PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2015

INTERROGACIÓN 1
MAT1630 $\star$ CÁLCULO 3

1. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & , \text{ si } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \text{ si } \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   i) Calcule $f_x(x,y), f_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

   ii) Calcule $f_x(0,0), f_y(0,0)$.

   iii) Verifique que $f_{xy}(0,0) = -1, f_{yx}(0,0) = 1$.

2. *a*) Determine los puntos del hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $z = x + y$.

   b) Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x,y) = ye^{-xy}$ en el punto $(0,2)$ tiene valor 1.

3. *a*) Considere $w = x^2 + f(y,z)$ donde $x = \dfrac{t}{s}; \quad y = s - t: \quad z = t^2$. Calcule

$$\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$$

   en términos de f_z, f_y

   b) Determine el punto sobre el plano de ecuación $x + 4y + 4z = 39$ que se encuentra mas cercano al punto $(2,0,1)$.

4. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$ sobre la región encerrada por el triángulo de vértices $(1,0); (5,0); (1,4)$

UNA SOLUCIÓN

1. i) Para calcular $f_x(x,y)$ con $(x,y) \neq (0,0)$ utilizamos las reglas de derivación, con lo cual en este caso se tiene:

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Analogamente para $f_y(x,y)$ se tiene que

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

ii) Para calcular $f_x(0,0)$ debemos utilizar la definición, con lo cual

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{(h)^3 \cdot 0 - h \cdot 0 - 0}{h} = 0.$$

Analogamente

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

iii) A continuación para calcular $\dfrac{\partial}{\partial y}(f_x)$ en $(0,0)$ debemos nuevamente utilizar la definición junto con lo realizado en el item i),ii). De aquí se tiene

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^5}{k^5} = -1.$$

y de manera análoga se tiene que

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

2. *a*) Dado el hiperboloide de ecuación $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ su plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0) tendrá vector normal $n = (2x_0, -2y_0, -2z_0)$. Como buscamos que el plano tangente sea paralelo a $z = x + y$ se tendrá que n deberá ser paralelo a $(1,1,-1)$, es decir

$$(2x_0, -2y_0, -2z_0) = \lambda(1,1,-1), \qquad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Resolviendo lo anterior se tiene $x_0 = \lambda/2; \quad y_0 = -\lambda/2; \quad z_0 = \lambda/2$. Finalmente como el punto buscado debe pertenecer al hiperboloide se tiene que cumplir que:

$$\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} = 1$$

o equivalentemente $\lambda^2 = -4$ lo cual no es posible. Se concluye que no existe un punto que cumple lo pedido.

b) Buscamos un vector $v = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$ tal que $\nabla f(0, 2) \cdot (a, b) = 1$. En este caso tenemos que,

$$\nabla f(0, 2) = (-4, 1),$$

con lo cual buscamos (a, b) tales que

$$-4a + b = 1, \qquad a^2 + b^2 = 1.$$

Resolvemos el sistema anterior y encontramos dos soluciones, a saber:

$$(0, 1), \qquad \left(\frac{-8}{17}, \frac{49}{17}\right).$$

3. *a*) Debemos calcular, en primer lugar, w_t para ello, haciendo uso de la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= w_x \cdot x_t + w_y \cdot y_t + w_z \cdot z_t \\ &= 2x \cdot 1/s + f_y \cdot (-1) + f_z \cdot 2t \\ &= \frac{2t}{s^2} - f_y + 2t f_z \end{aligned}$$

Ahora para calcular $\dfrac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$ ocupamos lo anterior y calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2t}{s^2} - f_y + 2t f_z\right) \\ &= \frac{-4t}{s^3} - (f_{yy} \cdot y_s + f_{yz} \cdot z_s) + 2t\,(f_{zy} \cdot y_s + f_{zz} \cdot z_s) \\ &= \frac{-4t}{s^3} - f_{yy} - 2t f_{zy}. \end{aligned}$$

b) Para determinar el punto pedido, debemos minimizar la función

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-2)^2 + (y)^2 + (z-1)^2}$$

sujeta a la restricción $x + 4y + 4z = 39$. O de manera equivalente, minimizar la función

$$f(x, y, z) = (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2,$$

sujeta a la restricción $x+4y+4z = 39$. Para ello utilizamos el Método de Lagrange, es decir buscamos un punto (x, y, z) que resuelva el sistema:

$$\begin{aligned} 2(x-2) &= \lambda \\ 2y &= \lambda \\ 2(z-1) &= \lambda \\ x + 4y + 4z &= 39. \end{aligned}$$

Este tiene por solución el punto $(3, 4, 5)$ el cual por la geometria del problema sabemos que debe ser el punto donde se obtiene el mínimo buscado.

4. Sabemos que debemos analizar tanto en el interior del triangulo dado, como en su frontera. En primer lugar miramos en el interior, para ello buscamos puntos que satisfagan $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, en este caso

$$(y-1, x-2) = (0, 0).$$

Luego $P_1 = (2, 1)$ es el primero de los puntos críticos (Notemos que P_1 en efecto es un punto del interior del triángulo).

A continuación revisamos en la frontera del triángulo, para ello sea:

$$S_1 = \{(x, y) : x = t, y = 0; t \in [1, 5]\}.$$

Sobre este conjunto $f(t, 0) = 3 - t$ y los únicos puntos críticos que aporta son los extremos $P_2 = (1, 0); \quad P_3 = (5, 0)$.

Sea ahora

$$S_2 = \{(x, y) : x = t, y = 5 - t; t \in [5, 1]\}.$$

Sobre este conjunto $f(t, 5-t) = -t^2+6t-t$ tiene por puntos críticos $P_4 = (3, 2), \quad P_5 = (1, 4)$.

Finalmente sobre el conjunto $S_3 : \{(x, y) : x = 1, y = t; t \in [4, 0]\}$ no encontramos nuevos puntos crı́ticos.

Para determinar cuales puntos generan los máximos y mínimos absolutos, evaluamos en la función y comparamos (podemos hacer esto ya que la función es continua sobre un conjunto cerrado y acotado).

$$f(P_1) = 1, \qquad f(P_2) = f(P_4) = 2, \qquad f(P_3) = f(P_5) = -2.$$

Luego los puntos P_2, P_4 son los puntos donde se obtiene el máximo y P_3, P_5 donde se obtiene el mínimo absoluto.