Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2021

Cálculo III - MAT1630
PAUTA Interrogación 1

Problema 1

(6 puntos) Determine la parametrización por longitud de arco del espiral

$$r(t) = (e^{-t}\cos(2t), e^{-t}\sin(2t)), \quad t \geq 0.$$

Solución

Calculamos primero $||r'(t)||$:

$$\begin{aligned} r'(t) &= e^{-t}(-\cos(2t) - 2\sin(2t), -\sin(2t) + 2\cos(2t)) \\ \implies ||r'(t)|| &= e^{-t}\sqrt{(-\cos(2t) - 2\sin(2t))^2 + (-\sin(2t) + 2\cos(2t))^2} \\ &= \sqrt{5\cos^2(2t) + 5\sin^2(2t)} = e^{-t}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

La función longitud de arco es

$$s = s(t) = \int_0^t ||r'(u)||du = \int_0^t e^{-u}\sqrt{5}du = \sqrt{5}(1 - e^{-t}).$$

Notamos que si $t \geq 0$ entonces $s \in [0, \sqrt{5}[$. Despejando t se obtiene

$$t = t(s) = -\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{5}}\right).$$

Por lo tanto la parametrización por longitud de arco de la espiral es

$$\alpha(s) = r(t(s)) = \left(\left(1 - \frac{s}{\sqrt{5}}\right)\cos\left(-2\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{5}}\right)\right), \left(1 - \frac{s}{\sqrt{5}}\right)\sin\left(-2\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{5}}\right)\right)\right)$$

definida para $s \in [0, \sqrt{5}[$.

Puntaje:

- 1 punto por calcular $r'(t)$.
- 1 punto por calcular $||r'(t)||$.
- 1 punto por calcular s en función de t.
- 1 punto por despejar t en función de s.
- 1 punto por escribir explícitamente la reparametrización $\alpha(s) = r(t(s))$.
- 1 punto por encontrar el dominio para la parametrización $\alpha(s)$.

Problema 2

a) (2 puntos) Demuestre que si r es una parametrización suave dos veces derivable de una curva γ entonces el vector binormal $B(t)$ satisface

$$B(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{||r'(t) \times r''(t)||}$$

b) (4 puntos) Encuentre los vectores tangente unitario, normal y binormal y ecuación del plano osculador de la curva intersección entre las superficies $x = y^2$ y $z = x^2$ en el punto $(1, 1, 1)$.

Solución

a) Como consecuencia de las fórmulas de Fenet-Serret se tiene que

$$r'(t) \times r''(t) = \kappa(t)(s'(t))^3 B$$

donde κ es la curvatura y s la longitud de arco. Esto implica

$$B = \frac{r'(t) \times r''(t)}{\kappa(t)(s'(t))^3} = \frac{r'(t) \times r''(t)}{\frac{||r'(t) \times r''(t)||}{||r'(t)||^3}(s'(t))^3} = \frac{r'(t) \times r''(t)}{||r'(t) \times r''(t)||}.$$

b) Consideramos la parametrización

$$r(t) = (t^2, t, t^4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$r'(t) = (2y, 1, 4t^3) \Longrightarrow r'(1) = (2, 1, 4).$$

$$r''(t) = (2, 0, 12y^2) \Longrightarrow r''(1) = (2, 0, 12).$$

De aquí tenemos que

$$T(1) = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 1, 4).$$

Además

$$r'(1) \times r''(1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = (12, -16, -2).$$

y por el item a) se tiene

$$B(1) = \frac{1}{\sqrt{404}}(12, -16, -2) = \frac{1}{\sqrt{101}}(6, -8, -1).$$

Por otro lado,

$$N(1) = B(1) \times T(1) = \frac{1}{\sqrt{21}\sqrt{101}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -8 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}\sqrt{101}}(-31, -26, 22).$$

Finalmente, el vector $\sqrt{101}B(1)$ es normal al plano osculador en $(1, 1, 1)$ por lo que su ecuación es

$$6(x-1) - 8(y-1) - (z-1) = 0$$
$$\Longrightarrow 6x - 8y - z + 3 = 0.$$

Puntaje:

- 2 puntos por demostrar correctamente la afirmación a).
- 1 punto por calcular $T(0)$
- 1 punto por calcular $B(0)$
- 1 punto por calcular $N(0)$
- 1 punto por encontrar una ecuación del plano osculador.

Problema 3

(6 puntos) Hallar la velocidad, la rapidez, la aceleración, la curvatura y la torsión de la curva intersección de las superficies $y^2 + z^2 = 4z$ e $y^2 + 4x = 0$ en el punto $P = (-1, 2, 2)$.

Solución

La ecuación del cilindro $y^2 + z^4 = 4z$ puede reescribirse $y^2 + (z-2)^2 = 4$. Definimos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} y = 2\cos t \\ z = 2\sin t + 2, \\ x = -\frac{1}{4}y^2 = -\cos^2 t \end{cases}$$

que definen la parametrización $r(t) = (x(t), y(\theta), z(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. El punto $P = (-1, 2, 2)$ se alcanza cuando $t = 0$.

La velocidad en P es

$$v(t) = r'(t) = (2\cos t \sin t, -2\sin t, 2\cos t) \Longrightarrow v(0) = (0, 0, 2).$$

La rapidez en P es

$$||v(0)|| = 2.$$

La aceleración en P es

$$a(t) = r''(t) = (2\cos 2t, -2\cos t, -2\sin t) \Longrightarrow a(0) = (2, -2, 0).$$

La curvatura en P corresponde a

$$\kappa = \frac{||r'(0) \times r''(0)||}{||r'(0)||^3} = \frac{||(4, 4, 0)||}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calculamos $r'''(0)$:

$$r'''(t) = (-4\sin 2t, 2\sin t, -2\cos t) \Longrightarrow r'''(0) = (0, 0, -2)$$

y por lo tanto la torsión en P es

$$\tau = \frac{r'(0) \times r''(0) \cdot r'''(0)}{||r'(0) \times r''(0)||^2} = 0.$$

Puntaje:

- 2 puntos por parametrizar correctamente la curva (cualquiera sirve).
- 0,5 puntos por calcular $v(0)$.
- 0,5 puntos por calcular $||v(0)||$.
- 0,5 puntos por calcular $a(0)$.
- 1 punto por calcular κ
- 0,5 puntos por calcular $r'''(0)$.
- 1 punto por calcular τ.

Notar que la velocidad, rapidez y aceleración dependen de la parametrización escogida por lo que el o la estudiante puede obtener magnitudes distintas a las de esta pauta y aún así ser correctas.