PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEGUNDO SEMESTRE 2014

MAT1630 $\star$ CÁLCULO III
INTERROGACIÓN 1

1. *a*) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^3+y^3}}$.

   b) Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{, si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{, si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Analice la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$. Determine si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$.

2. Considere la superficie S en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$z = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 3.$$

   a) Determine la ecuación del plano tangente a S en el punto $(4,0,2)$.

   b) Determine todos los puntos P sobre S de modo que el plano tangente a S en P tenga a $n = (1,0,1)$ como su vector normal o demuestre que tales puntos no existen.

3. *a*) Determine los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = 2x^2 + xy - 8x - y + 6$ sobre la región $T \subset \mathbb{R}^2$ encerrada por el triángulo de vértices $(0,0); (3,0); (0,3)$. (Los puntos en el triángulo tambien son parte de la región T).

   b) Sea $f(x,y)$ una función escalar de dos variables que describe la temperatura sobre la superficie de la Tierra (la cual supondremos plana). Suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 2.$$

   Determine la derivada direccional de f en el punto $(-1,2)$ en la dirección del vector $(-1,1)$.

4. Determine y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x(x^2-3) + y(y^2-3)$.

TIEMPO: 120 MINUTOS

Una solución

1. *a*) Para calcular el primero de los límites consideraremos caminos de la forma $y = mx$ y calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{|mx|}}{\sqrt{x^3+m^3x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|m|}{\sqrt{1+m^3}},$$

de donde es claro que el límite pedido no existe, ya que depende del valor de m escogido.

b) Para analizar la continuidad de la función, en primer lugar notamos que para $(x,y) \neq (0,0)$ la función es producto y composición de funciones continuas, luego ella es continua. Por otro lado para $(x,y) = (0,0)$ calculamos, (haciendo uso de coordenadas polares)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{r\to 0} r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right) = 0 = f(0,0),$$

por lo tanto la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

A continuación calculamos la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la cual resulta ser:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{, si } \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{, si } \ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

En donde, se obtuvo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot\operatorname{sen}(1/|h|)}{h} = 0.$$

Finalmente, se tiene que la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$ ya que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

no existe, por ejemplo, escogiendo los puntos de la forma $(x,0)$, (el eje X), se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{2x^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+} 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right),$$

el cual claramente no existe.

2. *a*) Para determinar la ecuación del plano tangente pedido, escribamos S como la superficies de nivel, $F(x,y,z) = 3$ donde $F(x,y,z) = (x-2)^2 + (y+1)^2 - z$. Luego la ecuación del plano buscado será

$$\Pi : \nabla F(4,0,2)\cdot(x-4, y-0, z-2) = 0.$$

Donde

$$\nabla F = (2(x-2), 2(y+1), -1),$$

y por lo tanto $\nabla F(4,0,2) = (4,2,-1)$. Se concluye que la ecuación del plano será:

$$\Pi : 4x + 2y - z = 14.$$

b) Nos piden determinar los puntos donde el normal al plano tangente sea el vector $(1,0,1)$ luego, buscamos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en S, tal que:

$$\nabla F(P_0) = (-F_x, -F_y, 1) = (1,0,1),$$

es decir

$$\begin{aligned} -2(x_0 - 2) &= 1 \\ -2(y_0 + 1) &= 0 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Sistema que tiene por solución $P_0 = (3/2, -1, z_0)$ Pero como P_0 debe pertenecer a la superficie S se tendrá que

$$0 = (3/2 - 2)^2 + (y+1)^2 - 3 - z_0,$$

de donde $z_0 = -3$. Es decir el punto buscado existe y es $P_0 = \left(\frac{3}{2}, -1, -3\right)$.

3. *a*) En primer lugar notemos que T es una región cerrada y acotada, luego f alcanza su máximo y mínimo absoluto en T. Estos pueden alcanzarse para puntos en el interior de T o bien en la frontera de T.

Comencemos analizando los puntos críticos del interior de T, para ello, $\nabla f = (4x + y - 8, x - 1)$, en este caso el único punto crítico es $(1,4)$, sin embargo este no es un punto del interior de T, por lo tanto los extremos ocurren en la frontera de T.

La frontera de T tiene 3 segmentos, el segmento vertical $x = 0$, en el cual

$$f(0,y) = 6 - y$$

y por lo tanto no tiene extremos en el segmento. El segundo segmento es el segmento horizontal $y = 0$ en donde

$$f(x,0) = 2x^2 - 8x + 6,$$

la cual posee un mínimo para $x = 2$.
Finalmente el segmento diagonal $y = 3 - x$ en donde

$$f(x, 3-x) = x^2 - 4x + 3,$$

la cual posee un mínimo para $x = 2$. En conclusión tenemos 5 candidatos para los extremos de la función, los tres vértices del triángulo y los puntos $(2,0); (2,1)$. Evaluamos la función en cada uno de ellos:

$$f(0,0) = 6; \quad f(0,3) = 3, \quad f(3,0) = 0, \quad f(2,0) = -2, \quad f(2,1) = -1.$$

Y concluímos que los extremos pedido corresponde a -2 y 6.

b) Para calcular la derivada direccional pedida, debemos calcular,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2) = (-1,2) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

4. Para analizar los puntos críticos de la función dada, en primer lugar procedemos a calcular el gradiente de f: $\nabla f = (3x^2 - 3, 3y^2 - 3)$, luego los puntos que cumplen con $\nabla f = (0, 0)$ corresponden a

$$P_1 := (1, 1), \quad P_2 = (1, -1), \quad P_3 = (-1, 1), \quad P_4 = (-1, -1).$$

Por otra parte se tiene que el hessiano es:

$$det \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = 6xy.$$

Luego

$$\begin{aligned} H(P_1) = 36 > 0, \qquad f_{xx}(P_1) = 6 > 0, \quad &\text{por lo tanto } P_1 \text{ es un mínimo local de } f. \\ H(P_2) = -36 < 0, \qquad f_{xx}(P_1) = 6 > 0, \quad &\text{por lo tanto } P_2 \text{ es un punto silla de } f. \\ H(P_3) = -36 < 0, \qquad f_{xx}(P_1) = -6 > 0, \quad &\text{por lo tanto } P_3 \text{ es un punto silla de } f. \\ H(P_4) = 36 > 0, \qquad f_{xx}(P_1) = -6 > 0, \quad &\text{por lo tanto } P_1 \text{ es un máximo local de } f. \end{aligned}$$