos).** 2 preguntas, 60 puntos cada una. Justifique cada paso de su desarrollo.
- **En caso de ser sorprendido con un celular, tablet u otro dispositivo electrónico no autorizado durante la prueba, esta será evaluada con nota mínima.**

Parte I: Selección Múltiple (120 puntos)

1. Una partícula se mueve según la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. ¿Cuál es su aceleración en $t = 1$?

   (a) $\langle 1, 2, 3 \rangle$
   (b) $\langle 0, 2, 6 \rangle$
   (c) $\langle 1, 2, 6 \rangle$
   (d) $\langle 0, 2, 3 \rangle$

   Solución: La alternativa correcta es **(b)**. La velocidad es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$. La aceleración es $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$. Evaluando en $t = 1$, obtenemos $\mathbf{a}(1) = \langle 0, 2, 6(1) \rangle = \langle 0, 2, 6 \rangle$.

2. ¿Cuál de las siguientes curvas tiene curvatura constante y no nula?

   (a) Una parábola $y = x^2$.
   (b) Una línea recta $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 - t, 3t \rangle$.
   (c) Una hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 4t \rangle$.
   (d) Una curva cúbica $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

Solución: La alternativa correcta es **(c)**. (a) La curvatura de una parábola no es constante. (b) Una línea recta tiene curvatura idénticamente nula ($\kappa = 0$). (c) Una hélice circular tiene curvatura $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$ y torsión $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$ constantes. En este caso, $a = 3, b = 4$, por lo que $\kappa = 3/25 \neq 0$. (d) La curvatura de la cúbica torcida no es constante.

3. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 - 3y^2 \rangle$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?

   (a) $\mathbf{F}$ es un campo conservativo.

   (b) La divergencia de $\mathbf{F}$ es nula.

   (c) $\mathbf{F}$ no tiene una función potencial.

   (d) La integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre un círculo unitario es 2π.

   Solución: La alternativa correcta es **(a)**. Sea $P(x, y) = 2xy$ y $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Calculamos las derivadas parciales cruzadas: $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ y el dominio de $\mathbf{F}$ es $\mathbb{R}^2$ (simplemente conexo), el campo es conservativo. Por lo tanto, (a) es verdadera, lo que implica que (c) y (d) son falsas. (b) es falsa porque el rotacional para un campo 2D se asocia a $(\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{k} = Q_x - P_y$, que es 0.

4. La longitud de arco de la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t), \operatorname{sen}(t), t \rangle$ desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$ es:

   (a) 2π

   (b) $\sqrt{2}\pi$

   (c) $2\sqrt{2}\pi$

   (d) 4π

   Solución: La alternativa correcta es **(c)**. Primero, calculamos el vector tangente $\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1 \rangle$. Luego, su magnitud (la rapidez): $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. La longitud de arco es la integral de la rapidez: $L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}[t]_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi$.

5. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$. Si S es la superficie de una esfera, el Teorema de la Divergencia implica que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es:

   (a) Cero.

   (b) Proporcional al radio de la esfera.

   (c) Proporcional al área de la esfera.

   (d) Imposible de determinar sin conocer $\mathbf{F}$.

   Solución: La alternativa correcta es **(a)**. El Teorema de la Divergencia establece que para una superficie cerrada S que encierra un volumen E, el flujo exterior es $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$. Dado que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$ en todo el dominio, la integral de volumen es $\iiint_E 0\, dV = 0$. Por lo tanto, el flujo es cero.

6. ¿Qué representa físicamente el rotacional de un campo de velocidades de un fluido, $\text{rot}(\mathbf{v})$?

   (a) La tasa de expansión o compresión del fluido en un punto.

   (b) La tendencia del fluido a rotar alrededor de un punto.

   (c) La dirección de máximo incremento de la rapidez.

   (d) La masa total del fluido.

   Solución: La alternativa correcta es **(b)**. El rotacional (o curl) de un campo vectorial de velocidades mide la tendencia de las partículas del fluido a rotar alrededor de un eje. Un rotacional no nulo indica la presencia de "vórtices.º remolinos microscópicos. La divergencia, por otro lado, mide la expansión o compresión (opción a).

7. El área de la porción del plano $z = 2x + 3y + 1$ que se encuentra sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 2]$ en el plano xy es:

   (a) $2\sqrt{14}$

   (b) $\sqrt{14}$

   (c) $2\sqrt{13}$

   (d) 14

   Solución: La alternativa correcta es **(a)**. El área de una superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre una región D es $A = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dA$. Aquí $f(x, y) = 2x + 3y + 1$, entonces $f_x = 2$ y $f_y = 3$. El integrando es $\sqrt{1 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$. El área es $\iint_D \sqrt{14}\, dA = \sqrt{14} \cdot \text{Área}(D)$. La región D es el rectángulo $[0, 1] \times [0, 2]$, cuya área es $1 \times 2 = 2$. Por lo tanto, el área de la superficie es $2\sqrt{14}$.

8. Sea S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, y $\mathbf{F} = \langle 0, 0, 6z \rangle$. ¿Cuál es el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S con normal apuntando hacia afuera?

