MAT–1630 - CALCULO III
EXAMEN
Primer Semestre 2019

1. Considere la superficie S que se genera al rotar con respecto al eje OY el trazo de recta que comienza en $(1,0,0)$ y termina en $(2,2,0)$.

   a) Parametrice S.

   b) Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F} = (z, y, x)$ a través de S, con sus normales apuntando hacia la región no encerrada por S.

Solución. a) Como S es una superficie de revolución una parametrización posible es:

$$x(u,t) = u\cos t\,, \quad y(u,t) = 2(u-1)\,, \quad z(u,t) = u\,\mathrm{sen}\,t$$

con D la región dada por $D = \{(u,t) : 1 \le u \le 2\,,\ 0 \le t \le 2\pi\}$. Explicita parametrización **2.0 ptos**

Solución. b) De lo anterior obtenemos que

$$r_u = (\cos t, 2, \sin t)\,, \quad r_t = (-u\,\mathrm{sen}\,t, 0, u\cos t)\,.$$ Calcula derivadas de r **1.0 ptos**

Luego la normal a S en $Q = (x(u,t), y(u,t), z(u,t))$ está dada por

$$\vec{n}(u,t) = r_u \times r_t = (2u\cos t, -u, 2u\,\mathrm{sen}\,t)\,.$$ Calcula normal **0.5 ptos**

Notamos que la segunda coordenada y es negativa cuando $1 \le u \le 2$, por lo que esa normal apunta hacia afuera. Justifica correcta dirección de normal **0.5 ptos**

Por lo tanto, el flujo $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ se calcula:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (u\,\mathrm{sen}\,t, 2(u-1), u\cos t)\cdot(2u\cos t, -u, 2u\,\mathrm{sen}\,t)\,dt\,du \quad \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos}\\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 u^2\,\mathrm{sen}\,2t\,dt\,du + \int_0^{2\pi}\int_1^2 (-2u^2+2u)\,dt\,du \quad \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos}\\
&= 2\pi\int_1^2 (-2u^2+2u)\,dt\,du \quad \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos}\\
&= -\frac{10}{3}\pi\,. \quad \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos}
\end{aligned}$$

2. Una partícula se mueve en $\mathbb{R}^3$ a lo largo del camino cerrado C, compuesto por segmentos de rectas, que empieza en el origen y sigue al punto $P_1 = (1,0,0)$, continua al punto $P_2 = (1,2,1)$, sigue al punto $P_3 = (0,2,1)$ volviendo finalmente al origen; bajo la influencia del campo de vectores $\vec{F}(x,y,z) = (z^2, 2xy, 4y^2)$. Calcule el trabajo realizado.

Solución. El trabajo realizado está dado por la integral de línea $T = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Usaremos el Teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

donde R es el pedazo de plano limitado por el cuadrilátero de vértices $\vec{0}$, P_1, P_2, P_3.

Plantea Stokes con frontera correcta **1.0 ptos**

Calculamos el plano que contiene a estos puntos. Su normal es $(1,0,0) \times (0,2,1) = (0,-1,2)$.

Normal plano **0.5 ptos**

Por lo tanto, la ecuación del plano es $2z = y$. Explicita ecuación plano **1.0 ptos**

Luego una parametrización para región R es:

$r(x,y) = (x, y, y/2)$ con $D: 0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le 2\,.$ Parametriza región **0.5 ptos**

con normal de la parametrización $\vec{n} = (0, -1/2, 1)$ Da normal de la parametrización **0.5 ptos**

El rotor del campo es $(\nabla \times \vec{F}) = (8y, 2z, 2y)$ Calcula rotor **1.0 ptos**

Calculamos la integral de superficie:

$$\begin{aligned} \iint_R (\nabla \times \cdot \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \frac{3}{2} \iint_D y\, dA && \text{Aplica Stokes } \mathbf{0.5\ ptos} \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 dx \int_0^2 y\, dy && \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos} \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 y\, dy = 3. && \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos} \end{aligned}$$

Solución. Alternativa.

Descomponer el camino en $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ y calcular la integral de línea de cada pedazo,

$$T = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$ Descompone la integral **1.0 ptos**

Resultados:

$$I_1 = 0\,, \quad I_2 = 4 + \frac{16}{3}\,, \quad I_3 = -1\,, \quad I_4 = -\frac{16}{3}\,.$$

Integrales de línea I_1, I_3. Cada una **1.0 ptos** No hay puntaje parcial.

Integrales de línea I_2, I_4. Cada una **1.5 ptos** No hay puntaje parcial.

3. Considere la superficie en $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\,, 1 < z < 9\,, y > 0\}$.

   a) Determine la ecuación del plano tangente a S en $(1, 1, 2)$.

   b) Calcule el área de S.

Solución. Parte a) Una parametrización de S es $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con

$$x(u, v) = u\,, \quad y(u, v) = v\,, \quad z(u, v) = u^2 + v^2$$

con $D = \{(u, v) : 1 < u^2+v^2 < 9\,, v > 0\}$. Parametriza S **1.0 ptos**

El punto $Q = (1, 1, 2)$ se obtiene con $r(1, 1) = (1, 1, 2)$. Identifica Q **0.5 ptos**

Luego, la normal a S es $r_u \times r_v = (1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v) = (-2u, -2v, 1)$.
La normal en el punto $(1, 1, 2)$ es por lo tanto $(-2, -2, 1)$ Calcula normal **0.5 ptos**

El plano tangente pedido es

$(x-1, y-1, z-2)\cdot(-2, -2, 1) = 0 \iff z-2x-2y+2 = 0\,.$ Explicita ecuación plano **1.0 ptos**

Solución. Parte b)

$$A(S) \;=\; \iint_S dS = \iint_D \|r_u \times r_v\|\, du\, dv \;=\; \iint_D \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, du\, dv\,.$$

Representa área como integral doble **1.0 ptos**

Ahora se calcula la integral mediante el cambio de variable $u = r\cos\theta\,,\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, du\, dv &= \int_0^{\pi}\int_1^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta && \text{Cambio de variable } \mathbf{1.0\ ptos}\\
&= \pi \int_1^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr && \text{Calcula integral } \mathbf{0.5\ ptos}\\
&= \frac{\pi}{12}(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5})\,. && \text{Respuesta exacta } \mathbf{0.5\ ptos}
\end{aligned}$$

4. Sea $\mathcal{B}$ la región en $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Utlilice el Teorema de la Divergencia para calcular $\iiint_{\mathcal{B}} z^2 dV$.

Solución.

Sea S la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$. Por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iiint_{\mathcal{B}} z^2 dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

para cualquier campo de vectores $\vec{F}$ cuya divergencia es z^2. Plantea Teorema Divergencia **1.0 ptos**

En particular podemos elegir $\vec{F} = \frac{1}{3}\, z^3\, \hat{k}$ con $\hat{k} = (0,0,1)$. Elección de campo vectorial **1.0 ptos**

Es decir,

$$\iiint_{\mathcal{B}} z^2 dV = \iint_S \frac{1}{3}\, z^3 \hat{k} \cdot d\boldsymbol{S}\,. \qquad \text{Aplica a Teo. Divergencia } \textbf{0.5 ptos}$$

Ahora debemos calcular la integral de superficie en la última igualdad. Consideremos la siguiente parametrización de la esfera S

$$x(\theta,\phi) = \cos\theta\cos\phi, \quad y(\theta,\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad z(\theta,\phi) = \operatorname{sen}\phi,$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. Explicita parametrización **1.0 ptos**

Se calcula que el elemento de área es:

$$d\boldsymbol{S} = (\cos^2\phi\,\cos\theta, \cos^2\phi\,\operatorname{sen}\theta, \cos\phi\,\operatorname{sen}\phi)\, dA\,, \quad dA = d\theta\, d\phi\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{3} z^3 \hat{k} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}\phi)^3(\cos\phi\,\operatorname{sen}\phi)\, d\phi\, d\theta \qquad \text{Calcula integral } \textbf{1.0 ptos} \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\phi\cos\phi\, d\phi \qquad \text{Calcula integral } \textbf{0.5 ptos} \\
&= \frac{4\pi}{15} \qquad \text{Calcula y explicita respuesta } \textbf{1.0 ptos}
\end{aligned}$$