   (a) πR^3

   (b) $8\pi R^3$

   (c) $4\pi R^2$

   (d) 0

   Solución: La alternativa correcta es **(b)**. Podemos usar el Teorema de la Divergencia. El volumen que encierra es la esfera E. $\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial 6z}(z) = 6$. Por el Teorema de la Divergencia: $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E 6\, dV = 6\text{Vol}(E) = 6\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\pi R^3$. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Por lo tanto, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 8\pi R^3$.

Parte II: Desarrollo (120 puntos)

9. Sea S la porción del paraboloide

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

que se encuentra sobre el plano $z = 0$. Sea C la curva frontera de S, orientada en sentido antihorario vista desde arriba. Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle yz,\, 2xz,\, e^{xy} \rangle.$$

(a) **(15 pts)** Calcule rot $\mathbf{F}$.

(b) **(20 pts)** Calcule directamente la integral de línea

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(c) **(20 pts)** Verifique que el flujo de rot $\mathbf{F}$ a través de la superficie S con normal apuntando hacia arriba es

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left((2x^2 - 2y^2)e^{xy} - 5x^2 + y^2 + 9 \right) dA$$

donde D es el disco $x^2 + y^2 \leq 9$ y calcule aprovechando la simetría para simplificar la integral.

(d) **(5 pts)** Compare el resultado obtenido en (b) con el resultado obtenido en (c). ¿Coinciden? En caso afirmativo, ¿existe algún teorema que explique esa coincidencia?

Solución:

(a) **(15 pts)** El rotacional de $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ es $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & 2xz & e^{xy} \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial z}(2xz) \right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) \right) \\
&= \mathbf{i}(xe^{xy} - 2x) - \mathbf{j}(ye^{xy} - y) + \mathbf{k}(2z - z) \\
&= \langle xe^{xy} - 2x,\, y - ye^{xy},\, z \rangle.
\end{aligned}$$

Puntaje: Fórmula del rotacional (5 pts), cálculo correcto de las derivadas parciales (6 pts), expresión final (4 pts).

(b) **(20 pts)** La frontera C se encuentra donde $z = 0$, es decir, $9 - x^2 - y^2 = 0$, que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano $z = 0$. Una parametrización de C (antihoraria) es $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0\rangle$ para $t \in [0, 2\pi]$. El vector tangente es $\mathbf{r}'(t) = \langle -3\operatorname{sen} t, 3\cos t, 0\rangle$. Sobre la curva C, tenemos $z = 0$. El campo vectorial se evalúa en $\mathbf{r}(t)$: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle (3\operatorname{sen} t)(0), 2(3\cos t)(0), e^{(3\cos t)(3\operatorname{sen} t)}\rangle = \langle 0, 0, e^{9\cos t \operatorname{sen} t}\rangle$. La integral de línea es:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \langle 0,0,e^{9\cos t\operatorname{sen} t}\rangle\cdot\langle -3\operatorname{sen} t, 3\cos t, 0\rangle\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0.$$

Puntaje: Parametrización de C (5 pts), cálculo de $\mathbf{r}'(t)$ (5 pts), evaluación de $\mathbf{F}$ en la curva (5 pts), cálculo de la integral (5 pts).

(c) **(20 pts)** Para calcular el flujo de rot $\mathbf{F}$ a través de S, podemos parametrizar S como $\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, 9 - x^2 - y^2\rangle$ sobre el disco $D : x^2 + y^2 \le 9$. La normal hacia arriba es $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle 2x, 2y, 1\rangle$. El flujo es $\iint_S (\text{rot }\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = \iint_D (\text{rot }\mathbf{F})(\mathbf{r}(x,y))\cdot\langle 2x, 2y, 1\rangle\,dA$. Evaluamos rot $\mathbf{F}$ en la superficie: $z = 9-x^2-y^2$. rot $\mathbf{F} = \langle xe^{xy}-2x,\ y-ye^{xy},\ 9-x^2-y^2\rangle$. El producto punto es:

$$\begin{aligned}(\text{rot }\mathbf{F})(\mathbf{r}(x,y))\cdot\langle 2x,2y,1\rangle &= (xe^{xy}-2x)(2x) + (y-ye^{xy})(2y) + (9-x^2-y^2)(1)\\ &= 2x^2e^{xy} - 4x^2 + 2y^2 - 2y^2e^{xy} + 9 - x^2 - y^2\\ &= (2x^2-2y^2)e^{xy} - 5x^2 + y^2 + 9\\ &= (2x^2-2y^2)e^{xy} - 3(x^2-y^2) - 2(x^2+y^2) + 9\end{aligned}$$

Por simetría

$$\iint_D (x^2-y^2)(2e^{xy}-3)dA = 0.$$

Por otra parte

$$\iint_D 9\,dA = 9(\pi\cdot 3^2) = 81\pi$$

y

$$\iint_D -2(x^2+y^2)\,dA = -2\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\,dr\,d\theta$$

$$= -4\pi\,\frac{r^4}{4}\Big]_0^3 = -81\pi.$$

Finalmente,

$$\iint_S (\text{rot }\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Puntaje:

- *Parametrizar S indicando el dominio de la parametrización 4 ptos.*
- *calcular normal con orientación correcta 4 ptos.*
- *calcular producto punto 4 ptos.*
- *Escribir la integral doble de forma que se vea que es igual a la dada o decir que con los cálculos hechos se completa la comprobación. 2 ptos.*

- *Calcular la integral doble 6 ptos.*

(d) **(5 pts)** En la parte (b), calculamos directamente $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$. En la parte (c), usando el Teorema de Stokes, calculamos $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = 0$. Los resultados coinciden. El Teorema de Stokes, $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$, se verifica.

Puntaje: Comparación explícita de los dos resultados (2 pts), mención del Teorema de Stokes (3 pts).

10. Sea E el sólido cilíndrico acotado por

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad z = 0, \qquad z = 3.$$

Sea S la superficie de E, orientada con la normal hacia afuera. Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x^2,\, yz,\, z^2 \rangle.$$

(a) **(15 pts)** Calcule div $\mathbf{F}$.

(b) **(30 pts)** Calcule directamente el flujo

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S},$$

sumando los flujos a través de la tapa superior, la tapa inferior y la pared lateral.

(c) **(15 pts)** Calcule la integral triple

$$\iiint_e \text{div } \mathbf{F}\, dV.$$

Compare este valor con el flujo total obtenido en (b). ¿Coinciden? En caso afirmativo, ¿existe algún teorema que explique esa coincidencia?

Solución:

(a) **(15 pts)** La divergencia de $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ es:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + z + 2z = 2x + 3z.$$

Puntaje: Fórmula de la divergencia (5 pts), cálculo correcto (10 pts).

(b) **(30 pts)** La superficie S se compone de tres partes:

- **Tapa superior (S_1):** $z = 3$, $x^2 + y^2 \le 4$. Normal $\mathbf{n} = \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$. Flujo: $\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{x^2+y^2\le 4} \langle x^2, 3y, 9\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle\, dA = \iint_{x^2+y^2\le 4} 9\, dA = 9 \cdot \text{Área}(D) = 9 \cdot \pi(2^2) = 36\pi$.
- **Tapa inferior (S_2):** $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 4$. Normal $\mathbf{n} = -\mathbf{k} = \langle 0, 0, -1\rangle$. Flujo: $\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{x^2+y^2\le 4} \langle x^2, 0, 0\rangle \cdot \langle 0, 0, -1\rangle\, dA = \iint_{x^2+y^2\le 4} 0\, dA = 0$.

- **Pared lateral (S_3):** $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 3$. Parametrizamos con $\mathbf{r}(\theta, z) = \langle 2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z\rangle$. La normal hacia afuera es $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \langle 2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0\rangle$. $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta, z)) = \langle 4\cos^2\theta, 2z\operatorname{sen}\theta, z^2\rangle$. $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z) = (4\cos^2\theta)(2\cos\theta) + (2z\operatorname{sen}\theta)(2\operatorname{sen}\theta) + 0 = 8\cos^3\theta + 4z\operatorname{sen}^2\theta$. Flujo: $\int_0^{2\pi}\int_0^3 (8\cos^3\theta + 4z\operatorname{sen}^2\theta)\,dz\,d\theta$. $\int_0^3 (8\cos^3\theta + 4z\operatorname{sen}^2\theta)\,dz = [8z\cos^3\theta + 2z^2\operatorname{sen}^2\theta]_0^3 = 24\cos^3\theta + 18\operatorname{sen}^2\theta$. $\int_0^{2\pi}(24\cos^3\theta + 18\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = 24\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta + 18\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$. La integral de $\cos^3\theta$ en un periodo es 0. La integral de $\operatorname{sen}^2\theta$ es π. El flujo lateral es 18π.

Flujo Total: $36\pi + 0 + 18\pi = 54\pi$.

Puntaje: Flujo tapa superior (8 pts), flujo tapa inferior (8 pts), flujo pared lateral (10 pts), suma total (4 pts).

(c) **(15 pts)** Como $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x + 3z$, debemos calcular $\iiint_E (2x + 3z)\,dV$. Usamos coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$. El dominio es $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le 3$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 (2r\cos\theta + 3z)r\,dz\,dr\,d\theta$$

Separamos la integral en dos partes: 1) $\iiint_E 2x\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 2r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$. La integral de $\cos\theta$ de 0 a 2π es 0. Así que esta parte es 0. 2) $\iiint_E 3z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 3zr\,dz\,dr\,d\theta = (2\pi)\left(\int_0^2 r\,dr\right)\left(\int_0^3 3z\,dz\right)$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{3z^2}{2}\right]_0^3 = 2\pi \cdot (2) \cdot \left(\frac{27}{2}\right) = 54\pi.$$

El resultado es $0 + 54\pi = 54\pi$. Este resultado coincide con el cálculo de la parte (b) lo que se justifica por el teorema de la Divergencia.

Puntaje: Cálculo en cilíndricas (8 pts), verificación de la igualdad (2 punto), justificación por el Teorema de la Divergencia (5 ptos).